This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

PSB

TRAITÉ

DE MÉCANIQUE,

PAR S. D. POISSON,

MEMBRE DE L'INSTITUT, DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE;
DES SOCIÉTÉS ROYALES DE LONDRES ET D'ÉDIMBOURG;
DES ACADÉMIES DE BERLIN, DE STOCKHOLM, DE SAINT-PÉTERSBOURG, DE BOSTON, DE TURIN, DE NAPLES ET DE PLUSIEURS AUTRES VILLES D'ITALIE; DE L'UNIVERSITÉ DE WILNA;
DES SOCIÉTÉS, ITALIENNE, ASTRONOMIQUE DE LONDRES, PHILOMATIQUES DE PARIS ET DE VARSOVIE, ET DES SCIENCES ET ARTS D'ORLÉANS.

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE AVEC SOIN

PAR J. G. GARNIER,

ANCIEN PROFESSEUR AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET ROYALE MILITAIRE DE SAINT-CYR,
APPELÉ A LA CHAIRE DE MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE GAND, PROFESSEUR ÉMÉRITE; AUTEUR D'UN COURS DE MATHÉMATIQUES;
D'UN TRAITÉ DE MÉTÉOROLOGIE, ETC., MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET LETTRES DE BRUXELLES,
ET D'AUTRES SOCIÉTÉS SAVANTES.

PUBLIC LIBRARY

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

Bruxelles.

SOCIÉTÉ BELGE DE LIBRAIRIE, ETC.

HAUMAN ET COMPAGNIE.

1838.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CE VOLUME.

INTRODUCTION.

Définitions de la *matière*, des *corps*, de la *masse*, d'un *point matériel*, et de la *force*, nos 1 et 2

Objet de la *Mécanique*; division de cette science en deux parties, la *Statique* et la *Dynamique*, n° 3

Le point d'application d'une force se déterminera au moyen de ses trois coordonnées, rectangulaires, ou polaires, n° 4

Ce qu'on entend par des *forces égales*; expression numérique de l'intensité d'une force, n° 5

La direction d'une force se déterminera au moyen de trois angles aigus ou obtus, liés entre eux par une équation, ou de deux angles indépendans l'un de l'autre; conversion en parties du rayon, d'un arc exprimé en degrés, nos 6, 7 et 8

Expression du cosinus de l'angle de deux droites; équation qui a lieu quand elles sont perpendiculaires l'une à l'autre; transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, n° 9

Projections d'une ligne droite sur une autre droite, et d'une aire plane sur un autre plan, n° 10

Comment on déterminera les deux sens opposés de différentes forces parallèles, n° 11

Dans cet ouvrage, on emploiera exclusivement la méthode des *infiniment petits*; principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale, n° 12

Définitions de la différentielle d'une variable et de celle d'une fonction; définition et notation de l'intégrale définie; cette intégrale est, en général, la somme des valeurs de la différentielle, n° 13

Différentiation d'une intégrale, par rapport à une quantité regardée comme constante dans l'intégration, n° 14

Formules des *quadratures*, n° 15

Dans l'infiniment petit, le rapport de l'arc d'un courbe à la corde est l'unité; ce qui permet de considérer une courbe comme un polygone d'une nombre infini de côtés infiniment petits, n° 16

Définition de la tangente à une courbe; formules qui déterminent sa direction; *élément* différentiel de la courbe; équation du *plan normal*; cosinus des angles que fait la perpendiculaire à un plan quelconque, avec des parallèles aux axes des coordonnées, n° 17

Expressions de l'angle de *contingence* et du *rayon de courbure*, n° 18

Équation du *plan osculateur*; formules relatives à la direction de la perpendiculaire à ce plan, n° 19

Coordonnées du centre de courbure, n° 20

Équation du plan tangent à une surface courbe; élément différentiel de la surface; formules relatives à la direction de la normale : on renvoie à un Mémoire inséré dans le 21e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour ce qui concerne la courbure des surfaces, n° 21

Règle pour déduire l'une de l'autre, les formules relatives à trois axes rectangulaires, par rapport à chacun desquels tout est semblable dans un problème, n° 22

Conditions générales auxquelles doivent satisfaire les équations qui renferment des quantités de différentes natures, n° 23

LIVRE PREMIER.

STATIQUE,

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE Ier. *De la composition et de l'équilibre des forces appliquées à un même point,* page 16

Ce qu'on entend par la *résultante* d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point; sa valeur, quand toutes ces forces agissent suivant une même droite, n° 24

La résultante de deux forces égales qui comprennent un angle de 120°, est égale à chacune de ces forces, et divise l'angle en deux parties égales, n° 25

Valeur et direction de la résultante de deux forces qui font un angle quelconque; règle du *parallélogramme des forces,* nos 26, 27 et 28

Conséquences immédiates de ce théorème, n° 29

Construction géométrique pour déterminer, en grandeur et en direction, la résultante d'un nombre quelconque de forces, n° 30

Composition de trois forces rectangulaires en une seule force, et décomposition de celle-ci en trois forces rectangulaires, n° 31

Calcul de la résultante d'un nombre quelconque de forces données; valeurs des angles qui déterminent sa direction; expression de cette résultante en fonction des composantes et des angles compris entre leurs directions, nos 32 et 33

Propriété particulière de cette même résultante, n° 34

Equation d'équilibre d'un point matériel entièrement libre : on vérifie qu'en vertu de ces équations, chacune des forces qui agissent sur ce point est égale et contraire à la résultante de toutes les autres, n° 35

Equation d'équilibre d'un point matériel, assujetti à demeurer sur une surface donnée; pression que supporte la surface; sens dans lequel elle s'exerce, nos 36 et 37

Equation d'équilibre d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe donnée, n° 38

Equation des *vitesses virtuelles,* contenant les équations d'équilibre relatives aux trois cas précédens, n° 39

CHAPITRE II. *De l'équilibre du levier,* page 24

Définition du *levier;* objet de ce chapitre, n° 40

Déplacement du point d'application d'une force appliquée à un système de forme invariable, n° 41

Définition du *moment d'une force par rapport à un point;* équilibre de deux forces appliquées à un levier; cette équation est indépendante de l'angle des deux *bras* du levier; cas où les deux forces données sont parallèles, nos 42 et 43

Deux forces parallèles agissant en sens contraires, et non directement opposées, ne sont pas réductibles à une seule; ce couple de forces peut être transformé d'une infinité de manières différentes, en un autre couple de forces irréductibles à une seule, n° 44

Condition d'équilibre d'un nombre quelconque de forces appliquées à un levier, n° 45

Théorème relatif au moment de la résultante de deux forces; extension de ce théorème au cas d'un nombre quelconque de forces dirigées dans un même plan; quantité qui demeure invariable, dans toutes les transformations de ce système de forces; équation d'équilibre de ces forces autour d'un point fixe, situé dans leur plan, nos 46, 47 et 48

On vérifie que l'équation des vitesses virtuelles a lieu dans l'équilibre du levier, n° 49

CHAPITRE III. *De la composition et de l'équilibre des forces parallèles,* page 29

Démonstration directe de la composition de deux forces parallèles qu'on avait déduite, précédem-

ment (nº 48), de celle des forces concourantes vers un même point; on en conclut la grandeur et le point d'application de la résultante d'un nombre quelconque de ces forces, nos 50 et 51

Quand des forces parallèles tournent autour de leurs points d'application respectifs, en restant toujours parallèles, leur résultante tourne aussi autour de son point d'application; définition du *centre des forces parallèles;* définition du *moment d'une force par rapport à un plan,* nos 52 et 53

Le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan, est égal à la somme des momens de ces forces, par rapport à ce même plan; coordonnées du centre des forces parallèles, nos 54, 55 et 56

Equation d'équilibre d'un système de forces parallèles, appliquées à un corps solide, soit que ce corps soit entièrement libre, ou qu'il soit retenu par un point ou par un axe fixe, nos 57 et 58

CHAPITRE IV. *Considérations générales sur les corps pesans et sur les centres de gravité,* p. 33.

On considère la *pesanteur* comme une force constante, en grandeur et en direction, dans toute l'étendue d'un même corps, nº 59

Définition du *poids* et de la *densité;* équations qui existent entre le poids, la masse, le volume d'un corps, et la grandeur de la gravité, nº 60

Définition du *gramme;* rapport de son poids à celui d'un même volume d'eau, à la température de la glace fondante; densités de l'air et du mercure, nº 61

Les poids servent de terme de comparaison aux autres forces; ils fournissent la mesure la plus commode de la masse, nº 62

Définition du *centre de gravité;* règle pratique pour en déterminer la position dans l'intérieur d'un corps solide, nº 63

Equations d'après lesquelles on calcule les coordonnées du centre de gravité d'un système de corps, dont les centres de gravité sont déjà connus; cas où les masses des corps sont infiniment petites; ce qu'on entend par les centres de gravité d'un volume, d'une surface, et d'une ligne, nos 64 et 65

Equation qui a lieu entre les distances mutuelles des centres de gravité de différens corps, et leurs distances au centre de gravité du système entier, nº 66

Propriété curieuse de l'équilibre d'un point matériel entièrement libre, nº 67

Enumération de différens cas où le centre de gravité est immédiatement connu, nº 68

CHAPITRE V. *Détermination des centres de gravité,* page 37

§ Ier. *Centres de gravité des lignes courbes,* *ibid.*

Coordonnées du centre de gravité d'une ligne quelconque; application à la ligne droite, nº 69

Cas d'une courbe plane; applications au cercle, et aux trois sections coniques, nos 70 et 71

Equation de la cycloïde; énoncé de ses diverses propriétés; coordonnées du centre de gravité d'un arc quelconque de cette courbe, nos 72 et 73

Règle pour déterminer l'aire d'une surface de révolution, quand le centre de gravité de sa courbe génératrice est connu sans aucun calcul, nº 74

§ II. *Centres de gravité des surfaces,* page 40

Coordonnées du centre de gravité d'une surface quelconque; cas où la surface est plane, nº 75

Application au centre de gravité d'un triangle; détermination de ce point, sans le secours du calcul intégral; comment on en déduit les centres de gravité du secteur et du segment circulaires, nos 76, 77 et 78

On indique, comme exemple, les centres de gravité des trois sections coniques; on calcule complètement les deux coordonnées du centre de gravité d'une portion quelconque de l'aire de la cycloïde, nos 79 et 80

Centre de gravité de la zone d'une surface de révolution; application aux surfaces concave et convexe engendrées par la cycloïde, nos 81 et 82

Règle pour déterminer le volume d'un solide de révolution, quand le centre de gravité de l'aire génératrice est connu sans aucun calcul; extension de cette règle à d'autres sortes de corps, nos 83 et 84

Volume d'un prisme ou d'un cylindre tronqué, nº 85

§ III. *Centres de gravité des volumes et des corps,* page 46

Centre de gravité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, nº 86

Détermination du centre de gravité d'une pyramide triangulaire, sans le secours du calcul intégral; comment on en déduit les centres de gravité d'un secteur et d'un segment sphériques, nos 87 et 88

Centre de gravité d'un corps symétrique autour d'un axe, et, en particulier, d'une portion d'ellipsoïde, nº 89

Centre de gravité d'un solide de révolution, et, en particulier, des solides concave et convexe engendrés par la cycloïde, nº 90

Expressions diverses, en intégrales triples, des coordonnées du centre de gravité d'un corps quelconque; application à une portion de sphère hétérogène, nos 91 et 92

Elément différentiel d'un volume exprimé au moyen des différentielles des coordonnées polaires, nº 93

CHAPITRE VI. *Calcul de l'attraction des corps,* page 51

§ Ier. *Formules relatives à un corps quelconque et à la sphère en particulier,* *ibid.*

Expressions générales en intégrales triples, des trois composantes rectangulaires de l'attraction

exercée par un corps sur un point matériel, nos 94 et 95
Réduction de ces trois intégrales triples, aux différences partielles d'une seule intégrale, no 96
Une difficulté qui a déjà été signalée dans le calcul des coordonnées du centre de gravité d'un corps quelconque (no 91), conduit à examiner la constitution intime des corps naturels. Définitions des *atomes* et des *molécules;* ce qu'on doit entendre par la densité d'un corps en un point quelconque; définition de l'*intervalle moyen* des molécules au même point; on explique comment les formules relatives aux masses des corps, aux coordonnées des centres de gravité, et aux attractions en raison inverse du carré des distances, peuvent être appliquées sans erreur sensible, aux corps naturels, nos 97 et 98
L'attraction d'un corps sur un point matériel très éloigné, est à très peu près la même que si la masse entière de ce corps était réunie à son centre de gravité; attraction mutuelle de deux sphères homogènes, no 99
Théorème relatif aux attractions des corps sphériques sur des points matériels extérieurs ou intérieurs, nos 100 et 101
Démonstration directe de l'équilibre d'un point matériel, situé dans un espace terminé par une couche sphérique, no 102

§ II. *Formules relatives à l'ellipsoïde,* page 56

Transformation des formules générales du no 95, principalement utile dans le cas où le point attiré fait partie du corps attirant, no 103
Application à l'ellipsoïde homogène : les formules relatives à son attraction sur un point intérieur, se réduisent à des intégrales simples, calculables au moyen des tables des fonctions elliptiques; extensions du théorème du no 102, à une couche elliptique, nos 104 et 105
Les intégrales s'effectuent sous forme finie, dans le cas de l'ellipsoïde de révolution; cas particulier d'un ellipsoïde très peu applati, no 106
Théorème remarquable, au moyen duquel on fait dépendre l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur, de l'attraction d'un autre ellipsoïde sur un point intérieur : ce théorème est indépendant de la loi de l'attraction en fonction de la distance; application au cas particulier de deux sphères concentriques, nos 107, 108 et 109

LIVRE DEUXIÈME.

DYNAMIQUE,

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE 1er. *Du mouvement rectiligne et de la mesure des forces,* page 62

§ 1er *Formule du mouvement rectiligne,* ibid.

Définition et équation du mouvement uniforme, no 110
Remarque sur la mesure du temps; invariabilité du *jour sidéral;* sa durée comparée à celle du *jour moyen,* no 111
Définition de la vitesse dans le mouvement uniforme, et ensuite dans le mouvement varié, no 112
En quoi consiste l'*inertie* de la matière, no 113
Expression de la vitesse dans un mouvement quelconque; expression de l'espace parcouru dans un temps infiniment petit, abstraction faite de la vitesse acquise, no 114
Définition et équation du mouvement *uniformé-*

ment accéléré ou *retardé*; la force qui le produit est une *force constante*; ce mouvement est celui des corps pesans dans le vide; dans un même lieu, l'accélération est la même pour tous ces corps; sa grandeur à l'Observatoire de Paris, n° 115

On démontre que les grandeurs des forces qui agissent successivement sur un même point matériel, sont entre elles comme les vitesses infiniment petites qu'elles lui impriment dans un même temps infiniment petit, n° 116

Quand il s'agit de forces constantes, leurs intensités sont entre elles comme les vitesses qu'elles produisent dans l'unité de temps; exemple du rapport des forces, conclu de celui des vitesses observées; exemple inverse du rapport des vitesses, conclu de celui des forces, n° 117

Mesure de la force dans un mouvement varié quelconque, soit au moyen de la vitesse qu'elle produit, soit au moyen de l'espace qu'elle fait parcourir, pendant un temps infiniment petit, n° 118

Formules générales du mouvement varié, n° 119

§ II. *Mesures des forces, en ayant égard aux masses*, page 67

Impropriété de l'expression *force d'inertie*, n° 120

Ce qu'on doit entendre par des points matériels égaux en masse; deux forces qui agissent sur deux points différens, sont entre elles comme leurs masses multipliées par les vitesses produites par ces forces, dans un même instant, n° 121

Définition de la *force motrice*; sa valeur dans un mouvement quelconque; elle se change en une *pression*, quand le mouvement est détruit, n° 122

De l'identité du mouvement des corps pesans en chaque lieu de la terre, on conclut la proportionnalité du poids à la masse, n° 123

Quand la force motrice est donnée, on en déduit la *force accélératrice*, en divisant par la masse du mobile; on prend, pour exemples, la résistance d'un milieu, et un poids donné, appliqué successivement à des masses différentes, n°s 124 et 125

Définitions de la *quantité de mouvement*, et de la *percussion* ou *impulsion*; décomposition d'une percussion en deux autres; application au *coin*, n° 126

Condition de l'équivalence de deux percussions; principe de l'équilibre dans le choc, d'après lequel deux corps dénués d'élasticité, qui vont à la rencontre l'un de l'autre, se réduisent au repos, quand les vitesses sont en raison inverse des masses, n° 127

Comment on peut comparer un poids et une percussion, n° 128

CHAPITRE II. *Exemple du mouvement rectiligne*, page 71

Equations différentielles du mouvement rectiligne; l'intégration n'est possible, sous forme finie, que quand la force accélératrice est constante, ou donnée en fonction d'une seule des trois variables, le temps, la vitesse, l'espace parcouru, n° 129

Mouvement vertical d'un corps pesant dans le vide, n° 130

Mouvement de ce corps sur un plan incliné, n° 131

Mouvement vertical d'un corps pesant dans un milieu résistant : lorsqu'il tombe d'une grande hauteur, sa vitesse approche de plus en plus d'être constante; moyen de déterminer le *coefficient* de la résistance, par l'observation du temps total de l'élévation et de la chute successives du mobile, n°s 132, 133, 134 et 135

Exemple de l'usage des *solutions particulières* dans les problèmes de dynamique, n° 136

Mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe, soit en raison directe de la distance, soit en raison inverse du carré de la distance, n°s 137 et 138

Mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes; cas où ces deux centres sont ceux de la lune et de la terre; diminution de la vitesse d'un projectile, produite par sa pesanteur vers le corps d'où il est parti, quand il est parvenu à une grande distance de ce corps, n°s 139, 140, 141, 142 et 143

CHAPITRE III. *Du mouvement curviligne*, page 79

§ 1er *Formules générales du mouvement*, *ibid.*

La détermination du mouvement curviligne d'un point matériel se réduit à celle des mouvemens rectilignes de ses trois projections sur les axes des coordonnées, n° 144

Expression de la vitesse du mobile : sa direction est tangente à la *trajectoire*; les vitesses des trois projections sont ce qu'on appelle les *composantes* de la vitesse du mobile; la composition et la décomposition des vitesses se font suivant les mêmes règles que la composition et la décomposition des forces, n° 145

Quelle que soit la variation de vitesse d'un point matériel, en grandeur et en direction, pendant un temps infiniment petit, il y a toujours une certaine direction pour laquelle l'augmentation de vitesse est la plus grande, et perpendiculairement à laquelle les composantes de la vitesse ne sont ni augmentées, ni diminuées, n° 146

Cette direction déterminée est ce qu'on entend par la direction de la force qui agit sur un point matériel en mouvement; en partant de cette définition, on démontre que l'accroissement de la composante de la vitesse suivant une direction quelconque, pendant un instant, est uniquement dû à la force qui agit suivant cette direction, et le même que si les autres forces n'existaient pas, n° 147

Construction de la trajectoire par points, qui résulte du principe précédent, et détermination de la vitesse et de la position du mobile à chaque instant sur cette courbe, n° 148

Equations différentielles du mouvement curviligne, soit quand l'origine des coordonnées est fixe, soit quand elle est en mouvement, n°s 149 et 150

Equations différentielles du mouvement d'un point matériel sur une surface ou sur une courbe donnée; expression de la force accélératrice suivant la tangente à la trajectoire, n°s 151 et 152

§ II. *Conséquences principales des formules précédentes*, page 85

Intégrales premières des équations différentielles du mouvement curviligne, qui ont lieu quand la force est constamment dirigée vers un centre fixe, n° 153

Principe des aires, compris dans ces intégrales, n°s 154 et 155

Elémens différentiels de l'aire et de la longueur d'une courbe, rapportés aux coordonnées polaires; composantes de la vitesse d'un mobile relatives à ces coordonnées; définition de la vitesse *angulaire*, n° 156

Intégrale première des équations du mouvement, qui donne dans un cas très général, le carré de la vitesse du mobile, indépendamment de la courbe décrite; cette vitesse est constante, quand le mobile, entièrement libre, ou obligé de se mouvoir sur une surface ou sur une courbe donnée, n'est sollicité par aucune force accélératrice; l'intégrale a lieu toutes les fois que le mobile est soumis à des forces dirigées vers des centres fixes et dont les intensités sont des fonctions de la distance à ces points, n°s 157 et 158

Expression de la vitesse d'un corps pesant sur une courbe quelconque, en fonction de la hauteur dont le mobile est tombé; conséquences immédiates qui s'en déduisent, n° 159

Propriété du mouvement d'un point matériel à laquelle on a donné le nom de *principe de la moindre action*, n° 160

En vertu de ce principe, un point matériel obligé de se mouvoir sur une surface donnée, et qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, décrit, en général, la ligne la plus courte d'un point à un autre; en formant l'équation différentielle de la trajectoire, on prouve que cette ligne la plus courte a partout son plan osculateur, normal à la surface donnée, n° 161

§ III. *Digression sur le mouvement de la lumière*, page 90

Dans le système de l'*émission*, les lois générales de la *réfraction* et de la *réflexion* se déduisent facilement du principe de la moindre action, n°s 162, 163 et 164

Equations différentielles du mouvement d'un rayon de lumière, à son passage d'un milieu dans un autre; conséquences de ces équations relativement à deux cas différens de réflexion, et à la réfraction; direction d'un rayon qui a traversé deux surfaces parallèles; phénomène de la *dispersion*, n°s 165, 166 et 167

La composition de la vitesse propre de la lumière avec celle de la terre, qui produit le phénomène de l'*aberration*, n'a cependant aucune influence appréciable sur la grandeur de la réfraction; dans le vide, la vitesse de la lumière, directe ou réfléchie, est la même, soit qu'elle nous vienne du soleil, des étoiles, ou des planètes; grandeur de cette vitesse; diminution qu'elle a dû éprouver en vertu de la pesanteur des rayons lumineux vers le soleil, n° 168

CHAPITRE IV. *De la force centrifuge*, page 95

Définition de la *force centrifuge*; détermination de cette force motrice, par la considération de la vitesse normale détruite à chaque passage du mobile, d'un élément de sa trajectoire à l'élément suivant; l'angle de contingence étant infiniment petit, ce passage ne produit aucune diminution dans la vitesse suivant la tangente; détermination complète en grandeur et en direction, de la pression exercée sur la trajectoire, en vertu de la force centrifuge et des forces données qui agissent sur le mobile, n°s 169 et 170

Calcul des trois composantes de cette même pression, d'après les équations différentielles du mouvement, n° 171

Conséquences que l'on déduit de la valeur de cette pression et de sa direction, lorsque le mobile est assujetti à se mouvoir sur une surface donnée, et quand il est entièrement libre, n°s 172 et 173

Détermination de la force centrifuge, d'après la considération du mouvement circulaire, n° 174

Comparaison de la force centrifuge dans le cercle à la pesanteur; tension d'un fil chargé d'un poids, et tournant autour d'un point fixe, n° 175

Diminution de la pesanteur, à l'équateur et sur les différens parallèles, produite par la force centrifuge qui résulte de la rotation de la terre; variation totale de la pesanteur, due à cette cause et à l'aplatissement du sphéroïde terrestre, n°s 176, 177 et 178

CHAPITRE V. *Exemples du mouvement d'un point matériel sur une courbe ou sur une surface donnée*, page 101

§ 1er. *Oscillations du pendule simple*, *ibid.*

Définition du *pendule simple*; on fera voir par la suite qu'il y a toujours un pendule simple dont le mouvement est le même, dans le vide ou dans l'air, que celui d'un pendule donné, n° 179

Formule différentielle du mouvement du pendule simple dans le vide, n° 180
Cas où cette formule s'intègre sous forme finie, n° 181
Cas des oscillations très petites, n° 182
Sur une courbe quelconque, les oscillations infiniment petites d'un point matériel pesant, ont une durée de grandeur finie et indépendante de la grandeur de leur amplitude, n° 183
Correction qu'il faut faire à la durée des oscillations très petites d'un pendule simple, pour en conclure la durée de ses oscillations infiniment petites, n° 184
Réduction en série du temps d'une oscillation de grandeur quelconque, n° 185
Mouvement du pendule simple dans l'air, lorsque la résistance est supposée proportionnelle à la vitesse : les amplitudes successives des oscillations très petites, décroissent en progression géométrique; leur durée n'est pas sensiblement altérée par la résistance du milieu, n°s 186 et 187
Mouvement du pendule simple dans l'air, quand la résistance est supposée proportionnelle au carré de la vitesse; loi du décroissement des amplitudes successives; dans le cas des petites oscillations, on démontre que la durée d'une demi-oscillation ascendante est autant diminuée, que celle de l'oscillation descendante qui précède a été augmentée, n°s 188, 189 et 190
Correction dans la longueur du pendule et dans la durée des petites oscillations, qu'on appelle la *réduction au vide;* augmentation qu'on doit faire subir à cette correction, à raison de l'état de mouvement de l'air, n° 191
En chaque lieu de la terre, la mesure de la pesanteur est proportionnelle à la longueur du pendule à secondes; valeurs de ces deux quantités à l'Observatoire de Paris; les expériences du pendule prouvent qu'en chaque lieu de sa surface, l'attraction de la terre est la même sur les matières de la nature la plus différente, n° 192
Valeur de la pesanteur et de la longueur du pendule à secondes, en fonctions de la latitude; retard d'une horloge réglée à Paris sur le temps sidéral, et ensuite transportée à l'équateur, n° 193

§ II. *Mouvement sur la cycloïde*, page 111

Le temps de la chute d'un point matériel pesant sur la cycloïde, est indépendant de l'élévation du point de départ au-dessus du point le plus bas, soit que le mouvement ait lieu dans le vide, ou qu'il ait lieu dans l'air, quand on suppose la résistance proportionnelle à la vitesse, n°s 194 et 195
Pendule *cycloïdal*, n° 196
Dans le vide, la cycloïde est la seule courbe *tautochrone*, n° 197
Recherche de la *brachystochrone* dans le vide; formules relatives au cas où la ligne de la *plus vite descente* devrait être tracée sur une surface donnée; formules relatives au cas où sa longueur serait donnée, qui serviront à résoudre, dans la suite, un autre problème de la même nature, n°s 198, 199, 200 et 201
On trouve pour la brachystocrone proprement dite, l'équation d'une cycloïde située dans un plan vertical; cas où le point de départ et le point d'arrivée appartiennent à une même verticale, n° 202

§ III. *Mouvement sur une surface donnée*, page 117

Equations différentielles du mouvement du pendule simple qui ne se meut pas dans un plan fixe, n° 203
Formules différentielles relatives aux *oscillations coniques* du pendule simple dans le vide, n°s 204 et 205
Cas des petites oscillations; cas où le pendule décrit uniformément la surface d'un cône droit à base circulaire; la courbe décrite par la projection horizontale du mobile, est toujours une ellipse dont le centre est le point de suspension, n°s 206 et 207

CHAPITRE VI. *Exemples du mouvement d'un mobile entièrement libre*, page 120

La trajectoire d'un point matériel pesant dans le vide, est une parabole; amplitude du jet; vitesse en un point quelconque, n° 208
La vitesse initiale étant donnée, trouver sa direction, pour que le projectile atteigne un but donné; courbe au delà de laquelle le projectile ne peut arriver, n° 209
Equations du mouvement d'un projectile dans l'air; construction, par points, de la trajectoire; calcul du temps; expression de la vitesse en un point quelconque, n°s 210, 211 et 212
Quand le mobile s'est élevé à une grande hauteur, son mouvement, en retombant, approche de plus en plus d'être vertical et uniforme; détermination de l'*asymptote* verticale de la branche descendante, n° 213
L'autre branche de la trajectoire a aussi une asymptote; direction de cette droite; et sa distance au point de départ du mobile, n° 214
Equation de la trajectoire, dans le cas d'un petit angle de projection; calcul de la *portée* horizontale et du temps du *trajet*, d'après la grandeur de la vitesse initiale; différentes valeurs de la portée et de la vitesse qui sont données par l'observation; incertitude sur la grandeur du *coefficient* de la résistance; moyens de le déterminer par l'expérience, n°s 215 et 216

§ II. *Mouvement des planètes*, page 126

Lois de *Képler*, n° 217
Equations fournies par les deux premières de ces lois, n° 218
Définition de quelques termes employés en Astro-

nomie; durée de l'année *sidérale* et de l'année *équinoxiale*; grandeur de la *précession* annuelle des équinoxes, n° 219
Expressions des deux coordonnées polaires de la planète et du temps, en fonctions de l'*anomalie excentrique*, n° 220
Méthode pour réduire le rayon vecteur et l'équation du centre en séries ordonnées suivant les cosinus et les sinus des multiples du *moyen mouvement*, n° 221
Formules qui déterminent en un point quelconque de l'ellipse décrite par une planète, la grandeur et la direction de sa vitesse, n° 222
Position d'une planète par rapport à un plan quelconque; sa *longitude* et sa *latitude*, son *ascension droite* et sa *déclinaison*; obliquité de l'écliptique; sa diminution annuelle; grandeur et période de la *nutation*, n° 223
On conclut des trois lois de Képler, que la force qui retient les planètes vers leurs orbites est constamment dirigée vers le centre du soleil; qu'elle varie pour chaque planète, suivant la raison inverse du carré de la distance à ce point; qu'à l'unité de distance, la force accélératrice est la même pour toutes les planètes: ces lois s'étendent aux comètes et aux mouvemens des satellites autour de leurs planètes respectives, et aux mouvemens relatifs des étoiles doubles, n°s 224, 225 et 226
Equations différentielles du mouvement d'une planète dans un milieu résistant: on complète le nombre des constantes arbitraires que doivent renfermer leurs intégrales trouvées précédemment, pour le cas où l'on néglige la résistance, n°s 227 et 228
Méthode de la *variation des constantes arbitraires*, pour l'intégration des équations différentielles, n°s 229 et 230
Application de cette méthode aux équations du mouvement d'une planète ou d'une comète dans un milieu résistant; pourquoi la résistance de l'*éther* peut être appréciable dans le mouvement d'une comète et insensible dans le mouvement d'une planète, n°s 231, 232 et 233

§ III. *Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale*, page 135

Equations du mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, par une force donnée en fonction de la distance à ce centre, n° 234
Cas où la force est proportionnelle à la distance, n° 235
Cas où la force est en raison inverse du cube de la distance, n° 236
Cas où la force est en raison inverse du carré de la distance; la trajectoire peut être alors une des trois sections coniques; circonstances qui déterminent chacune des trois courbes, n°s 237 et 238
Examen spécial du mouvement parabolique; en quoi consiste le problème astronomique de la détermination complète de l'orbite d'une comète, n°s 239 et 240

CHAPITRE VII. *Digression sur l'attraction universelle*, page 141

Loi de l'*attraction universelle*, n° 241
Force motrice résultant de l'attraction mutuelle du soleil et d'une planète; invariabilité du pouvoir attractif, n° 242
Force accélératrice d'une planète dans son mouvement autour du soleil; correction qu'on doit faire à la troisième loi de Képler; petitesse des masses des planètes par rapport à la masse du soleil, n° 243
Enoncé des différentes sortes de perturbations du mouvement elliptique des planètes, produites par leur attraction mutuelle: ces effets observés font connaître les masses des planètes perturbatrices, en prenant celle du soleil pour unité; invariabilité des grands axes; le mouvement de la lune s'accélère de siècle en siècle, n° 244
Autre moyen de déterminer les masses des planètes accompagnées de satellites, n° 245
Calcul des forces provenant de l'action du soleil et de la lune, pour soulever les eaux de la mer; masse de la lune conclue du *flux* lunaire comparé au *flux* solaire; diminution de la pesanteur à la surface de la terre, produite par l'action de la lune, n°s 246 et 247
A la distance de la lune à la terre, la pesanteur terrestre est à très peu près égale à la force qui retient ce satellite dans son orbite, n° 248
Détermination de la masse de la terre; *parallaxe* du soleil; sa densité; sa distance à la terre; détermination exacte du grand axe de l'orbite d'une planète dont la masse est connue, n° 249 et 250
Déviation du fil à plomb produite par les attractions locales, n° 251
Balance de *torsion*, propre à mesurer les forces très petites; expérience de *Cavendish*; densité moyenne de la terre, n°s 252 et 253
Stabilité de l'équilibre des mers, résultant de ce que cette densité est plus grande que celle de l'eau; accroissement des densités des couches de la terre, en allant de sa surface au centre; inégalité du mouvement de la lune, due à la non-sphéricité de la terre; influence des attractions locales sur la longueur du pendule à secondes, n° 254
Réduction au niveau des mers, de la longueur du pendule, observée à une élévation donnée, n° 255

LIVRE TROISIÈME.

STATIQUE,

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE Ier. *De l'équilibre d'un corps solide*, page 152

Remarque sur la compressibilité et le changement de forme du corps que l'on va considérer, n° 256
Transformation d'un système de forces quelconques, appliquées à un corps solide, en trois groupes de forces, le premier composé de forces perpendiculaires à un plan donné, le deuxième, de forces parallèles et comprises dans ce plan, et le troisième, de forces dirigées suivant une droite perpendiculaire aux précédentes et tracée dans ce même plan, nos 257, 258 et 259
Equations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un corps solide entièrement libre, n° 260
Ces équations sont encore nécessaires pour l'équilibre de tout autre système qui ne renferme aucun obstacle fixe, n° 261
Cas particuliers des forces parallèles et des forces qui sont toutes comprises dans un plan, n° 262
Condition pour que des forces données aient une résultante unique; équations de cette résultante; sa grandeur et sa direction; dans tous les cas, les forces données peuvent se réduire à deux, d'une infinité de manières différentes, nos 263 et 264
Equations d'équilibre de deux corps solides qui s'appuient l'un contre l'autre, n° 265
Equations d'équilibre d'un corps solide retenu par des obstacles fixes, dans les principaux cas qui peuvent se présenter, n° 266
Transformation de l'équation d'équilibre relative à un axe fixe, n° 267
Equilibre d'un corps pesant sur un plan incliné, n° 268
Mesure du *frottement* à l'instant où l'équilibre va se rompre, n° 269
Charges des différens pieds d'une table horizontale qui supporte un poids donné; à quoi tient l'indétermination apparente du problème, n° 270

CHAPITRE II. *Théorie des momens*, page 161

Les forces étant représentées par des lignes droites, leurs momens sont représentés par des aires planes : le théorème du n° 46, relatif au moment de la résultante de deux forces, est alors une proposition de Géométrie dont on donne la démonstration, n° 271
Le moment de la projection d'une force sur un plan est la projection du moment de cette force sur ce même plan, n° 272
Ce qu'on entend par le moment d'un système de forces par rapport à un axe; les momens d'un même système par rapport à deux axes situés dans le prolongement l'un de l'autre, sont égaux et de signe contraire; il en est de même à l'égard des momens par rapport à un même axe, de deux systèmes de forces égales et contraires, n° 273
Expressions des momens d'un système de forces par rapport aux trois axes des coordonnées positives de leurs points d'application; comment on détermine les signes des termes de ces formules, n° 274
Valeurs des cosinus des angles relatifs à la direction de la normale au plan qui contient une droite et un point donné, n° 275
Formules relatives aux projections d'un système d'aires planes sur différens plans; identité de ces

formules et de celles qui répondent aux projections des lignes droites sur d'autres droites, nos 276 et 277

Plan et grandeur de l'aire *minima*; propriété caractéristique de ce plan, nos 278, 279 et 280

Propriétés des momens, déduites de celles des aires planes; identité de la *composition* des momens et de la composition des forces, résultant de celle des projections des aires planes et des projections des lignes droites, n° 281

Moment principal d'un système de forces; nouvel énoncé des conditions d'équilibre de ce système; conditions pour que deux systèmes de forces soient équivalens, n° 282

Variation du moment principal, produite par le déplacement du centre des momens; momens principaux *minima*; comment on en déduit la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une résultante unique, nos 283 et 284

CHAPITRE III. *Exemples de l'équilibre d'un corps flexible*, page 168

§ Ier. *Equilibre du polygone funiculaire*, *ibid.*

Dans l'état d'équilibre du polygone, il faut que chaque côté soit tiré, suivant ses prolongemens, par des forces égales et contraires; équations nécessaires pour l'équilibre des forces appliquées au polygone, n° 285

Construction de la figure du polygone en équilibre; calcul des *tensions* de ses côtés; cas où ses points extrêmes sont supposés fixes, nos 286 et 287

Les extensions des côtés du polygone sont proportionnelles aux tensions qu'ils éprouvent, n° 288

Quand un des nœuds du polygone est remplacé par un anneau, la force appliquée en ce point doit partager en deux parties égales l'angle des deux côtés adjacens, n° 289

Condition relative aux directions des forces qui doivent avoir lieu dans tous les systèmes de points matériels en équilibre, et dont la précédente est un cas particulier, n° 290

Equilibre d'un polygone chargé de poids; pressions éprouvées par les points fixes auxquels il est attaché, n° 291

Remarque analogue à celle du n° 270, sur les tensions des cordons qui supportent un poids donné: quel que soit le nombre de ces cordons, leurs tensions et les charges des points fixes peuvent se déduire de la mesure des allongemens, n° 292

§ II. *Equilibre d'un fil flexible*, page 172

Equations d'équilibre d'un fil pesant, d'abord au nombre de trois, et qui se réduisent ensuite à deux, n° 293

Intégrales de ces équations sous forme finie; équation de la *chaînette*; expression de la tension en un point quelconque, n° 294

Calcul de la tension au point le plus bas, et des charges que supportent les deux points de suspension, n° 295

Parmi toutes les courbes *isopérimètres*, la chaînette est celle qui a son centre de gravité le plus bas, n° 296

Cas où les forces verticales qui agissent sur les élémens du fil sont proportionnelles à leurs projections horizontales; la courbe d'équilibre est alors une parabole; calcul de la tension au point le plus bas, et des charges des points extrêmes, qui peut être utile dans la construction des *chemins de fer*, n° 297

Equations d'équilibre d'un fil sollicité par des forces quelconques, n° 298

Cas d'un fil pesant suspendu verticalement à un point fixe et chargé d'un poids à son extrémité inférieure; calcul de son allongement total, n° 299

Expression de la tension dans le cas général; la courbe est déterminée par deux équations différentielles secondes; valeur du rayon de courbure d'après la direction de la tangente en chaque point, n° 300

Application des formules précédentes au cas d'un fil tendu sur la surface d'un corps solide, par des forces appliquées à ses extrémités, et qui sont les seules qui le sollicitent; la tension est la même dans toute sa longueur; dans son état d'équilibre stable, le fil trace sur la surface la ligne la plus courte d'un point à un autre; la pression exercée en chacun des points de la surface est en raison inverse du rayon de courbure de cette ligne, et proportionnelle à la tension, nos 301 et 302

Ces résultats sont modifiés par le frottement du fil contre la surface du corps solide; calcul du frottement d'un fil sur la gorge d'une poulie fixe, n° 303

On vérifie les six équations générales de l'équilibre du n° 261, dans le cas de l'équilibre d'un fil flexible; usage de ces équations pour déterminer les coordonnées des points extrêmes, quand ils sont libres, ou les pressions qu'ils éprouvent, lorsqu'ils sont fixes et donnés de position, nos 304 et 305

§ III. *Equilibre d'une verge élastique*, page 182

Condition pour qu'une verge soit élastique par flexion; différens effets que ses parties éprouvent lorsqu'on l'a écartée de sa position d'équilibre; définition de la *lame élastique*, n° 306

Hypothèses relatives aux forces qui résultent de l'extension ou contraction des filets longitudinaux et de la grandeur de leur courbure; valeur de la force totale de contraction d'un élément de la lame; valeur du *moment d'élasticité*, n° 307

Dans la *courbe élastique* proprement dite, la tension est constante et n'influe pas sur la courbure de la lame; équation différentielle de cette

courbe; conditions relatives à ses extrémités, nos 308 et 309

Cas où la lame est horizontale, encastrée par un bout, et chargée d'un poids donné à son autre extrémité; calcul de la flexion totale; comparaison de l'extension et de la flexion d'une lame, qui peuvent être produites par un même poids, no 310

Cas où la lame est un ressort vertical posé sur un plan horizontal, et chargé d'un poids à son extrémité supérieure; examen détaillé des différentes formes que ce ressort pourra prendre, nos 311 et 312

Ce qu'on entend par la *force* d'un ressort; calcul de cette force d'après l'extension ou d'après la flexion du ressort, produites par un poids donné, no 313

Extension des résultats précédens au cas d'une verge élastique, droite ou courbe, qui n'a pas été tordue sur elle-même; ce qu'on entend alors par le *filet moyen;* valeur du moment d'élasticité, no 314

Formule qui donne la flexion d'une verge droite, au moyen de la force de ce ressort; calcul de cette force dans différentes hypothèses sur le contour de la section normale; comparaison de la force d'un ressort creux à celle d'un ressort plein, no 315

Valeur de la différentielle de la tension en un point quelconque d'une verge élastique dont tous les points sont sollicités par des forces quelconques; une verge tirée, par une extrémité, augmente de volume en même temps qu'elle s'allonge, no 316

Équations générales de l'équilibre d'une verge élastique, en ayant égard à la torsion, no 317

Le moment de la torsion est constant dans toute la longueur de la verge; sa valeur, d'après les forces qui agissent à l'une des extrémités, no 318

Réductions des trois équations générales à une seule, quand le filet moyen est une courbe plane; équations relatives aux forces particulières qui agissent aux deux extrémités de la verge, no 319

Cas de la verge uniformément pesante; détermination de sa figure; calcul de sa flexion et des charges des points d'appui, nos 320, 321 et 322

Cas où la charge totale de la verge est inégalement répartie entre ses différens points; formule de Lagrange, pour exprimer en série de quantités périodiques les valeurs d'une fonction donnée, dans une étendue aussi donnée des valeurs de la variable, no 323

Détermination de la figure d'une verge chargée d'un poids suspendu à son milieu; calcul de sa flexion et des charges de ses points d'appui, no 324

Démonstration de la formule précédemment citée (no 323); autres formules de la même nature, nos 325 et 326

Usage des formules de ce genre pour la sommation des séries, no 327

Formule de Fourier, déduite des précédentes, no 328

CHAPITRE IV. *Principe des vitesses virtuelles,* page 200

Vérification de ce principe dans le cas de deux forces appliquées à une *moufle,* un *treuil,* une *vis,* un *levier,* nos 329 et 330

Equation générale de l'équilibre d'un système quelconque de points matériels, qui résulte du principe des vitesses virtuelles; cette équation n'a lieu que pour les mouvemens infiniment petits, compatibles avec les conditions du système, et dont les mouvemens contraires sont également possibles; elle a déjà été démontrée no 39, dans le cas d'un point matériel isolé, no 331

Notions relatives aux tensions et aux contractions qui ont lieu entre les liens physiques des points d'un système en équilibre; manière de représenter ces forces intérieures; manière de représenter les variations de distance des points du système; équation qui a lieu entre la variation totale et les variations partielles de chaque distance, nos 332 et 333

Démonstration très générale du principe des vitesses virtuelles, nos 334 et 335

On fait voir que la proposition directe étant prouvée, la proposition inverse en est une conséquence immédiate, no 336

Ce principe a aussi lieu dans l'équilibre des fluides, ainsi qu'on le fera voir par la suite; autre démonstration de ce principe, fondée sur la considération des moufles, nos 337, 338 et 339

On peut déduire du principe des vitesses virtuelles les règles du parallélogramme des forces et de la composition des forces parallèles; comment on en conclut les équations d'équilibre d'un corps solide précédemment trouvées, no 340

Transformation de l'équation générale des vitesses virtuelles; règle pour en déduire toutes les équations d'équilibre d'un système de points matériels, dont les liaisons sont exprimées par des équations entre leurs coordonnées, nos 341 et 342

On déterminera, en même temps, en grandeur et en direction, les forces intérieures qui résultent de ces liaisons; le principe des vitesses virtuelles est nécessaire pour faire connaître, relativement à deux ou plusieurs points liés par une même équation, les rapports de grandeur de ces forces, dont la remarque du no 290 ne détermine que les directions, nos 343 et 344

Application des formules précédentes à l'exemple du polygone funiculaire, no 345

Propriété de *maximum* ou de *minimum* qui a lieu dans l'équilibre d'un système de points matériels soumis à leurs attractions ou répulsions

mutuelles, en fonctions des distances, et à d'autres forces semblables, dirigées vers des centres fixes, n° 346
Distinction entre l'équilibre *stable* et l'équilibre *instantané*, n° 347
Propriété du centre de gravité d'un système de corps pesans dans ces deux états d'équilibre, n° 348
Exemple de la stabilité et de la non-stabilité de ce système, n° 349

LIVRE QUATRIÈME.

DYNAMIQUE,

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE Ier. *Principe général de la Dynamique*, page 314
Enoncé de ce principe, dont l'auteur est D'Alembert, et d'après lequel on ramène toutes les questions de Dynamique à de simples problèmes de Statique, n° 350
Autre énoncé du même principe, dont l'avantage est de conduire immédiatement à des équations entre les données et les inconnues de chaque problème, n° 351
En vertu de ce principe, les tensions des liens physiques d'un système de points matériels, et les pressions exercées sur des surfaces ou des courbes données, se déterminent dans l'état de mouvement, par les mêmes règles que dans l'état d'équilibre; les forces motrices qui agissent sur les mobiles se décomposant en *forces perdues*, qui produisent ces tensions ou pressions, et en d'autres forces qui font varier les vitesses des mobiles; exemples de ce double effet des forces données, n° 352
Extension du principe général de la Dynamique aux *percussions* considérées comme des forces motrices qui ont lieu pendant un temps très court et produisent des changemens brusques de vitesses; influence que peut avoir le frottement pendant l'action de ces forces, n° 353
Application du principe général au mouvement de deux corps pesans posés sur des plans inclinés et liés par un fil inextensible; tension de ce fil, détermination des vitesses initiales, nos 354 et 355
Mouvement d'une chaîne pesante posée sur deux plans inclinés; dans quel cas la chaîne demeurera en équilibre, n° 356
Mouvement rectiligne de deux points matériels soumis à leurs répulsion ou attraction mutuelles, n° 357
Les formules de ce mouvement s'étendent à deux corps solides dont tous les points ont des vitesses parallèles à une même droite; mouvement du boulet et du canon pendant que le boulet est dans l'*ame* de la pièce; hypothèses sur lesquelles la loi de la force de la poudre est fondée; calcul numérique de la force de la poudre, d'après la vitesse du boulet à la bouche du canon; remarque de Lagrange sur ce problème, nos 358 et 359
Application du principe de D'Alembert au cas le plus simple du choc des corps; données physiques de la question, et hypothèses nécessaires à sa solution, n° 360
Choc de deux corps mous ou dénués d'élasticité, définition de la *force vive*; perte de force vive qui a toujours lieu dans ce choc, n° 361
Choc de deux corps parfaitement élastiques; conservation de la somme des forces vives; choc d'une série de billes en repos par une bille en

mouvement ; les lois précédentes du choc des corps sphériques, mous ou élastiques, sont confirmées par l'expérience, nos 362 et 363
Conservation du mouvement du centre de gravité dans le choc de deux corps sphériques, no 364
Théorie imparfaite de la résistance des milieux, dans laquelle cette résistance est assimilée à une suite de chocs du mobile contre les molécules du fluide qu'il traverse ; expression de la résistance sur une surface plane et sur chaque élément d'une surface courbe ; calcul de la résistance sur une surface de révolution, et, en particulier, sur une sphère, nos 365 et 366
Le coefficient de la résistance relative au mouvement des projectiles dans l'air, qui résulterait de cette théorie, n'est pas d'accord avec l'observation ; valeur de ce coefficient, que l'on a déduite de l'expérience ; en quoi consiste réellement la résistance des fluides ; elle n'a encore été déterminée, d'après les lois de la Mécanique (no 191), que dans le cas des petites oscillations d'un pendule, no 367

CHAPITRE II. *Détermination des momens d'inertie et des axes principaux,* page 225

Intégrales définies qui se présenteront dans les équations du mouvement des corps solides, dont les masses seront décomposées, pour plus de simplicité, en élémens infiniment petits (no 98) ; définition des *momens d'inertie* et des axes principaux, no 368
Calcul du moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle, l'axe étant une de ses arêtes, no 369
Calcul du moment d'inertie de l'ellipsoïde, par rapport à l'un de ses axes de figure, no 370
Moment d'inertie d'une sphère composée de couches concentriques de différentes densités, no 371
Les intégrales triples d'où dépendent, en général, les momens d'inertie, se réduisent à des intégrales simples dans le cas d'un solide de révolution ; application à la sphère, au cône et au cylindre, nos 372 et 373
Connaissant le moment d'inertie d'un corps quelconque par rapport à un axe passant par son centre de gravité, on en déduit le moment d'inertie du même corps par rapport à un axe parallèle au premier, no 374
Connaissant les momens d'inertie par rapport aux trois axes principaux qui se coupent en un point, on en conclut le moment d'inertie relatif à un axe quelconque passant par ce point, no 375
Propriétés des momens d'inertie principaux, ou qui répondent aux axes principaux, no 376
Avant de démontrer l'existence des axes principaux, et d'en déterminer la direction, on rappelle d'abord les formules générales de la transformation des coordonnées, no 377
Les neufs coefficiens qui entrent dans ces formules sont des fonctions de trois angles indépendans entre eux ; définition de ces trois angles ; sens déterminé suivant lequel ils devront être comptés, et comment ils pourront croître dans le mouvement d'un corps solide ; valeurs des neuf coefficiens en fonctions de ces trois angles ; moyen d'obtenir ces valeurs, nos 378 et 379
On démontre qu'il existe toujours trois axes principaux rectangulaires qui se coupent, en chaque point d'un corps quelconque, et l'on donne les formules propres à les déterminer, no 380
Il n'y a qu'un seul système de trois axes principaux, quand les trois momens d'inertie qui s'y rapportent sont inégaux ; leur nombre est infini, lorsque deux de ses momens sont égaux ; si les momens d'inertie relatifs à trois axes principaux, qui se coupent en un point, sont égaux, toutes les droites passant par ce point sont des axes principaux, auxquels répondent des momens d'inertie égaux, no 381
Détermination des points singuliers, qui jouissent de cette dernière propriété ; application à l'ellipsoïde et au parallélipipède, nos 382 et 383

CHAPITRE III. *Du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe,* page 236

§ Ier. *Mouvement de rotation uniforme,* ibid.

Définition de la *vitesse angulaire* commune à tous les points d'un système de forme invariable, tournant autour d'un axe fixe, no 384
Détermination de cette vitesse, lorsque les points du système ont éprouvé simultanément des percussions qui leur auraient imprimé, s'ils étaient libres, des vitesses données, no 385
Cas où le système se change en un corps solide, frappé par un ou plusieurs autres corps qui lui restent attachés après le choc, no 386
Comment on peut déterminer la percussion que l'axe éprouve à l'instant du choc ; conditions nécessaires pour que l'axe n'éprouve aucune percussion ; définition du *centre de percussion,* nos 387 et 388
Pressions exercées sur l'axe pendant le mouvement de rotation, et dues aux forces centrifuges de tous les points du corps ; propriété générale des axes principaux dans le mouvement uniforme de rotation ; propriété particulière des axes principaux qui passent par les centres de gravité du mobile, nos 389 et 390

§ II. *Mouvement de rotation varié,* page 240

Equation différentielle de ce mouvement ; différentielle de la vitesse angulaire ; on en déduit la vitesse constante provenant d'une percussion, que l'on a précédemment donnée, nos 391 et 392
Calcul des pressions totales exercées sur l'axe à un instant quelconque, no 393
Mouvement d'un pendule composé, dans le vide ; réduction du pendule composé au pendule simple, nos 394 et 395

Définition du *centre d'oscillation*; réciprocité du centre d'oscillation et du centre de suspension; méthode fondée sur cette réciprocité, pour déterminer la longueur du pendule simple, correspondant à un pendule donné; on fait voir que pour un même corps, il y a une infinité d'axes autour desquels les petites oscillations ont la même durée, nos 396, 397, 398

Mouvement d'un pendule composé, dans un milieu résistant; la longueur du pendule simple qui a le même mouvement, ne dépend pas de la résistance, no 399

Mouvement d'un treuil et de deux corps pesans, suspendu au cylindre et à la roue; application à la machine d'*Atwood*, nos 400 et 401

Pendule de Robins; usage de ce pendule pour déterminer les vitesses initiales des projectiles de l'artillerie, nos 402 et 403

CHAPITRE IV. *Du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe*, page 249

§ Ier. *Formules préliminaires*, *ibid.*

Le mouvement de rotation d'un système de forme invariable, autour d'un point fixe, a lieu autour d'une droite variable d'un instant à l'autre, que l'on appelle *axe instantané de rotation*, no 404

Détermination de la direction de cet axe, soit par rapport à des droites fixes dans l'intérieur du corps, soit par rapport à des droites fixes dans l'espace, no 405

Expression de la vitesse angulaire de rotation du corps autour de l'axe instantané; décomposition de cette vitesse en trois autres, autour de trois axes rectangulaires, fixes ou mobiles; la composition et la décomposition des vitesses de rotation se font suivant les mêmes règles que celle des vitesses de translation, nos 406 et 407

Composante de la vitesse absolue d'un point quelconque du corps, par rapport à trois axes fixes dans son intérieur; composantes de la force accélératrice, par rapport aux mêmes axes, no 408

Momens des quantités de mouvement de tous les points du corps à un instant quelconque, par rapport à trois axes passant par le point fixe; cas où ces trois droites sont les axes principaux qui se coupent en ce point; signe de chacun de ces momens, d'après le sens de la rotation autour de l'axe correspondant; moment principal de ces mêmes quantités de mouvement, et direction de son axe, no 409

Equations différentielles qui ont lieu entre les trois angles du no 378, d'où dépend la position du mobile à chaque instant, et les trois composantes de sa vitesse angulaire par rapport à ses trois axes principaux, no 410

Autres formules qui pourront être utiles dans la suite, no 411

§ II. *Equations différentielles du mouvement de rotation autour d'un point fixe*, page 254

Ces équations, au nombre de trois, s'obtiennent très facilement, au moyen des formules du no 408 et du principe de D'Alembert; on les réduit à leur forme la plus simple, en rapportant les composantes de la force accélératrice d'un point quelconque du mobile, à ses trois axes principaux; le problème général du mouvement de rotation dépend de six équations du premier ordre, savoir, celles qu'on vient de former, et celle du no 410; cas où la pesanteur est la seule force qui agit sur les points du mobile, nos 412 et 413

Quand ce mobile n'est soumis à aucune force motrice, ou bien, quand il s'agit d'un corps pesant, et que le point fixe est son centre de gravité, on parvient à intégrer les six équations du mouvement de rotation, et à faire dépendre les inconnues, de deux fonctions elliptiques; dans ce mouvement, produit par des percussions initiales, les momens des quantités du mouvement de tous les points du corps, par rapport à des axes passant par le point fixe, sont constans; leur moment principal et sa direction sont invariables, et cette considération facilite l'intégration des équations du problème, nos 414, 415, 416 et 417

Détermination complète des constantes arbitraires, contenues dans les intégrales de ces équations, en supposant, pour fixer les idées, que le mobile a été frappé, à l'origine du mouvement, par un autre corps qui y est resté attaché, no 418

Diverses propriétés générales du mouvement de rotation d'un corps qui n'est soumis à aucune force motrice, no 419

Détermination de ce mouvement, plus simple que la précédente, mais seulement approchée, lorsque l'axe instantané de rotation s'écarte constamment très peu de l'un des trois axes principaux du mobile, et qui se coupent au point fixe; on retrouve la propriété des axes principaux déjà démontrée dans le no 389; on fait voir, de plus, que le mouvement est *stable* autour des axes du plus grand et du plus petit moment d'inertie, et seulement instantané autour du premier axe principal; détermination des constantes arbitraires dans le cas de la stabilité, nos 420, 421 et 422

Le mouvement de rotation produit par des percussions initiales, devient plus simple, quand le mobile est un solide de révolution, et que son axe de figure passe par le point fixe; les inconnues se déterminent alors sans le secours des fonctions elliptiques, no 423

Autre démonstration de la stabilité du mouvement autour de deux des axes principaux, no 424

§ III. *Solution d'un cas particulier du mouvement de rotation d'un corps pesant*, page 263

Le mobile est un solide de révolution dont l'axe de figure passe par le point fixe; on appelle

équateur la section de ce corps faite par ce point et perpendiculaire à cette droite; le mouvement parallèle à l'équateur est uniforme; l'intersection de l'équateur et du plan horizontal passant par le point fixe, s'appellera la ligne des *nœuds;* définition du *nœud ascendant*, et distinction de son mouvement *direct* et de son mouvement *rétrograde* sur le plan horizontal, nos 425 et 426

Dans ce cas, les six équations du mouvement de rotation s'intègrent, et les inconnues du problème s'expriment exactement par des fonctions elliptiques; détermination des constantes arbitraires, contenues dans les intégrales, nos 427 et 428

Cas où le mobile se réduit à un point matériel, dont la distance au point fixe est constante; on retrouve alors les formules du n° 205, relatives au pendule simple, n° 429

Lorsque l'axe de figure a été écarté de la verticale, et qu'après avoir imprimé au mobile une vitesse de rotation autour de cette droite inclinée, il est ensuite abandonné à lui-même, on démontre que le mouvement du nœud ascendant sera direct ou rétrograde, selon que le centre de gravité du corps sera situé au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, passant par le point fixe; quand la vitesse de rotation est nulle, le mouvement du corps se réduit à celui d'un pendule composé, n° 430

On applique les formules du numéro précédent, au cas où l'axe de rotation a été, primitivement, très peu écarté de la verticale, et l'on détermine de cette manière les valeurs approchées des angles d'où dépend la position du mobile à un instant quelconque, n° 431

On applique les mêmes formules au cas où l'inclinaison de l'équateur demeure à peu près invariable; il faut pour cela que la vitesse de rotation soit très rapide; on détermine, dans cette hypothèse, les petites variations de l'inclinaison de l'équateur, et le mouvement de la ligne des nœuds, qui est très lent par rapport au mouvement de rotation, et à peu près uniforme; ce cas est celui de la machine de *Bohnenberger*, n° 432

CHAPITRE V. *Du mouvement d'un corps solide entièrement libre*, page 267

Décomposition de ce mouvement en deux autres, l'un de *rotation* autour d'un point du corps, l'autre de *translation*, commun à tous ses points; cas où le second mouvement est révolutif, et où chaque révolution s'achève dans le même temps que chaque rotation; ce cas a lieu dans le mouvement des satellites, et, en particulier, dans le mouvement de la lune, qui tourne, en conséquence, constamment la même face vers la terre, n° 433

Détermination de la vitesse que prend le centre d'un corps solide, sur lequel on exerce une ou plusieurs percussions déterminées; réciproquement, cette vitesse fait connaître la direction et l'intensité de la percussion, soit que le corps qui a frappé celui que l'on considère y soit resté attaché, ou qu'il s'en soit séparé après le choc, nos 434 et 435

Comment on pourrait déterminer le mouvement initial de rotation autour d'un point quelconque du mobile, si l'on connaissait, en grandeur et en direction, la vitesse initiale de ce point; quand ce point est le centre de gravité, cette connaissance est inutile, et le mouvement de rotation initial est le même que si le centre de gravité demeurait en repos, n° 436

Détermination de l'axe instantané initial qui passe par le centre de gravité, et de la vitesse angulaire autour de cet axe; cas où cette droite est un des trois axes principaux qui se coupent au centre de gravité, n° 437

Equations différentielles du mouvement du centre de gravité; comment on formerait celles du mouvement de rotation autour de ce point, n° 438

Ces deux systèmes d'équations différentielles, ainsi que les deux mouvemens correspondans, sont indépendans l'un de l'autre, dans le cas d'un corps soumis à la seule action de la pesanteur; détermination complète du mouvement d'un ellipsoïde pesant, frappé dans un plan perpendiculaire à l'un de ses trois axes de figure, n° 439

La même indépendance a lieu dans le cas d'une sphère composée de couches concentriques et dont tous les points sont soumis à des attractions dirigées vers des centres fixes ou mobiles; quand le mobile s'écarte de la forme sphérique, ces attractions influent sur son mouvement de rotation; perturbations du mouvement de la terre autour de son centre de gravité, dues à sa non-sphéricité, et produites par les actions du soleil et de la lune; ces forces, qui donnent lieu à la *précession des équinoxes* et à la *nutation* de l'axe de la terre, n'ont cependant aucune influence sensible sur la direction de cet axe dans l'intérieur du globe, ni sur la durée de sa rotation autour de cette droite mobile dans l'espace, nos 440 et 441

L'invariabilité du jour sidéral et du jour moyen est confirmée par les éclipses que les *Chaldéens* ont observées; calcul qui fait voir que la durée du jour moyen n'a pas varié d'un centième de seconde en 2500 ans, nos 442 et 443

Examen des différens effets qui peuvent être produits par le frottement de la surface d'un projectile contre l'air dans lequel il se meut, et par la résistance proprement dite de ce fluide, nos 444, 445 et 446

CHAPITRE VI. *Du mouvement d'un corps solide pesant sur un plan donné*, page 275

§ Ier. *Cas où l'on n'a pas égard au frottement, ibid.*

On supposera que le mobile touche le plan donné par un seul point de sa surface, pendant toute la durée du mouvement; équations différentielles du mouvement du centre de gravité et du mouvement de rotation autour de ce point, n° 447

Equation résultante du contact du mobile avec le plan donné, qui peut être fixe ou avoir un mouvement donné; distinction entre le cas où le point de contact se déplace à la surface du mobile, et le cas où ce point est constamment l'extrémité d'une pointe, comme dans le jeu de la toupie, n° 448

Cas où le plan donné est fixe et horizontal; on indique, comme exemples, les petites oscillations d'un ellipsoïde homogène ou d'une sphère hétérogène; on obtient deux intégrales premières des équations différentielles du n° 447, qui suffiront pour la solution rigoureuse du problème, au moyen des fonctions elliptiques, quand le mobile est un solide de révolution, nos 449 et 450

Mouvement d'un solide de révolution, terminé par une pointe, et qui s'appuie, par son extrémité, sur un plan dont les oscillations sont connues, n° 451

Quand le mobile a une vitesse de rotation très rapide par rapport aux divers mouvemens du plan donné, on réduit les équations différentielles du problème à la forme linéaire, par la transformation dont Lagrange a fait usage dans le cas de la *libration* de la lune, nos 452 et 453

Intégration de ces équations linéaires; leurs intégrales font voir que les oscillations du plan sur lequel le corps s'appuie, s'affaiblissent dans le mouvement de son axe de figure, et deviennent insensibles quand la rotation autour de cette droite est suffisamment rapide; moyen fondé sur ce résultat, qui a été proposé pour obtenir à la mer un horizon artificiel propre aux observations astronomiques, nos 454 et 455

§ II. *Cas où l'on a égard au frottement*, page 282

Lois du frottement d'un corps en mouvement, données par l'expérience, n° 456

Mouvement d'un corps glissant sur un plan fixe horizontal, et entraîné par un poids donné, nos 457 et 458

Intégrale de l'équation de ce mouvement, dans le cas où l'on fait abstraction de la résistance de l'air; détermination du coefficient du frottement par deux moyens différens; quand ce coefficient est connu, et que l'on incline le plan, on détermine immédiatement le mouvement du même corps sur ce plan, nos 459 et 460

Conséquence de cette proposition, que le frottement est indépendant de l'étendue de la surface frottante et proportionnel à la pression totale; en quoi cette loi du frottement consiste réellement; examen de ce qui arriverait si la matière de la surface frottante n'était pas partout la même, n° 461

Double mouvement d'un corps qui glisse sur un plan horizontal, et qui tourne en même temps autour d'un axe vertical, nos 462 et 463

Enoncé des différens cas que peut présenter le mouvement d'un corps solide qui roule sur un plan; frottement de la *première* et de la *seconde espèce*, n° 464

Mouvement d'une sphère qui roule sur un plan horizontal, n° 465

CHAPITRE VII. *Du choc des corps de forme quelconque*, page 290

En quoi consiste le problème du choc des corps, dans le cas le plus général, n° 466

Equations fournies par le principe de D'Alembert, dans le cas de deux corps de forme quelconque et entièrement libres, nos 467 et 468

Indétermination du problème, quand on n'a pas égard à la compressibilité des mobiles; équation nécessaire à sa solution, et qui résulte de cette compressibilité, quelque petite qu'elle soit, n° 469

Modification des formules du n° 468, provenant du degré d'élasticité des mobiles; le problème est complètement résolu dans les deux cas des corps entièrement dénués d'élasticité, et des corps parfaitement élastiques, n° 470

Le choc de deux corps n'altère pas les vitesses de leurs centres de gravité, parallèlement au plan tangent à leurs surfaces, mené par leur point de contact, non plus que les momens de leurs quantités de mouvement, rapportés à leur normale commune, n° 471

Quand cette normale passe par le centre de gravité de l'un des deux corps, son mouvement de rotation autour de ce point est le même avant et après le choc; cas où cette droite passe par les deux centres de gravité; cas où ces points se mouvaient, en outre, sur cette normale avant le choc, nos 472 et 473

Choc de deux corps élastiques égaux en masse; choc d'un corps parfaitement élastique, contre un obstacle fixe; égalité de l'angle de réflexion; cette égalité n'a plus lieu, quand on a égard au frottement du mobile contre le plan fixe, nos 474 et 475

On explique comment on peut tenir compte du frottement d'un mobile contre un autre, pendant la durée du choc de ces deux mobiles, n° 476

Influence du frottement et de la rotation dans le choc d'une sphère contre un plan fixe, tel que le choc d'un boulet contre le terrain; examen des diverses circonstances qui peuvent se présenter, nos 477 et 478

Application des formules générales à un exemple où la normale commune aux deux mobiles ne passe pas par leur centre de gravité; calcul de la quantité de mouvement imprimée à chacun d'eux, et qui mesure l'intensité du choc, n° 479
Modification des formules générales, dans les différens cas où les deux corps qui se choquent ne sont pas entièrement libres, n° 480
Extension de ces formules au cas d'un nombre quelconque de mobiles qui se choquent simultanément. Exemple relatif à une sphère en repos, choquée par deux autres sphères en mouvement, n°s 481 et 482

CHAPITRE VIII. *Exemples du mouvement d'un corps flexible*, page 301

§ Ier *Vibration d'une corde flexible*, *ibid.*

Hypothèses que l'on fait sur cette corde; équations différentielles de son mouvement, n° 483
Réduction de ces équations à la forme linéaire, dans le cas des vibrations très petites; les vibrations *transversales* et les vibrations *longitudinales* coexistent dans une même corde, et sont indépendantes les unes des autres; ces deux sortes de mouvemens dépendent d'une équation de même forme, aux différences partielles du second ordre, n° 484
Intégration de cette équation sous forme finie, n° 485
Détermination des deux fonctions arbitraires contenues dans cette intégrale, pour toute la longueur de la corde, et pour toutes les valeurs du temps, d'après la figure initiale de la corde vibrant transversalement, et les vitesses initiales de tous ses points, n° 486
Construction géométrique de la figure de cette corde à un instant quelconque, n° 487
Lois des vibrations transversales qui résultent de cette construction, et qui ont été confirmées par l'expérience, soit par rapport à la tension de la corde, soit par rapport à son poids et à sa longueur; l'élévation du *ton* est mesurée par le nombre des vibrations dans l'unité de temps, n° 488
Discontinuité des lignes employées dans la construction précédente; restriction qu'on doit apporter à la discontinuité de la courbe qui représente la figure initiale de la corde; cette condition restrictive subsiste pendant toute la durée du mouvement, et fournit une des équations nécessaires au problème, dans le cas d'une corde composée de deux parties de matières différentes, n° 489
Autre solution du problème des cordes vibrantes, dans laquelle l'ordonnée courante de la corde est exprimée par une série de quantités périodiques, n° 490
Cas particuliers où le ton d'une corde s'élève au-dessus du *ton fondamental*, et répond à une partie aliquote de sa longueur; *nœuds de vibrations* qui ont lieu dans ces sortes de cas, n° 491
Lois des vibrations longitudinales d'une corde tendue, n° 492
Rapport très simple entre leur nombre et celui des vibrations transversales de la même corde, n° 493

§ II. *Vibrations longitudinales d'une verge élastique*, page 308

Hypothèses que l'on fait sur cette verge; son mouvement longitudinal dépend de la même équation aux différences partielles que celui de la corde tendue, et ne diffère de celui-ci que par les conditions relatives aux extrémités de la verge, n°s 494 et 495
Solution du problème, analogue à celle du n° 490; lois des vibrations dans les différens cas relatifs aux extrémités; élévation du ton fondamental, à raison des nœuds de vibrations, n° 496
Cas où la verge s'étend indéfiniment; propagation des ondes sonores dans une barre homogène, cylindrique ou prismatique; conditions pour qu'une onde sonore ne se partage pas en deux autres; comment la vitesse constante de cette propagation se conclura du ton longitudinal d'une verge élastique de la même matière que la barre, n°s 497 et 498
Cas où la barre est terminée d'un côté; réflexion du son à cette extrémité; les lois de la propagation et de la réflexion du son dans un canal cylindrique rempli d'air, d'un gaz quelconque, ou d'un liquide, sont les mêmes que dans une barre solide; celles des vibrations des verges élastiques conviennent aussi aux sons des *flûtes*, et des tuyaux d'*orgues*, sauf les modifications relatives à l'embouchure, n° 499

§ III. *Choc longitudinal des verges élastiques*, page 313

Comment on pourra appliquer les formules du n° 496 au choc longitudinal des verges élastiques; ce phénomène consiste dans l'action, à distance insensible, des points extrêmes des deux verges; les vitesses de ces points varieront très rapidement, et seront inconnues pendant la durée du choc, n° 500
Conditions pour que les deux verges se séparent après s'être rencontrées, et que le choc se termine, n°s 501 et 502
Équations communes à tous les points des deux verges, excepté les points extrêmes par lesquels elles se choquent, n° 502
Application des formules du n° 496 au choc de deux verges entièrement libres; sommation des séries périodiques qu'elles renferment; on vérifie qu'elles représentent l'état initial des deux verges, n°s 503 et 504
Les deux verges de même matière et de même diamètre se séparent dans le seul cas où elles ont une même longueur; durée de ce choc; échange

des vitesses primitives; cas où l'une des deux verges est composée de plusieurs parties, dont une se sépare des autres après le choc, n° 505
Choc d'une verge dont l'extrémité est fixe, par une verge entièrement libre; réflexion de celle-ci avec une vitesse égale et contraire à la vitesse primitive, quelles que soient les longueurs des deux verges; durée du choc, nos 506 et 507

§ IV. *Digression sur les intégrales des équations aux différences partielles*, page 318

Le nombre des fonctions arbitraires que renferme l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles, peut être moindre que le nombre qui marque l'ordre de cette équation; il peut changer avec la variable par rapport à laquelle la série est ordonnée; toutes les fonctions arbitraires peuvent disparaître, et se trouver remplacées par des séries infinies de constantes arbitraires; dans ce cas singulier, l'intégrale complète est exprimée par la somme d'un nombre illimité d'intégrales particulières, nos 508 et 509
Exemples très simples de ces diverses transformations, n° 510 et 511
Les séries qui se présentent dans cet exemple, et l'intégrale de l'équation donnée, peuvent s'exprimer sous forme finie, au moyen d'une intégrale définie, n° 512
Valeur d'une intégrale définie qu'on a souvent occasion d'employer, n° 513
Application de ces considérations générales aux équations linéaires relatives à des problèmes de Physique et de Mécanique; leurs intégrales complètes s'expriment, généralement, par des séries d'exponentielles ou de sinus et cosinus, dont les exposans ou les arcs sont proportionnels au temps; par la manière dont elles sont obtenues, on est certain que ces expressions en séries, des inconnues d'un problème, en renferment la solution la plus générale; il y a un procédé uniforme pour déterminer dans chaque cas les coefficiens de ces séries, d'après l'état initial du système; après cette détermination, si l'on fait le temps égal à zéro dans ces séries, on obtient des séries particulières qui représentent les fonctions arbitraires relatives à cet état initial, mais seulement dans l'étendue du système, nos 514, 515, 516 et 517
Toute solution d'un problème dans laquelle on n'a pas vérifié, *à posteriori*, l'exactitude de ces dernières séries, ou démontré, *à priori*, la généralité de l'intégrale en série dont on a fait usage, doit être regardée comme insuffisante, n° 518

§ V. *Vibrations transversales d'une verge élastique*, page 324

On énonce les diverses sortes de vibrations dont une verge élastique est susceptible, et entre lesquelles l'analyse a fait connaître des rapports que l'expérience a confirmés, n° 519
Équation du mouvement transversal, et conditions relatives aux extrémités, n° 520
Calcul du coefficient que renferme cette équation, dans différentes hypothèses sur la section transversale de la verge, n° 521
Intégrale en série de cette équation, n° 522
Détermination des coefficiens de cette série, d'après l'état initial de la verge, par le procédé indiqué dans le n° 516; formules du n° 517, relatives à l'état initial de la verge; cas où elle doit prendre un mouvement de translation ou de rotation, nos 523 et 524
On démontre, dans le cas de la verge libre par ses deux bouts, la réalité des racines de l'équation transcendante qui sert à déterminer les coefficiens du temps sous les sinus et cosinus contenus dans l'intégrale en série, n° 525
Condition pour que la verge exécute des vibrations isochrones; les différens tons que la verge libre peut faire entendre, dépendent des racines de l'équation précédente; toutes choses d'ailleurs égales, ils varient avec la figure de la section transversale, et leur élévation est en raison inverse du carré de la longueur; détermination des *nœuds de vibration* qui leur correspondent, nos 526 et 527
Vibrations isochrones d'une verge *encastrée* par une extrémité, et libre à l'autre bout, n° 528
Calcul du nombre de vibrations correspondant au ton fondamental et aux tons plus élevés, dans le cas de cette dernière verge élastique, et dans le cas de la verge libre aux deux extrémités, n° 529
Comparaison des nombres de vibrations transversales et longitudinales d'une même verge, n° 530

CHAPITRE IX. *Équations et propriétés générales du mouvement d'un système de corps*, page 332

§ Ier. *Équations générales du mouvement*, *ibid.*

Combinaison du principe de D'Alembert et du principe des vitesses virtuelles, n° 531
Elle conduit à une formule générale, d'où l'on déduira, par un procédé uniforme, toutes les équations différentielles du mouvement d'un système de points matériels, dont la liaison mutuelle est exprimée par des équations données; ce procédé fera aussi connaître les tensions des liens physiques, et les pressions sur des surfaces ou sur des courbes données, qui auront lieu pendant le mouvement, n° 532
On indique l'usage de la méthode fondée sur la variation des constantes arbitraires pour la résolution des équations précédentes, n° 533
Cas où l'une des équations, qui expriment la liaison des points du système, est une suite d'une ou de plusieurs autres de ces équations: exemple d'un problème indéterminé, quand on fait abstraction de l'extensibilité des liens physiques, et déter-

miné, quand on y a égard, quelque petite qu'elle soit, nos 534 et 535
Formule analogue à celle du no 532, et relative aux changemens *brusques* de vitesse, no 536
Considération essentielle à laquelle il faudra avoir égard dans les usages qu'on fera de cette formule; comment on tiendra compte, dans cette formule, de l'effet du frottement pendant la durée des changemens brusques; ce serait une erreur d'y introduire les effets des *forces moléculaires*, qui y sont déjà compris implicitement, nos 537 et 538
Équations différentielles du mouvement de translation d'un système entièrement libre, qui sont celles de son centre de gravité, no 539
Équations différentielles du mouvement de rotation du même système; elles conservent la même forme, soit que le centre du mouvement soit un point fixe, ou qu'il soit le centre de gravité du système, nos 540 et 541
Les sommes des quantités de mouvement de tous les points d'un système libre, suivant trois axes rectangulaires, et leurs momens par rapport à ces axes, ne varient pas dans les changemens brusques de vitesse; équations du mouvement initial de translation et de rotation du système; comment on peut les déduire des équations de ce mouvement à un instant quelconque, nos 542 et 543
On retrouve, d'une autre manière, les formules du no 409, relatives aux vitesses de rotation; la similitude de la composition de ces vitesses et de la composition des vitesses de translation, peut conduire à l'analogie entre la composition des momens et celle des forces, no 544
§ II. *Lois générales des petites oscillations*, page 342
Développemens en séries des coordonnées des points du système, et des expressions des forces qui leur sont appliquées, no 545
Formation des équations différentielles linéaires et du second ordre, d'où dépendent les valeurs approchées des inconnues du problème, auxquelles valeurs on s'arrête toujours dans les questions de ce genre; le nombre de ces équations, égal à celui des inconnues indépendantes entre elles, peut s'élever depuis un jusqu'à trois fois le nombre des mobiles; quand les mobiles sont des points matériels en nombre infini, les équations différentielles se changent en équations aux différences partielles, no 546
Intégration générale de ces équations différentielles; conséquences qui s'en déduisent; *principe de la coexistence des petites oscillations*, no 547 et 548
Cas où les oscillations ont lieu dans un milieu résistant, no 549
Exemples de la coexistence des petites oscillations; application du principe précédent au mouvement d'un point pesant sur un ellipsoïde, no 550
Autre théorème général, distinct du précédent, et qu'on peut appeler *principe de la superposition des petits mouvemens*; applications nombreuses de ce principe, nos 551 et 552
§ III. *Principes de la conservation du mouvement du centre de gravité et de la conservation des aires*, page 349
Loi générale de l'*égalité de l'action à la réaction*, no 553
Principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, fondé sur cette loi de la nature; conséquences diverses de ce principe, no 554
Dans le mouvement d'un système de points qui ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, les momens de leurs quantités de mouvement sont constans, par rapport à trois axes qui se coupent, soit en un point fixe, soit au centre de gravité du système, soit en un point animé d'un mouvement rectiligne et uniforme; le même théorème a encore lieu, par rapport à un point fixe, quand les mobiles sont, en outre, sollicités par des forces dirigées vers ce point, nos 555, 556 et 557
Détermination du moment principal de ces quantités de mouvement, et de la direction de son axe, no 558
Dans le mouvement de rotation de la terre, ce moment principal est indépendant du refroidissement du globe, des explosions volcaniques, du souffle des vents, etc.; conséquence qui en résulte relativement à la durée du jour, no 559
Autre énoncé des théorèmes précédens; *principe de la conservation des aires*, no 560
Théorème du *plan invariable*, dans toute sa généralité, no 561
Usage de ce plan et d'une *droite invariable* dont il est accompagné dans le système solaire, no 562
Formules pour déterminer ce plan à un instant quelconque, en ayant égard au mouvement de translation et au mouvement de rotation des corps célestes; les termes qui proviennent du mouvement de rotation dépendent de la constitution intérieure de ces corps, et demeureront toujours inconnus; on fait voir qu'en négligeant la partie variable de ces termes, il n'en résultera aucune erreur que les observations puissent jamais rendre sensible, no 563
Formules du plan invariable, rapportées au centre du soleil, no 564
§ IV. *Principes des forces vives et de la moindre action*, page 357
Équation et énoncé du principe des forces vives, no 565
Conséquences immédiates de ce principe, no 566
Calcul des forces vives dues aux forces qui émanent des centres fixes, aux attractions et répulsions mutuelles des corps du système, et à leurs poids, no 567

Variation des forces vives dues aux pressions contre des surfaces mobiles, et aux frottemens; à l'égard de ces forces, le théorème du n° 565 n'a plus lieu; on fait voir que les frottemens et les résistances des milieux produisent toujours des diminutions de force vive, qui finissent par anéantir le mouvement du système, quand ces pertes ne sont pas réparées par d'autres forces, n° 568 et 569

Comment la force vive absolue d'un système se déduit de la force vive due aux vitesses de ses différentes parties dans leur mouvement relatif autour du centre de gravité; application de l'équation générale du principe des forces vives au système solaire; usage de cette équation pour reconnaître si l'action des comètes a une influence sensible sur les mouvemens des autres corps célestes, n° 570

La proposition relative à la stabilité de l'équilibre qu'on a supposée dans le n° 347, est maintenant démontrée, à l'aide du principe des forces vives, n° 571

Équation relative aux changemens brusques de vitesse, et analogue à l'équation du principe des forces vives; vérification de cette équation dans le mouvement initial d'un corps solide autour d'un point fixe, n° 572

Au moyen de cette équation, on démontre qu'il y a toujours perte de force vive dans le choc des corps dénués d'élasticité, augmentation dans les explosions qui séparent les parties des corps, et invariabilité dans le choc des corps parfaitement élastiques, n° 573

Énoncé général du principe de la moindre action; ce principe, en cela différent des précédens, ne fait connaître aucune intégrale des équations différentielles du mouvement; résumé des intégrales qui sont fournies par les principes de la conservation du mouvement du centre de gravité, de la conservation des aires et des forces vives, n° 574

LIVRE CINQUIÈME.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE Ier. *Notions préliminaires*, page 366

Objet de l'*Hydrostatique*; comment on y considérera les fluides, n° 575

Distinction entre les liquides, les fluides aériformes et les vapeurs, n° 576

Propriété caractéristique des fluides, que l'on prendra pour une donnée de l'expérience, et qui servira de base à l'Hydrostatique, n° 577

Explication détaillée de cette propriété; définition de la pression rapportée à l'unité de surface, n°s 578 et 579

Démonstration du principe des vitesses virtuelles dans l'équilibre d'un liquide, n° 580

Pression exercée par un fluide élastique, n° 581

CHAPITRE II. *Equations générales de l'équilibre des fluides*, page 370

Formation des équations générales, qui sont au nombre de trois, entre la pression intérieure et les forces données, n°s 582 et 583

Condition à laquelle ces forces doivent satisfaire, pour que l'équilibre soit possible; équation différentielle de la surface libre d'un fluide, n° 584

Propriété de cette surface; définition des surfaces et des couches de niveau, n° 585

Équilibre d'un liquide homogène soumis à des attractions dirigées vers des centres fixes, n° 586

Condition relative aux surfaces de niveau d'un liquide hétérogène ou d'un fluide élastique, n° 587

Lois de la densité et de la pression dans un fluide élastique en équilibre, n° 588
Cas où les forces qui agissent sur les points d'un fluide sont leurs actions mutuelles; parmi ces forces, on ne doit pas tenir compte de celles qu'on appelle proprement *forces moléculaires*, et qui produisent la pression à laquelle on a déjà eu égard dans les équations générales de l'Hydrostatique; ces équations sont *nécessaires* et *suffisantes* pour l'équilibre des fluides, n° 589
Figure constante d'un fluide qui tourne autour d'un axe fixe, ou équilibre des forces qui le sollicitent et des forces centrifuges provenant de la rotation, n° 590
Figure d'un liquide pesant, contenu dans un vase qui tourne d'un axe vertical, n° 591
La figure elliptique de révolution satisfait à l'équilibre d'un liquide homogène, tournant autour d'un axe fixe et soumis à l'attraction mutuelle de ses points en raison inverse du carré de la distance, pourvu que la vitesse de rotation ne dépasse pas une certaine limite; en deçà de cette limite il y a toujours deux aplatissemens de l'ellipsoïde, qui répondent à une vitesse donnée; au delà, la figure elliptique est impossible; mais ce n'est que quand on suppose l'aplatissement très petit, qu'il est démontré que la figure elliptique soit la seule qui convienne à l'équilibre, n° 592
Application des formules du numéro précédent; cas où le rapport de la force centrifuge à l'attraction totale, qui a lieu à l'équateur, est une très petite fraction, comme dans le mouvement de rotation de la terre, n° 593
Différence essentielle entre les couches de niveau dans un fluide soumis à l'action mutuelle de ses différens points, et dans un fluide dont les points sont sollicités par des forces dirigées vers des centres fixes et donnés, n° 594
Équilibre d'un fluide dont les points s'attirent proportionnellement à leurs distances mutuelles, n° 595

CHAPITRE III. *De l'équilibre des fluides pesans*, page 380

Équilibre d'un liquide homogène contenu dans un vase; la pression sur le fond du vase est indépendante de sa forme, n° 596
Équilibre de plusieurs liquides superposés; valeur de la pression sur le fond du vase, n° 597
Lois de l'équilibre des liquides contenus dans des vases communiquans, n° 598
Énumération des applications principales dont ces lois sont susceptibles; *siphon, presse hydraulique, baromètre, pompe*, n° 599
Pression exercée par un liquide sur une paroi plane inclinée; le centre de pression est toujours plus bas que le centre de gravité, n° 600
Exemples de la détermination du centre de pression, n° 601
Pression exercée sur un corps plongé dans un liquide; les pressions horizontales se détruisent; résultante des pressions verticales, n°s 602, 603, 604
Perte de poids d'un corps pesé dans un fluide; détermination de la pesanteur spécifique, au moyen de la balance hydrostatique, n° 605
Pression exercée par un liquide sur la surface entière du vase qui le contient; principe des *machines à réaction*, n° 606

CHAPITRE IV. *De l'équilibre et du mouvement des corps flottans;* page 387

Conditions de l'équilibre d'un corps flottant; problème de géométrie auquel se réduit la détermination des positions d'équilibre d'un corps homogène, n° 607
Solution complète de ce problème, dans le cas d'un prisme triangulaire couché horizontalement, n°s 608 et 609
Cas où la base de ce prisme est un triangle isocèle; cas où elle est un triangle équilatéral, n°s 610 et 611
Équilibre d'un prisme, d'un cylindre et d'un solide de révolution, dans une situation verticale; usage des *pèse-liqueurs*, n° 612
Règle du *métacentre* pour s'assurer, dans un cas particulier de la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant, n° 613
Application du principe des forces vives au mouvement d'un corps flottant de forme quelconque, très peu écarté d'une position d'équilibre: condition générale de la stabilité de cet équilibre, n°s 614, 615, 616 et 617
Détermination des petites oscillations d'un corps flottant, symétrique par rapport à une section verticale; oscillations verticales du centre de gravité; oscillations du corps autour d'un axe passant par ce point et perpendiculaire à cette section, n°s 618 et 619

CHAPITRE V. *De la mesure des hauteurs par l'observation du baromètre*, page 396

La pression barométrique est égale au poids de la colonne d'air supérieure; sa diminution fera connaître la hauteur verticale de l'élévation, n° 620
Masse totale de l'atmosphère comparée à celle de la terre; limite de la hauteur de l'atmosphère; décroissement de la température à mesure qu'on s'élève au-dessus de la terre, n° 621
Manomètre; usage qu'on pourrait faire de cet instrument pour comparer les intensités de la pesanteur à différentes latitudes, n° 622
A température égale, la densité d'un fluide élastique est proportionnelle à la pression qu'il éprouve, ce qui constitue la loi de *Mariotte*, n° 623
Usage de cette loi pour calculer l'élévation de l'eau

dans une pompe, quand il se trouve de l'air au-dessous du piston, n° 624
Dilatation égale et uniforme de tous les gaz par les vapeurs, pour des degrés égaux de température, mesurés sous une pression constante par le thermomètre à air; coefficient de la dilatation pour chaque degré; ce coefficient, commun à tous les fluides élastiques, n'est pas rigoureusement constant, quand la température est mesurée par un thermomètre à mercure; équation qui donne la pression en fonction de la densité et de la température; calcul du rapport de la pression à la densité, dans l'air parfaitement sec et dans l'air au *maximum* d'humidité, pour la température zéro, n°s 625 et 626
Équation d'équilibre d'une colonne verticale de l'atmosphère; loi de la pression et de la densité; on vérifie que le poids total de la colonne est équivalent à la pression inférieure, n° 627
Mouvement d'un ballon qui s'élève dans l'air, n° 628
Formule pour la mesure des hauteurs par l'observation du baromètre; le coefficient constant de cette formule s'accorde avec la moyenne d'un grand nombre de hauteurs mesurées trigonométriquement, n° 629
Modification qu'on doit faire subir à cette formule, d'après la remarque du n° 255, quand on veut la faire servir à calculer la hauteur d'un lieu au-dessus du niveau de la mer; exemple de ce calcul, n° 630
Formule moins exacte, mais plus simple que la précédente, et qui suffit aux usages ordinaires; comment on peut substituer à l'observation du baromètre, celle du degré de l'ébullition de l'eau à différentes hauteurs, n° 631
Remarques relatives à la densité et à la force élastique ou tension des vapeurs; formule qui donne la densité de l'air mouillé; d'après la tension de la vapeur qu'il renferme, et la densité de l'air parfaitement sec, n° 632
Comparaison de l'atmosphère aqueuse qui se formerait, si notre atmosphère n'existait pas, à la quantité de vapeur d'eau que notre atmosphère peut contenir, n° 633

CHAPITRE VI. *De la force élastique et de la chaleur des gaz*, page 407

Cas où l'on a besoin de connaître les variations de la pression et de la température d'un gaz, produites par celles de la densité, sans que la quantité de chaleur varie, n° 634
Définition de la chaleur spécifique, soit à volume constant, soit à pression constante; équation aux différences partielles d'où dépend la quantité de chaleur en fonction de la pression et de la densité, n° 635
Expérience propre à déterminer l'accroissement de température d'un gaz, correspondant à une petite condensation sans perte de chaleur; calcul numérique de cet accroissement de température, qui peut aussi se déduire de la vitesse du son, n° 636
Comment cet accroissement de température est lié au rapport des deux chaleurs spécifiques du gaz; valeurs différentes de ce rapport, données par l'expérience; on le regarde comme indépendant de la température et de la pression dans l'air atmosphérique, n°s 637 et 638
Intégration de l'équation du n° 635, dans l'hypothèse de ce rapport constant; lois de la pression et de la température en fonctions de la densité, quand la quantité de chaleur est invariable, n° 639
Expression de la quantité de chaleur en fonction de la température et de la densité, dans l'hypothèse que la chaleur spécifique du gaz est indépendante de la température mesurée par un thermomètre à air; chaleur spécifique en fonction de la pression; application à l'air atmosphérique; rapport des quantités de chaleur perdue, par un même volume d'air, sous différentes pressions; ce rapport est confirmé par l'expérience, n° 640
Application des formules précédentes à la vapeur d'eau; remarque relative aux machines à vapeur à hautes pressions, n°s 641 et 642
Mouvement du piston dans une machine à vapeur; état de la vapeur à un instant quelconque; calcul de la force vive produite par la chute ou l'élévation du piston; *détente* de la vapeur, n° 643
La force élastique du mélange de plusieurs gaz est égale à la somme des forces élastiques de ces fluides; équation qui détermine la chaleur spécifique du mélange, d'après celles des gaz mélangés, en proportion donnée; le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant, ne peut pas être indépendant de la pression dans les gaz mélangés, n°s 644 et 645

LIVRE SIXIÈME.

HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE Ier. *Équations générales du mouvement des fluides*, page 412

Objet de l'*hydrodynamique*; observation relative à la propriété caractéristique des fluides, sur laquelle sont fondées les équations générales de l'équilibre des fluides; comparaison entre cette propriété et la loi de *Mariotte*; on admettra, dans ce traité, que cette propriété a lieu dans l'état de mouvement, n° 646

Expressions des composantes de la vitesse du fluide, en un point et à un instant quelconques; accroissemens infiniment petits de ces composantes pour un même point du fluide; accroissement de la densité, et, généralement, d'une fonction quelconque du temps et des trois coordonnées considérées comme des fonctions du temps, n° 647

Équations différentielles du mouvement des fluides qui se déduisent de celles de leur équilibre, par le principe de D'Alembert; équation relative à la surface libre d'un fluide en mouvement, n° 648

Quatrième équation du mouvement des fluides; sa décomposition en deux autres, dans le cas des liquides; valeur de la pression en fonction de la température et de la densité, dans le cas des fluides élastiques, nos 649 et 650

Dans un liquide en mouvement dont la température varie d'un point à un autre et avec le temps, la distribution de la chaleur dépend de la même équation que dans un corps solide hétérogène; dans un fluide élastique, cette équation doit être remplacée par une autre, dont on indique la formation, n° 651

On explique pourquoi la quatrième équation du mouvement des fluides s'appelle *équation de la continuité*; exemples de mouvemens dans lesquels elle n'a pas lieu, n° 652

Conditions relatives à la superficie des fluides, que l'on a coutume d'ajouter aux équations de leur mouvement, dans les différens problèmes d'hydrodynamique, n° 653

Réduction des équations du mouvement des fluides à un moindre nombre et à une forme plus simple, dans un cas très étendu, n° 654

On démontre, *en général*, que si la condition nécessaire pour que cette réduction ait lieu, se vérifie à l'origine du mouvement, elle sera satisfaite pendant toute sa durée, n° 655

Mouvement d'un liquide qui tourne, sans changer de figure, autour d'un axe fixe; on retrouve, d'après les équations générales de l'hydrodynamique, l'équation de la surface qu'on avait déduite précédemment (n° 590) de l'équilibre des forces centrifuges, jointes aux forces motrices des points du fluide, n° 656

CHAPITRE II. *De la propagation du son*, page 421

Indication des ouvrages où l'on trouvera les principaux résultats qui ont été déduits, jusqu'à présent, des équations générales du mouvement des fluides, n° 657

Équation générale aux différences partielles, d'où dépend la théorie du son, dans la supposition du n° 654, qui convient aux deux cas particuliers qu'on va considérer, n° 658

Cas où l'air est contenu dans un tuyau cylindrique; le mouvement est le même que suivant la longueur d'une verge élastique; comment les différens tons d'un instrument à vent peuvent servir à déterminer le rapport des chaleurs spécifiques à volume constant et sous une pression constante, pour les différens gaz que l'on fait vibrer dans cet instrument, n° 659

Propagation du son à l'air libre, dans le cas où le mouvement est semblable en tous sens autour du centre de l'ébranlement; intégration, sous forme finie, de l'équation relative à ce mouvement; détermination des deux fonctions arbitraires qu'elle renferme, nos 660 et 661

La vitesse de cette propagation est la même que dans un tuyau cylindrique; intensité du son à une grande distance du lieu de l'ébranlement; elle dépend, toutes choses d'ailleurs égales, de la densité de l'air en cet endroit; à quoi l'on doit attribuer, suivant Euler, la différence d'une syllabe à une autre, chantées avec la même force et sur le même ton, n° 662

Coexistence des sons dans un air ébranlé simultanément en plusieurs endroits, n° 663

Réflexion du son sur un plan fixe, qui s'étend indéfiniment en tous sens, n° 664

Calcul numérique de la vitesse du son dans l'air; comparaison du résultat de ce calcul à celui de l'observation, n° 665

Différence entre les formules de la vitesse du son,

données par Newton et par Laplace; cause de la propagation du son dans les vapeurs au *maximum* de densité, n° 666
Vitesse de la propagation du son dans l'eau, n° 667

CHAPITRE III. *Du mouvement des fluides dans une hypothèse particulière*, page 429

On explique en quoi consiste cette hypothèse, qui ne peut conduire qu'à une solution approximative; elle est connue sous la dénomination d'*hypothèse du parallélisme des tranches*; elle réduit le problème à la détermination de deux inconnues, savoir, la pression et la vitesse de chaque tranche, n° 668
Formules qui feront connaître ces deux inconnues, en un point quelconque du vase d'où le liquide s'écoule par un orifice horizontal, lorsque l'on connaîtra la vitesse qui a lieu à cet orifice, n°s 669 et 670
Équations différentielles d'où dépend cette vitesse et la hauteur du niveau du liquide au-dessus de l'orifice, n° 671
Solution complète du problème, et calcul de la *dépense* du fluide, dans le cas où le niveau du liquide est entretenu à une hauteur constante, n° 672
Cas où le niveau est variable; application au mouvement de l'eau qui sort d'un cylindre, par un orifice horizontal, n°s 673 et 674
Examen particulier du cas où l'orifice est très petit; théorème relatif à la vitesse du fluide à cet orifice, horizontal ou incliné, n°s 675 et 676
La dépense observée s'écarte beaucoup de celle qui résulterait de ce théorème, dans le cas de l'orifice en *mince paroi*; explication qu'on donne de cette différence; *contraction* de la veine fluide; augmentation de la dépense produite par un *ajutage*, n° 677
Mouvement d'un fluide élastique qui sort d'un vase par un orifice, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches; vitesse de l'écoulement; cas où l'orifice est très petit, n°s 678 et 679

ADDITION

Relative à l'usage du principe des forces vives dans le calcul des machines en mouvement.

Objet de cette *addition*, n° 680
Définition des forces *mouvantes* et des forces *résistantes*; équation différentielle suffisante pour déterminer le mouvement d'une machine; transformation de cette équation, dans laquelle ces deux sortes de forces sont distinguées l'une de l'autre, n°s 681 et 682
Équation du principe des forces vives, sous la forme où on l'emploie dans le calcul des machines en mouvement; définition de la *quantité de travail élémentaire*, du *travail moteur* et du *travail résistant*, n° 683
Quantité de travail due à la chute ou à l'élévation d'un poids; *unité dynamique*; mesures d'une quantité de travail et d'une force vive quelconques, en unités dynamiques, n° 684
Équations qui ont lieu quand une machine part du repos et quand elle est parvenue à un état permanent; considération du frottement et des autres résistances; effet général d'une machine, n° 685
Définition et usage du *volant* dans les machines, n° 686
Effets nuisibles des chocs et des changemens brusques de vitesse dans les machines, n° 687
La diminution graduelle de la force vive, due aux frottemens et aux résistances des milieux, peut aussi être produite par la communication d'une partie du mouvement aux supports de la machine; exemple de cet effet; ces diverses causes détruisent totalement la force vive, et finissent par réduire les machines au repos, quand les forces mouvantes ont cessé d'agir, n° 688
Notion relative à la quantité de travail d'un homme ou d'un animal marchant et portant ou traînant un fardeau, sur une route horizontale ou inclinée, n° 689
Distinction des vitesses communes et des vitesses relatives des différens points d'une machine en mouvement, n° 690
Transformation de la formule générale du n° 532, dans laquelle on distingue entre elles les différentes sortes de forces qui agissent sur les points d'un système quelconque, n° 691
Application de cette formule transformée aux cas où l'on prend successivement pour les déplacemens de ces points, ceux qui résultent de leurs vitesses absolues, et ceux qui résultent de leurs vitesses relatives, n°s 692 et 693
Équation des forces vives dues aux vitesses relatives des points d'une machine; équation résultante de la combinaison de celle des forces vives dues aux vitesses absolues, et de celle des forces vives dues aux vitesses relatives; autre équation qui se déduit de la précédente dans un cas particulier, et qu'on peut regarder comme évidente en elle-même, n°s 694 et 695
Application de cette dernière équation au choc d'un corps solide contre un plan; et à la pression d'un corps pesant contre un plan animé d'une vitesse donnée, n° 696
Usage de cette même équation, pour déterminer la pression d'une veine fluide en mouvement contre un plan incliné ou perpendiculaire à sa direction, en mouvement ou en repos, n° 697

FIN DE LA TABLE.

AVERTISSEMENT.

Cet ouvrage pouvant servir à l'enseignement, j'ai dû entrer souvent dans des détails minutieux, et suivre, pour l'exposition des matières, l'ordre le plus propre à en faciliter l'intelligence. La marche que j'ai adoptée est celle que l'on suit maintenant dans les cours de Mécanique de l'École Polytechnique. On s'en formera une idée précise, en parcourant la table analytique des matières à la fin de ce volume. Je me suis aussi attaché à multiplier les exemples nécessaires pour éclaircir les théories générales; ceux que j'ai choisis ont été pris, surtout, dans l'Astronomie et la Physique, et quelques-uns dans l'Artillerie.

Sa destination principale est de servir d'introduction à un *Traité de Physique mathématique*, dont la *Nouvelle théorie de l'Action capillaire*, que j'ai publiée il y a un an, est déjà une partie; les autres parties se composeront des différens Mémoires que j'ai écrits, soit sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques et des fluides, soit sur les fluides impondérables, et que je me propose de réunir et de rendre aussi complets qu'il me sera donné de le faire.

On trouvera, à la fin de l'ouvrage, une *addition* relative à l'usage du *principe des forces vives* dans le calcul des machines en mouvement.

TRAITÉ

DE MÉCANIQUE.

INTRODUCTION.

1. La *matière* est tout ce qui peut affecter nos sens d'une manière quelconque.

Les *corps* sont des portions de matière limitées en tous sens, et qui ont, par conséquent, une *forme* et un *volume* déterminés. On apelle *masse* d'un corps, la quantité de matière dont il est composé.

Un *point matériel* est un corps infiniment petit dans toutes ses dimensions; en sorte que la longueur de toute ligne comprise dans son intérieur, est infiniment petite, c'est-à-dire, moindre que toute longueur qu'on puisse assigner. On peut regarder un corps de dimensions finies, comme un assemblage d'une infinité de points matériels, et sa masse comme la somme de toutes leurs masses infiniment petites.

2. Un corps est en *mouvement*, lorsque ce corps ou ses parties occupent successivement différens lieux dans l'espace. Mais l'*espace* étant infini et partout identique, nous ne pouvons juger de l'état de mouvement ou de repos d'un corps, qu'en le comparant à d'autres corps ou à nous-mêmes; et, pour cette raison, tous les mouvemens que nous observons sont nécessairement des mouvemens relatifs.

Tous les corps sont *mobiles;* mais la matière ne se meut jamais spontanément; car il n'y aurait pas de raison pour qu'un point matériel se dirigeât plutôt d'un côté que de l'autre; et, en effet, si nous considérons un corps à l'instant où il passe de l'état de repos à l'état de mouvement, nous reconnaissons toujours que ce changement est dû à l'action d'une cause étrangère ou sans laquelle nous concevons que ce corps pourrait d'ailleurs exister.

On donne, en général, le nom de *force* à la cause quelconque qui met un corps en mouvement, ou seulement qui tend à le mouvoir, lorsque son effet est suspendu ou empêché par une autre cause.

3. Lorsque plusieurs forces sont appliquées à la fois à un même corps, elles se modifient réciproquement, en vertu de la liaison qui existe entre ses parties, et qui les empêche de prendre le mouvement que tend à imprimer à chacune d'elles, la force à laquelle elle est soumise. Il peut même arriver que ces forces se détruisent complètement, de sorte que le corps ne prenne aucun mouvement : on appelle *équilibre* cet état particulier d'un mobile qui reste en repos quoiqu'il soit sollicité par plusieurs forces, ou autrement, on dit que ses forces se font *équilibre*.

La *Mécanique* est la science qui traite de l'équilibre et du mouvement des corps. La partie dont le but est, en général, de découvrir les conditions de l'équilibre, se nomme *Statique*. On appelle *Dynamique* l'autre partie, qui a pour objet de déterminer le mouvement que prend un mobile, quand les forces qui lui sont appliquées ne se font pas équilibre.

Les géomètres étant parvenus, comme on le verra dans la suite, à réduire toutes les questions de mouvement à de simples problèmes d'équilibre, il serait naturel d'exposer d'abord la Statique entière et ensuite la Dynamique; mais, pour faciliter l'intelligence des matières, il a paru préférable, dans l'enseignement, de s'occuper de la partie la plus simple de la Dynamique, avant de considérer les questions générales de l'équilibre. C'est cet ordre que je suivrai dans cet ouvrage.

4. Il y aura trois choses à considérer dans une force agissant sur un point matériel : la position de ce point, l'intensité de la force et sa direction, c'est-à-dire, l'espace rectiligne qu'elle tend à faire parcourir à son point d'application. Toutefois, on ne doit pas confondre un point matériel avec ce qu'on appelle un *point* en Géométrie, où ce mot désigne l'extrémité d'une ligne, ou l'intersection de deux lignes qui se coupent; l'espace

que parcourt un point matériel n'est pas non plus une ligne privée de deux dimensions; mais ce corps étant infiniment petit en tous sens, et la largeur et l'épaisseur de l'espace que la force tend à lui faire décrire, étant aussi infiniment petites, on déterminera sa position et la direction de cette force, de la même manière que l'on détermine la position d'un point et la direction d'une droite en Géométrie.

Ainsi, d'abord, la position dans l'espace, du point d'application d'une force, se déterminera, en général, au moyen de ses trois coordonnées parallèles aux intersections de trois plans rectangulaires; ce qui, comme on sait, ne laissera aucune indécision, quand on aura égard, en même temps, au signe et à la grandeur de chaque coordonnée. Quelquefois aussi, nous emploierons les coordonnées polaires, savoir : le rayon vecteur du point donné, ou sa distance à leur origine, l'angle que fait ce rayon avec une droite fixe menée par cette origine, et l'angle compris entre le plan de ces deux droites et un plan fixe passant par la seconde.

5. Les forces ne peuvent se mesurer qu'en prenant pour *unité* une force convenue, et en exprimant par des nombres les rapports des autres forces à cette unité; ce qui exige que l'on définisse, d'une manière précise, ce que l'on doit entendre par une force égale à une autre, et par une force double, triple, quadruple,... d'une autre, indépendamment de la nature particulière de ces diverses causes de mouvement.

Deux forces sont *égales* lorsqu'étant appliquées en sens contraire l'une de l'autre, à un même point matériel ou à deux points liés par une droite qui ne peut changer de longueur, elles se font équilibre.

Si, après avoir reconnu que deux forces sont égales, on les applique dans la même direction à un même point, on aura une force *double*; si l'on réunit ainsi trois forces égales, on aura une force *triple*; si l'on en réunit quatre, on aura une force *quadruple*; et ainsi de suite.

Lors donc que nous dirons qu'une force, appliquée à un point matériel, est un certain multiple d'une autre force, il faudra entendre que la première peut être regardée comme formée d'un certain nombre de forces reconnues égales à la seconde, et agissant dans une même direction. C'est de cette manière que les forces deviennent, quelle que soit leur nature particulière, des quantités mesurables que l'on peut exprimer par des nombres, comme toutes les autres sortes de quantités, en les rapportant à une unité de leur espèce. On peut aussi représenter leurs intensités par des lignes proportionnelles à ces nombres, que l'on porte sur leurs directions, à partir du point où elles sont appliquées; ce qui a l'avantage de simplifier l'énoncé des théorèmes.

6. Les points d'application des forces et leurs intensités étant ainsi déterminés, il ne nous reste plus qu'à nous occuper de leurs directions.

Soit M (fig. 1re), le point d'application d'une force; représentons sa direction par la droite MD, de manière que cette force tende à faire avancer le point M, de M vers D; par le point M menons trois axes rectangulaires MA, MB, MC, qui seront, en général, parallèles aux axes des coordonnées, et dirigés dans le sens des coordonnées positives; désignons par α, β, γ, les angles aigus ou obtus que la direction MD fait avec ces axes, de sorte qu'on ait

$$AMD = \alpha, \quad BMD = \beta, \quad CMD = \gamma;$$

je dis que cette direction sera complètement déterminée quand ces trois angles seront donnés.

En effet, en ayant seulement égard aux deux angles α et β, il faudra que la ligne MD se trouve à la fois sur deux cônes droits, dont le sommet commun est au point M, et qui ont pour axes les droites MA et MB. Il faudra donc que α et β soient tels, que ces deux cônes puissent se couper; ce qui aura lieu alors suivant deux arrêtes situées dans un même plan perpendiculaire au plan AMB, et qui feront, avec l'axe MC, deux angles supplémens l'un de l'autre. La droite MD pourra donc encore avoir deux positions différentes; mais l'angle γ étant aussi donné, on saura s'il est aigu ou obtus, et l'on pourra choisir entre ces deux positions celle qui convient à la direction de la force.

Cette construction montre, en outre, que les angles α, β, γ, ne peuvent pas être pris tous les trois au hasard. Il existe effectivement entre les cosinus des angles qu'une même droite MD fait avec trois axes rectangulaires, une équation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (1)$$

que l'on démontre en prenant sur la droite MD, à partir du point M, une ligne égale à l'unité, et formant un parallélépipède rectangle, dont cette ligne soit la diagonale, et qui ait ses trois côtés adjacens sur les trois axes MA, MB, MC. Ces trois côtés seront les cosinus des angles α, β, γ; et la somme de leurs carrés devant être égale au carré de la diagonale, d'après un théorème connu, il en résultera l'équation qu'on vient d'écrire.

7. On adoptera, dans ce traité, la division de la circonférence en 360°, du degré en 60 minutes et de la minute en 60 secondes. La lettre π sera constamment employée à représenter la demi-circonférence, dont le rayon est égal à l'unité; de sorte que l'on aura

$$\pi = 3,1415926...$$

Le quart de la circonférence répond à l'angle droit ou à l'angle de 324000''; il s'ensuit que la longueur de l'arc correspondant à un angle d'un nombre quelconque n de secondes, sera le quatrième terme d'une proportion, dont les trois

premiers seront $1/2\,\pi$, n et $324000''$. En désignant cette longueur par ϖ, il en résultera

$$\varpi = \frac{n}{206264,8\ldots}.$$

Le logarithme ordinaire de ce diviseur constant est

$$5,3144251.$$

Dans les calculs numériques, ce sont les arcs ainsi calculés qu'on devra employer à la place des angles qui ne seront pas compris sous les signes trigonométriques *sin*, *cos*, *tang*.

Pour qu'on puisse, au moyen des angles α, β, γ, représenter la direction d'une force dans toutes les positions possibles autour de son point d'application, il faudra et il suffira qu'ils s'étendent depuis zéro jusqu'à 180° inclusivement. Si, par exemple, l'axe MC est au-dessus du plan de deux autres axes MA et MB, l'angle γ devra être plus petit ou plus grand que 90°, selon que la droite MD sera située au-dessus ou au-dessous de ce plan; il sera zéro quand la direction MD coïncidera avec MC, et égal à 180° quand MD coïncidera avec le prolongement MC′ de MC. Les cosinus de α, β, γ, pourront donc être positifs ou négatifs; mais leurs sinus seront toujours positifs, puisque ces angles ne dépasseront jamais 180°.

En général, si nous considérons le prolongement MD′ de la droite quelconque MD, il est évident que les angles qu'il fait avec les trois axes sont supplémens de α, β, γ. En faisant donc

$$AMD' = \alpha',\ BMD' = \beta',\ CMD' = \gamma',$$

nous aurons

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha,\ \cos\beta' = -\cos\beta,\ \cos\gamma' = -\cos\gamma;$$

d'où il suit que les directions de deux forces qui agissent en sens contraire sur un même point M, l'une suivant MD, l'autre suivant MD′, se distingueront l'une de l'autre par les signes des cosinus des angles qui leur correspondent.

8. Au lieu des trois angles α, β, γ, liés entre eux par l'équation (1), on pourra n'employer que deux angles indépendans l'un de l'autre, pour déterminer la direction d'une force.

En effet, soit ME la projection de MD sur le plan AMB; appelons δ l'angle que fait cette projection avec l'axe MA, de sorte qu'on ait

$$AME = \delta.$$

Lorsque cet angle δ sera donné, il fera connaître la position du plan CME, et l'angle γ achèvera ensuite de déterminer celle de la droite MD comprise dans ce plan. Il faudra que l'angle δ soit compté, à partir de MA, dans un sens convenu, et qu'il puisse s'étendre depuis zéro jusqu'à 360°; l'angle γ ne s'étendra toujours que depuis zéro jusqu'à 180°.

La projection sur le plan AMB de la diagonale du parallélépipède précédemment indiqué (n° 6) sera le cosinus de l'angle DME, ou égale à sin. γ. Si l'on projette de nouveau cette projection sur l'axe MA, cette seconde projection se déduira de la première, en la multipliant par cos δ; elle coïncidera, d'ailleurs, avec la projection de la diagonale du parallélépipède sur ce même axe MA, et sera, conséquemment, égale à cos α; par conséquent, on aura

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\delta.$$

On trouvera de même

$$\cos\beta = \sin\gamma\sin\delta;$$

et ces deux formules serviront à transformer les équations où l'on aura fait usage des angles α, β, γ, en d'autres où l'on n'emploiera plus que γ et δ. On vérifie immédiatement qu'elles satisfont à l'équation (1).

9. Il existe une autre équation qui comprend, comme cas particulier, cette équation (1), et qui nous sera souvent utile.

Pour la former, soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque M (fig. 2) rapportées aux trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Appelons r son rayon vecteur OM, et α, β, γ, les angles aigus ou obtus que fait ce rayon avec les trois axes, de sorte qu'on ait, par exemple,

$$zOM = \gamma.$$

Si l'on abaisse du point M une perpendiculaire MN sur l'axe Oz, la droite ON sera l'ordonnée z, et dans le triangle rectangle MON, on aura

$$z = r\cos\gamma;$$

on trouvera de même

$$y = r\cos\beta,\quad x = r\cos\alpha.$$

Soit M′ un autre point, et désignons par x', y', z', r', α', β', γ', ses coordonnées, son rayon vecteur et les angles relatifs à cette droite; nous aurons aussi

$$x' = r'\cos\alpha',\quad y' = r'\cos\beta',\quad z' = r'\cos\gamma'.$$

Appelons u la distance MM′; on aura, comme on sait,

$$u^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

et si l'on représente par ε l'angle MOM′, on aura en même temps

$$u^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varepsilon,$$

dans le triangle dont r, r', u, sont les trois côtés. A cause de

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$

la première valeur de u^2 est la même chose que

$$u^2 = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz');$$

en la comparant à la seconde, on en conclura

$$rr'\cos\varepsilon = xx' + yy' + zz';$$

et si l'on substitue dans cette équation les valeurs précédentes de x, y, z, x', y', z', il en résultera

$$\cos i = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' ; \quad (2)$$

ce qu'il s'agissait de trouver.

Lorsque les deux droites OM et OM' coïncident, les angles α', β', γ', sont les mêmes que α, β, γ, et cette formule se réduit à l'équation (1). Quand ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a $i = 90°$, et par conséquent

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0.$$

En mettant dans les valeurs de x, y, z, celles de $\cos \alpha$ et $\cos \beta$, qu'on a trouvées dans le numéro précédent, on aura

$$x = r \sin \gamma \cos \delta, \quad y = r \sin \gamma \sin \delta, \quad z = r \cos \gamma;$$

formules dans lesquelles les trois variables r, γ, δ, sont les trois coordonnées polaires du point M, telles qu'elles ont été définies dans le n° 4, et qui serviront, par conséquent, à transformer les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires.

10. La considération des projections dont on s'est servi dans le n° 8, sera souvent employée dans cet ouvrage; il convient donc d'exposer ici leurs premiers principes.

La *projection* d'une droite sur une autre droite est la partie de celle-ci qui est comprise entre les pieds des perpendiculaires abaissées des deux extrémités de la droite projetée. Ainsi, les différences $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, des coordonnées extrêmes sont les projections de la droite MM' sur les axes des x, y, z; et d'après la première valeur de m^2, la somme des carrés des projections d'une même droite sur les trois axes rectangulaires est égale au carré de cette droite. Si la droite projetée et celle sur laquelle on la projette sont dans un même plan, la projection est égale et parallèle à la base d'un triangle rectangle, dont la droite projetée est l'hypoténuse; en sorte que si l'on désigne par l la longueur de cette droite, par λ celle de sa projection, et par i l'angle de ces deux droites, on a

$$\lambda = l \cos i$$

La projection d'une surface plane sur un autre plan, est la partie de ce plan terminée par la projection du contour de la surface projetée, c'est-à-dire, par la courbe que forment les pieds des perpendiculaires abaissées de tous les points de ce contour. Or, l'équation précédente subsiste encore, si l'on y met à la place de l l'aire de la surface projetée, et au lieu de λ l'aire de sa projection; i étant alors l'inclinaison d'un plan sur l'autre, pour laquelle on peut aussi prendre l'angle compris entre les perpendiculaires à ces deux plans.

En effet, décomposons l'air de la surface projetée en élémens d'une largeur infiniment petite et perpendiculaires à l'intersection de son plan et de celui [illegible] on la projette; la projection de chaque élément sera égale à cet élément multiplié par le cosinus de leur inclinaison mutuelle; par conséquent, cette inclinaison étant la même et égale à i pour tous les élémens, la somme de leurs projections, ou λ, sera égale à leur somme, ou à l'aire totale l multipliée par $\cos i$; ce qu'il s'agissait de prouver. On conclut de là que le carré de l'aire d'une surface plane est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires, en prenant pour l'inclinaison sur chaque plan l'angle que fait la normale à la surface donnée avec les perpendiculaires à ce plan, et ayant égard à l'équation (1).

11. Lorsque dans une question, on considérera un système de forces parallèles, on pourra supposer que l'un des trois axes rectangulaires MA, MB, MC, (fig. 1re), leur est aussi parallèle. Alors deux des trois angles α, β, γ, les deux derniers, par exemple, seront droits pour toutes ces forces; et l'équation (1) se réduira à

$$\cos^2 \alpha = 1;$$

d'où l'on tire $\alpha = 0$ ou $\alpha = 180°$.

De cette manière, la direction de chaque force serait fixée, en disant qu'elle fait avec l'axe MA un angle nul ou un angle de 180°; mais dans ce cas particulier, il sera plus simple de déterminer cette direction par le signe de la force, en regardant comme positives les forces qui agissent dans un sens, et comme négatives celles qui agissent dans le sens opposé.

Au reste, le cas des forces parallèles sera le seul où nous considérerons des forces positives et des forces négatives; dans tous les autres cas, les quantités qui représenteront les grandeurs des forces, dans le calcul, seront positives, et la variation de signe ne tombera que sur les cosinus des angles que leurs directions font avec des axes fixes.

12. Ce qui précède renferme les définitions préliminaires, et des détails suffisans sur la détermination des grandeurs et des directions des forces; mais, dans cet ouvrage, j'emploierai exclusivement la méthode des *infiniment petits*; c'est pourquoi il est nécessaire de rappeler, dans cette introduction, les principes de l'Analyse infinitésimale, et parmi les formules qui s'en déduisent le plus immédiatement, celles dont nous pourrons avoir besoin par la suite.

Un *infiniment petit* est une grandeur moindre que toute grandeur donnée de la même nature.

On est conduit nécessairement à l'idée des infiniment petits, lorsque l'on considère les variations successives d'une grandeur soumise à la loi de continuité. Ainsi, le temps croît par des degrés moindres qu'aucun intervalle qu'on puisse assigner, quelque petit qu'il soit. Les espaces parcourus par les différens points d'un corps, croissent aussi par des infiniment petits; car chaque point ne peut aller d'une position à une autre, sans traverser toutes les positions intermédiaires; et l'on ne saurait as-

signer aucune distance, aussi petite que l'on voudra, entre deux positions successives. Les infiniment petits ont donc une existence réelle, et ne sont pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres.

Un infiniment petit peut être double, triple, quadruple, ... d'un autre : les quantités infiniment petites ont entre elles des rapports quelconques, dont la détermination est un objet essentiel de l'Analyse infinitésimale.

Si a et b sont des infiniment petits, et que le rapport de b à a soit aussi infiniment petit, b est ce qu'on appelle un infiniment petit du second ordre. Par exemple, la corde d'un arc de cercle étant supposée infiniment petite, le sinus verse du même arc est un infiniment petit du second ordre, puisque le rapport du sinus verse à la corde est toujours le même que celui de la corde au diamètre, et devient, par conséquent, infiniment petit en même temps que le second rapport.

De même, b étant déjà un infiniment petit du second ordre, si l'on suppose que le rapport de c à b soit infiniment petit du premier ordre, on appellera c un infiniment petit du troisième ordre; et ainsi de suite.

Il suit de là qu'un produit composé d'un nombre n de facteurs infiniment petits du premier ordre, devra être rangé dans la classe des infiniment petits de l'ordre n.

L'aire d'une surface infiniment petite dans toutes ses dimensions est au moins un infiniment petit du second ordre; car elle est moindre que le carré de la droite la plus longue qu'on puisse mener d'un point à un autre de son contour, laquelle droite est infiniment petite, par hypothèse. On verra de même qu'un volume dont toutes les dimensions sont infiniment petites, est au moins un infiniment petit du troisième ordre, puisqu'il est moindre que le cube de la plus longue droite menée d'un point à un autre de sa superficie.

Cela posé, le principe fondamental de l'Analyse infinitésimale consiste en ce que deux quantités finies, qui ne diffèrent l'une de l'autre que d'un infiniment petit, doivent être regardées comme égales, puisqu'on ne saurait assigner entre elles aucune inégalité, aussi petite que l'on voudra.

Il en sera de même à l'égard de deux quantités infiniment petites du premier ordre, dont la différence est infiniment petite du second ordre, et, généralement, à l'égard de deux infinement petits d'un ordre quelconque, qui ne diffèrent l'un de l'autre que d'un infiniment petit d'un ordre supérieur : on les considérera comme des quantités rigoureusement égales, et leur rapport, comme égal à l'unité.

On énonce encore ces principes d'une autre manière, en disant qu'il est permis de négliger dans un calcul, sans crainte d'altérer aucunement les résultats, soit les infiniment petits ajoutés à des quantités finies, soit les quantités infiniment petites d'un ordre quelconque, ajoutées à des quantités d'un ordre inférieur.

13. La *différentielle* dx d'une variable indépendante x, est l'accroissement infiniment petit qu'on attribue à cette variable; la différentielle dy d'une fonction y de x, est l'accroissement correspondant de cette fonction, réduit au même ordre de grandeur que celui de la variable indépendante, par la suppression des infiniment petits d'un ordre supérieur; d'où il résulte que cette différentielle dy est toujours de la forme Xdx; X étant une autre fonction de x. Pour quelques valeurs particulières de x, il peut arriver que le coefficient différentiel X devienne infini, ce qui rendra la différentielle Xdx indéterminée; mais cette circonstance ne se présentera pas dans la Mécanique.

Soient fx une fonction donnée de x, c une constante arbitraire, et $Fx + c$ l'intégrale complète ou *indéfinie* de $fxdx$. Soient encore a et b deux constantes données. En déterminant la constante c de manière que cette intégrale soit nulle ou commence quand $x = a$, et faisant ensuite $x = b$, le résultat $Fb - Fa$ sera ce qu'on appelle l'intégrale *définie*, prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Je la désignerai par $\int_a^b fxdx$, suivant la notation très commode que Fourrier a proposée et j'écrirai, en conséquence,

$$Fb - Fa = \int_a^b fxdx.$$

Si l'on donne successivement à x une infinité de valeurs, croissantes depuis a jusqu'à b par des différences infiniment petites, et que l'on prenne ces différences égales ou inégales, pour les valeurs de dx, il est facile de faire voir que la somme de toutes les valeurs de la différentielle $fxdx$ sera égale à l'intégrale définie $Fb - Fa$.

En effet, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, on a, d'après la définition de la différentielle,

$$F(x + dx) - Fx = fxdx.$$

Si donc on représente par $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$, un nombre infini de quantités infiniment petites, telles que l'on ait,

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \ldots + \delta_n = b - a;$$

et que l'on prenne successivement, pour x et dx, les couples de valeurs a et δ_1, $a + \delta_1$ et δ_2, $a + \delta_1 + \delta_2$ et $\delta_3, \ldots b - \delta_n$ et δ_n, il en résultera

$$\begin{aligned}
&F(a + \delta_1) - Fa = fa\delta_1,\\
&F(a + \delta_1 + \delta_2) - F(a + \delta_1) = f(a + \delta_1)\delta_2,\\
&F(a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) - F(a + \delta_1 + \delta_2) = f(a + \delta_1 + \delta_2)\delta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Fb - F(b - \delta_n) = f(b - \delta_n)\delta_n;
\end{aligned}$$

équations dont la somme est

$$Fb - Fa = fa\delta_1 + f(a+\delta_1)\,\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 \ldots\ldots + f(b-\delta_n)\,\delta_n\,;$$

ce qui renferme le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Lorsque la fonction fx deviendra infinie entre les deux limites a et b, cette démonstration n'aura plus lieu, et le théorème sera en défaut. Dans ce cas d'exception, que nous ne rencontrerons pas dans la suite, l'intégrale définie n'a plus aucun rapport avec la somme des valeurs de la différentielle, et elle peut même être négative, lorsque toutes ces valeurs sont positives, ou positive, quand elles sont toutes négatives. Pour faire reparaître le théorème, il faut alors empêcher que fx ne devienne infinie entre $x = a$ et $x = b$, en faisant passer la variable x de l'une à l'autre de ces limites, par une série de valeurs imaginaires (1).

Le théorème précédent s'étend sans difficulté aux intégrales multiples. Ainsi, par exemple, si $f(x, y)$ est une fonction donnée de deux variables indépendantes x et y; que l'on donne successivement à ces variables des séries de valeurs croissantes par des différences infiniment petites; et que l'on prenne en même temps pour dx, les différences entre les valeurs consécutives de x, et pour dy, celles des valeurs consécutives de y, la somme de toutes les valeurs de $f(x, y)\,dxdy$, sera l'intégrale $\iint f(x, y)\,dxdy$, prise entre des limites convenables.

14. Lorsque la fonction fx renfermera une quantité α considérée comme une constante dans l'intégration, la valeur de l'intrégrale $\int_a^b fx\,dx$ sera elle-même une fonction de α. Il y a des questions dans lesquelles cette intégrale n'étant pas connue sous forme finie, on aura besoin, néanmoins, de déterminer sa différentielle par rapport à α. Or, cette opération présentera deux cas différens, selon que les limites a et b seront indépendantes des α, ou qu'elles en dépendront d'une manière quelconque.

Dans le premier cas, il suffira de différentier fx par rapport à α sous le signe $\int$; en sorte que l'on aura

$$\frac{d.\int_a fx\,dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{dfx}{d\alpha}\,dx.$$

En effet, d'après le théorème du numéro précédent, le premier membre de cette équation est le coefficient différentiel par rapport à α de la somme des valeurs de $fx\,dx$, comprises depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$; tandis que son second membre est la somme des valeurs, entre les mêmes limites, du coefficient différentiel de $fx\,dx$ relatif à α; et il est évident que ces deux sommes sont identiques.

Dans le second cas, lorsque α se change en $\alpha + d\alpha$, la limite b devient $b + \frac{db}{d\alpha}\,d\alpha$, et pour cette raison, la somme des valeurs de $fx\,dx$, ou l'intégrale $\int_a^b fx\,dx$ se trouve augmentée de la valeur de $fx\,dx$ qui répond à $x = b$ et $dx = \frac{db}{d\alpha}\,d\alpha$, c'est-à-dire, de $fb.\frac{db}{d\alpha}\,d\alpha$; en même temps la limite a se change en $a + \frac{da}{d\alpha}\,d\alpha$, ce qui diminue cette intégrale de la valeur de fx, correspondante à $x = a$ et $dx = \frac{da}{d\alpha}\,d\alpha$, ou de $fa.\frac{da}{d\alpha}\,d\alpha$; donc, à cause de la variation simultanée des deux limites a et b, produite par celle de α, l'intégrale se trouvera augmentée de la différentielle

$$\left(\frac{db}{d\alpha}fb - \frac{da}{d\alpha}fa\right)d\alpha,$$

et son coefficient différentiel par rapport à α, de ce coefficient de $d\alpha$. Par conséquent, en l'ajoutant au second membre de l'équation précédente, on aura

$$\frac{d.\int_a^b fx\,dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{dfx}{d\alpha}\,dx + \frac{db}{d\alpha}fb - \frac{da}{d\alpha}\,fa,$$

pour la valeur complète du coefficient différentiel $\int_a^b fx\,dx$.

Quand α n'entrera pas dans fx, que cette quantité sera l'une des deux limites b ou a, et que ces deux limites ne dépendront pas l'une de l'autre, cette expression se réduira à

$$\frac{d.\int_a^b fx\,dx}{db} = fb\,, \quad \text{ou} \quad \frac{d.\int_a^b fx\,dx}{da} = -fa;$$

ce qui est, d'ailleurs, évident en soi-même.

Des remarques semblables s'appliqueront aux intégrales multiples, dont les coefficiens différentiels par rapport à une quantité qu'on a d'abord regardée comme constante, s'obtiendront aussi en différentiant sous les signes d'intégration, et en ajoutant au résultat des termes dépendans des variations des limites, quand elles dépendront de cette quantité devenue variable.

15. Le calcul intégral fournit des règles pour déterminer exactement ou par approximation, les va-

(1) *Voyez*, sur ce point, le *Journal de l'École polytechnique*, 18e cahier, page 320.

leurs numériques des intégrales définies, simples ou multiples; en sorte qu'un problème est censé résolu, lorsqu'on est parvenu à exprimer les inconnues par des intégrales de cette nature. On dit alors que le problème est réduit aux *quadratures*, parce que, d'une part, une intégrale multiple n'est autre chose qu'une intégrale simple plusieurs fois répétée, et que, d'un autre côté, une intégrale $\int_a^b fx\,dx$ peut toujours être représentée par le carré égal à l'aire d'une courbe plane, dans laquelle x et fx sont les coordonnées d'un point quelconque, et a et b les abscisses des points extrêmes.

Parmi les différentes formules dont on fait usage pour calculer les valeurs approchées de cette intégrale $\int_a^b fx\,dx$, nous citerons la suivante, qui suppose que les fonctions fx et $\frac{dfx}{dx}$ ne deviennent point infinies entre les limites a et b.

Conservons toutes les notations précédentes, et faisons de plus

$$\frac{dfx}{dx} = f'x, \qquad \frac{d^2 fx}{dx^2} = f''x, \text{ etc.}$$

Supposons que les différences δ_1, δ_2, δ_3, etc., ne sont pas infiniment petites, mais seulement très petites; prenons-les égales, et représentons par δ leur grandeur commune. Nous aurons, d'après le théorème de Taylor,

$$\begin{aligned}
F(a+\delta) &= Fa + \delta fa + 1/2\,\delta^2 f'a + \text{etc.},\\
F(a+2\delta) &= F(a+\delta) + \delta f(a+\delta) + 1/2\,\delta^2 f'(a+\delta) + \text{etc.},\\
F(a+3\delta) &= F(a+2\delta) + \delta f(a+2\delta) + 1/2\,\delta^2 f'(a+2\delta) + \text{etc.},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(a+n\delta) &= F(a+n\delta-\delta) + \delta f(a+n\delta-\delta)\\
&\qquad + 1/2\,\delta^2 f'(a+n\delta-\delta) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc, en supposant $n\delta = b - a$, et faisant la somme de ces équations, on aura

$$\begin{aligned}
Fb - Fa = \delta\Sigma f(a+i\delta) &+ 1/2\,\delta^2\,\Sigma f'(a+i\delta)\\
&+ 1/6\,\delta^3\,\Sigma f''(a+i\delta) + \text{etc.};
\end{aligned}$$

i étant un nombre entier ou zéro, et les caractéristiques Σ indiquant des sommes qui s'étendent aux n valeurs de i comprises depuis $i = 0$ jusqu'à $i = n - 1$. En prenant successivement fx et $f'x$, $f'x$ et $f''x$, etc., au lieu de Fx et fx, on aura de même

$$\begin{aligned}
fb - fa &= \delta\Sigma f'(a+i\delta) + 1/2\,\delta^2\,\Sigma f''(a+i\delta) + \text{etc.},\\
f'b - f'a &= \delta\Sigma f''(a+i\delta) + \text{etc., etc.}
\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on veut négliger les puissances de δ supérieures au carré dans la valeur de $Fb - Fa$, on pourra prendre, d'après les dernières équations,

$$\begin{aligned}
1/2\,\delta^2\,\Sigma f'(a+i\delta) &= 1/2\,\delta(fb - fa) - 1/4\,\delta^2\,(f'b - f'a),\\
1/6\,\delta^3\,\Sigma f''(a+i\delta) &= 1/6\,\delta^2\,(f'b - f'a),
\end{aligned}$$

pour les valeurs de ses deux derniers termes. Sa valeur entière deviendra donc

$$\begin{aligned}
Fb - Fa = \delta\Sigma f(a+i\delta) &+ 1/2\,\delta(fb - fa)\\
&- 1/12\,\delta^2\,(f'b - f'a),
\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned}
\int_a^b fx\,dx = \delta\,[1/2\,fa + f(a+\delta) + f(a+2\delta) \ldots\\
\ldots + f(a+n\delta-\delta) + 1/2\,fb] - 1/12\,\delta^2\,(f'b - f'a).
\end{aligned}$$

Cette formule sera d'autant plus exacte, que la différence δ, ou $\frac{1}{n}(b-a)$, sera plus petite, et que les valeurs de fx varieront moins rapidement entre les limites a et b. Le plus souvent on pourra négliger le terme dépendant de δ_2; la formule ne renfermera alors que des valeurs de fx qui pourront être données en nombres, sans que la forme de cette fonction soit connue.

16. Dans la théorie des infiniment petits, on considère les courbes comme des polygones d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Cela suppose que la corde d'un arc infiniment petit est égale à cet arc, ou que le rapport de leurs longueurs peut être pris pour l'unité; c'est effectivement ce que l'on peut démontrer de la manière suivante.

Soit $Mmm'M'$ (fig. 3) un arc de courbe infiniment petit; tirons les cordes Mm, mm', $m'M'$, et prolongeons la troisième, jusqu'à ce qu'elle rencontre le prolongement MT de la première, en un point K. L'arc mm' est plus grand que la corde mm', et moindre que la ligne brisée mKm'; il suffira donc de prouver que cette ligne et cette corde, infiniment petites, ne diffèrent que d'un infiniment petit d'un ordre supérieur, et que l'on peut prendre le rapport de l'une à l'autre pour l'unité : cela sera vrai, *à fortiori*, à l'égard de l'arc mm' et de sa corde.

Or, s'il n'y a dans l'étendue de l'arc $Mmm'M'$ aucun point singulier où la direction de la courbe change brusquement, les cordes qui vont d'un de ses points à un autre comprendront des angles infiniment peu différens de deux droits. L'angle TKM', supplément de MKM', sera donc infiniment petit; je le désignerai par δ; et en faisant, en outre,

$$mK = a, \quad m'K = b, \quad mm' = c,$$

on aura, dans le triangle mKm', l'équation

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\delta,$$

que l'on peut changer en celle-ci :

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\sin^2 1/2\,\delta,$$

en observant que

$$\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 1/2\, \delta.$$

Nous aurons donc

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} = 1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 1/2\, \delta,$$

pour le carré du rapport de la corde mm' à la ligne brisée mKm'. On a d'ailleurs

$$\frac{4ab}{(a+b)^2} = 1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2;$$

ce qui prouve que le coefficient de $\sin^2 1/2\, \delta$ ne peut pas devenir infini, puisqu'il est toujours moindre que l'unité. En négligeant l'infiniment petit du second ordre, on aura donc l'unité pour le rapport de c à $a+b$; ce qu'il s'agissait de démontrer.

17. Une courbe étant considérée comme un polygone infinitésimal, les tangentes seront les prolongemens de ses côtés infiniment petits; au point M, où le côté est Mm, la tagente sera la droite indéfinie $T'MmT$.

Si l'on désigne par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires du point M, celles du point m seront $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. En appelant ds l'élément de la courbe, c'est-à-dire, son côté Mm, les différentielles dx, dy, dz, seront ses projections sur les axes des x, y, z; par conséquent, si l'on représente par α, β, γ, les trois angles que fait la direction de la droite MT avec des parallèles à ces axes, menées par le point M, on aura

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}, \quad (1)$$

et en même temps

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

En prenant, sur la courbe que l'on considère, un point fixe C, et supposant que s soit l'arc CM compté de cette origine, cet arc pourra être la variable indépendante dont x, y, z, seront des fonctions données par les équations de la courbe. Dans ce cas, ds sera positif; mais dx, dy, dz, et par suite $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, pourront être positifs ou négatifs. Les angles α, β, γ, se rapporteront toujours au prolongement mT du côté Mm, ou à la partie MmT de la tangente; les angles relatifs à l'autre partie MT' seront les supplémens de α, β, γ, (n° 7).

La direction de la tangente au point M étant déterminée par les équations (1), on en peut conclure l'équation du *plan normal* en ce même point; mais on obtient directement cette équation par la considération suivante.

Soit k le rayon d'une sphère qui a son centre au point M; son équation sera

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = k^2;$$

x', y', z', désignant les coordonnées courantes. L'équation de la sphère du même rayon, qui a son centre au point m, se déduira de celle-là, en y mettant $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, à la place de x, y, z; en retranchant ces équations l'une de l'autre, et négligeant les infiniment petits du second ordre, il vient

$$(x' - x)\, dx + (y' - y)\, dy + (z' - z)\, dz = 0;$$

équation qui appartiendra à l'intersection des deux surfaces sphériques. Comme elle est l'équation d'un plan dont x', y', z', sont les coordonnées courantes, ce sera celle du plan de cette courbe, et, par conséquent, l'équation demandée du plan normal, puisque les deux sphères se coupent suivant un cercle perpendiculaire à la droite TT' qui passe par leurs centres M et m.

En la divisant par ds, et ayant égard aux formules (1), cette équation devient

$$(x' - x) \cos \alpha + (y' - y) \cos \beta + (z' - z) \cos \gamma = 0.$$

Si donc

$$a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z) = 0$$

représente l'équation d'un plan mené par le point dont les coordonnées sont x, y, z, et perpendiculaire à la droite dont la direction est déterminée par les angles α, β, γ, il faudra qu'elle s'accorde avec la précédente; ce qui exigera qu'on ait

$$a = k \cos \alpha, \quad b = k \cos \beta, \quad c = k \cos \gamma,$$

k étant un facteur indéterminé. En vertu de l'équation (1) du n° 6, on en conclura d'ailleurs

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2;$$

ce qui fait connaître la valeur de k, abstraction faite du signe. On aura ensuite

$$\cos \alpha = \frac{a}{k}, \quad \cos \beta = \frac{b}{k}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{k}; \quad (2)$$

ce qui coïncide avec les formules connues d'après lesquelles on détermine la direction de la perpendiculaire à un plan donné. Le signe de k reste indéterminé, parce que les angles α, β, γ, peuvent se rapporter à l'une ou à l'autre des parties de cette droite qui sont situées des deux côtés du plan.

18. On appelle *angle de contingence* l'angle infiniment petit compris entre deux tangentes consécutives. Ainsi Mm et mm' (fig. 4), étant deux côtés consécutifs de la courbe, cet angle, au point M, est le supplément de Mmm', ou l'angle Tmt, sous lequel la tangente MmT est coupée par la tangente suivante $mm't$. Je le représenterai par δ, en supposant que les angles α, β, γ, se rapportent toujours à la direction de MT, et désignant par α', β', γ', ce qu'ils deviennent relativement à la direction de mt, on aura, en vertu de l'équation (2) du n° 9,

$$\sin^2 \delta = 1 - (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma')^2.$$

D'après le théorème de Taylor, on aura aussi

$$\cos\alpha' = \cos\alpha + d.\cos\alpha + 1/2\, d^2 . \cos\alpha + \text{etc.},$$
$$\cos\beta' = \cos\beta + d.\cos\beta + 1/2\, d^2 . \cos\beta + \text{etc.},$$
$$\cos\gamma' = \cos\gamma + d.\cos\gamma + 1/2\, d^2 . \cos\gamma + \text{etc.}$$

Or, si l'on substitue ces valeurs dans celles de $\sin^2\delta$, et qu'on ait égard à l'équation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

et à sa différentielle

$$\cos\gamma\, d.\cos\alpha + \cos\beta\, d.\cos\beta + \cos\gamma\, d.\cos\gamma = 0,$$

on voit que les quantités finies et les infiniment petits du premier ordre se détruisent ; en sorte qu'en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs au second, il vient

$$\sin^2\delta = -(\cos\alpha\, d^2 . \cos\alpha + \cos\beta\, d^2 . \cos\beta + \cos\gamma\, d^2 . \cos\gamma).$$

En différentiant l'équation précédente, on a, d'ailleurs,

$$\cos\alpha\, d^2 . \cos\alpha + \cos\beta\, d^2 . \cos\beta + \cos\gamma\, d^2 . \cos\gamma + (d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2 = 0;$$

ce qui change la valeur de $\sin^2\delta$ en celle-ci :

$$\sin^2\delta = (d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2,$$

laquelle sera aussi la valeur de δ^2, à cause que l'arc infiniment petit δ est égal à son sinus.

Les différentielles de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, se déduiront des formules (1) du numéro précédent. En ne spécifiant pas la variable indépendante, on aura

$$d.\cos\alpha = \frac{ds^2\, d^2x - dx\, ds\, d^2s}{ds^3};$$

et comme on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z,$$

il en résultera

$$d.\cos\alpha = \frac{dy}{ds^3}(dy\, d^2x - dx\, d^2y) + \frac{dz}{ds^3}(dz\, d^2x - dx\, d^2z);$$

on aura de même

$$d.\cos\beta = \frac{dx}{ds^3}(dx\, d^2y - dy\, d^2x) + \frac{dz}{ds^3}(dz\, d^2y - dy\, d^2z),$$

$$d.\cos\gamma = \frac{dx}{ds^3}(dx\, d^2z - dz\, d^2x) + \frac{dy}{ds^3}(dy\, d^2z - dz\, d^2y);$$

or, en faisant la somme des carrés de ces trois valeurs, on trouve, après quelques réductions, que l'expression de $\sin^2\delta$ ou de δ^2, peut se mettre sous la forme

$$\delta^2 = \frac{1}{ds^4}\left[(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2\right].$$

Le *cercle osculateur* est celui qui a deux côtés consécutifs communs avec la courbe. Au point M, ce cercle est donc celui qui passe par les trois points M, m, m', dont le centre se trouve à l'intersection O des deux perpendiculaires élevées sur les milieux de Mm et mm' dans le plan de ces deux élémens consécutifs, et qui a pour rayon la droite mO. Si ces deux élémens sont supposés égaux, cette droite divisera l'angle Mmm' en deux parties égales : nous ferons cette hypothèse sans craindre d'altérer la valeur de mO ; car il est aisé de voir que le rapport numérique des deux côtés infiniment petits Mm et mm' n'influe que d'une quantité infiniment petite sur la grandeur de ce rayon qui est, par conséquent, la même, soit qu'on prenne ces deux côtés consécutifs égaux, ou qu'ils soient inégaux.

La longueur des côtés Mm et mm' étant ds, et en représentant par ρ celle de mO, la projection de ρ sur Mm sera $1/2\, ds$; en sorte que l'on aura

$$1/2\, ds = \rho \cos MmO;$$

et puisque cet angle MmO est la moitié du supplément de δ ou égal à $1/2\,\pi - 1/2\,\delta$, il en résultera

$$1/2\, ds = \rho \sin 1/2\,\delta = 1/2\,\rho\,\delta,$$

en prenant l'arc $1/2\,\delta$ à la place de son sinus.

Cela étant, si le *rayon de courbure* ρ était connu d'une autre manière, on aurait

$$\delta = \frac{ds}{\rho},$$

pour la valeur de l'angle de contingence ; et réciproquement, d'après la valeur précédente de δ^2, celle ρ sera

$$\rho = \frac{ds^3}{\left[(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2\right]^{1/2}}.$$

19. Pour achever de connaître la nature intime de la courbe au point quelconque M, il faut encore déterminer son *plan osculateur*, c'est-à-dire le plan des deux côtés consécutifs Mm et mm'.

Ce plan passant par le point M, on pourra représenter son équation par

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=0,$$

x', y', z', étant les coordonnées courantes. A cause qu'il doit aussi passer par les points m et m', les différentielles première et seconde de cette équation, savoir :

$$Adx' + Bdy' + Cdz' = 0,$$
$$Ad^2x' + Bd^2y' + Cd^2z' = 0,$$

devront être satisfaites comme l'équation même, en y faisant $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$; en sorte que l'on aura

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$
$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0.$$

Les valeurs de A, B, C, qui remplissent ces deux conditions sont, comme il est aisé de le vérifier,

$$C = D\,(dxd^2y - dyd^2x),$$
$$B = D\,(dzd^2x - dxd^2z),$$
$$A = D\,(dyd^2z - dzd^2y);$$

D étant un facteur indéterminé. En les substituant dans l'équation du plan osculateur, et supprimant ce facteur commun à tous ses termes, elle devient

$$(z'-z)(dxd^2y-dyd^2x)+(y'-y)(dzd^2x-dxd^2z)$$
$$+(x'-x)(dyd^2z-dzd^2y)=0.$$

Si l'on appelle λ, μ, ν, les angles que fait la normale au plan osculateur, avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point M, on aura, d'après les équations (2) du n° 17,

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda &= \frac{1}{h}(dyd^2z - dzd^2y),\\ \cos\mu &= \frac{1}{h}(dzd^2x - dxd^2z),\\ \cos\nu &= \frac{1}{h}(dxd^2y - dyd^2x),\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

en désignant par h^2 la somme des carrés des trois numérateurs.

On déterminera aussi l'angle infiniment petit compris entre deux normales consécutives, et qui sera l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, comme on a déterminé tout à l'heure l'angle de deux tangentes. En le désignant par ε, on aura, par un calcul semblable à celui du numéro précédent.

$$\varepsilon^2 = (d.\cos\lambda)^2 + (d.\cos\mu)^2 + (d.\cos\nu)^2$$

20. Le centre de courbure O se trouve à la fois sur le plan osculateur et sur l'intersection des deux plans normaux consécutifs; ce qui fournit le moyen de déterminer ses coordonnées d'après les équations de ces trois plans, qui sont maintenant connues.

L'équation du plan normal en M étant (n° 17)

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0,$$

celle du plan consécutif s'en déduira en y mettant $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, au lieu de x, y, z; par conséquent, la différentielle de l'équation du premier de ces deux plans, prise par rapport à x, y, z, savoir :

$$(x'-x)\,d^2x+(y'-y)\,d^2y+(z'-z)\,d^2z=ds^2,$$

appartiendra à leur intersection.

On tire de ces deux équations

$$(x'-x)(dxd^2y-dyd^2x)=(z'-z)(dyd^2z-dzd^2y)-ds^2\,dy,$$
$$(y'-y)(dyd^2x-dxd^2y)=(z'-z)(dzd^2x-dxd^2z)-ds^2\,dx;$$

et au moyen de l'équation du plan osculateur, on en conclut

$$z'-z=\frac{\rho^2}{ds^4}\left[dy\,(dyd^2z-dzd^2y)\right.$$
$$\left.-dx\,(dzd^2x-dxd^2z)\right],$$

en désignant, pour abréger, par ρ la même expression que dans le n° 18. On aura de même

$$y'-y=\frac{\rho^2}{ds^4}\left[dx\,(dxd^2y-dyd^2x)\right.$$
$$\left.-dz\,(dyd^2z-dzd^2y)\right],$$

$$x'-x=\frac{\rho^2}{ds^4}\left[dz\,(dzd^2x-dxd^2z)\right.$$
$$\left.-dy\,(dxd^2y-dyd^2x)\right];$$

ce qui fait connaître les trois coordonnées x', y', z' du centre de courbure O, et, par conséquent, le sens de la courbure dont le rayon osculateur ne détermine que la grandeur.

En ajoutant les carrés de ces valeurs de $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, et réduisant, on a

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=\rho^2;$$

d'où il résulte que la quantité ρ est la distance du point O au point M, ou le rayon de courbure MO, comme on le savait déjà.

21. Les formules des cinq numéros précédens renferment tout ce qui est relatif à la direction et à la courbure d'une ligne quelconque, plane ou à double courbure. Relativement à une surface quelconque, on a aussi à considérer la courbure et la direction de son plan tangent; quant à sa courbure, je renverrai au Mémoire que j'ai inséré sur ce sujet dans le 21e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et je ne m'occuperai ici que de ce qui concerne le plan tangent et la normale.

En un point M, dont les coordonnées sont x, y,

z, l'équation du plan tangent peut être représentée par

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=0;$$

x', y', z', étant les coordonnées courantes. Ce plan devra aussi passer par tout autre point M' de la surface, infiniment voisin de M; il faudra donc qu'on satisfasse à cette équation, au moyen de $x'=x+dx$, $y'=y+dy$, $z'=z+dz$, ou à sa différentielle relative à x', y', z', en y mettant x, y, z, à la place de ces variables. Par conséquent, on aura

$$Adx+Bdy+Cdz=0.$$

L'équation de la surface donnera

$$dz=pdx+qdy;$$

p et q désignant des fonctions connues de x, y, z. L'équation précédente devient donc

$$(A+pC)\,dx+(B+qC)\,dy=0;$$

et comme elle doit subsister pour toutes les directions de la droite MM', c'est-à-dire, pour tous les rapports qu'on peut établir entre dx et dy, il faudra égaler séparément à zéro les coefficiens de ces différentielles; d'où il résultera

$$A+pC=0,\quad B+qC=0.$$

Je tire de là les valeurs de A et B, je les substitue dans l'équation du plan tangent, et je supprime le facteur commun C; il vient

$$z'-z-p(x'-x)-q(y'-y)=0.$$

Si a, b, c, sont les angles que fait la normale au point M, avec les prolongemens des coordonnées x, y, z, on aura d'après les équations (2) du n° 17,

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos b&=-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos c&=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Le radical sera positif ou négatif dans ces trois formules, selon que la partie de la normale qu'on voudra considérer, fera un angle c aigu ou obtus avec la droite menée par le point M, suivant la direction des z positives.

En appelant ω l'élément de la surface dont la projection sur le plan des x et y est $dxdy$, on aura

$$dxdy=\pm\omega\cos c,$$

selon que c sera aigu ou obtus; car cet élément infiniment petit en tout sens, est compris dans le plan tangent dont l'inclinaison sur le plan des x et y est l'angle c ou son supplément; et le théorème du n° 10 convient également à la projection d'une surface plane infiniment petite. D'après cela on aura

$$\omega=dxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

en regardant toujours le radical comme une quantité positive.

Soit L une fonction donnée de x, y, z; représentons par

$$L=0,$$

l'équation de la surface que l'on considère; en la différentiant successivement par rapport à x et à y, on aura

$$\frac{dL}{dx}+p\frac{dL}{dz}=0,\qquad \frac{dL}{dy}+q\frac{dL}{dz}=0.$$

Je tire de là les valeurs de p et q, et je les substitue dans l'équation du plan tangent qui prend la forme

$$(x'-x)\frac{dL}{dx}+(y'-y)\frac{dL}{dy}+(z'-z)\frac{dL}{dz}=0.$$

En même temps, les formules (4) deviennent

$$\cos a=V\frac{dL}{dx},\ \cos b=V\frac{dL}{dy},\ \cos c=V\frac{dL}{dz},\quad(5)$$

En faisant, pour abréger,

$$\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-1/2}=V.$$

22. Je placerai ici une remarque qui sera utile pour vérifier ou déduire les unes des autres les formules analogues qui répondent à différens axes.

Supposons que dans une question tout soit semblable à l'égard des trois axes des coordonnées x, y, z. Si l'on a une équation $X=0$, relative à l'axe des x, il en existera une semblable $Y=0$, qui répondra à l'axe des y, et une troisième $Z=0$, relative à l'axe des z; et ces deux autres équations $Y=0$ et $Z=0$, se déduiront de $X=0$, par de simples changemens de lettres. Or, voici comment ces permutations devront s'effectuer.

On mettra dans X toutes les quantités relatives à l'axe des x, à la place des quantités analogues qui répondent à l'axe des y, puis celles-ci à la place de celles qui répondent à l'axe des z, et enfin, ces dernières quantités à la place des premières, qui répondaient à l'axe des x. Par cette permutation *tournante*, on déduira Z de X; par une seconde permutation de la même nature, effectuée sur Z, on obtiendra Y; et par une troisième permutation tournante, effectuée sur Y, on retrouverait X.

S'il s'agit, par exemple, des équations (3) du n° 19, dont la première répond à l'axe des x, la seconde à l'axe des y, et la troisième à l'axe des z, j'écrirai sur une même ligne, mais en deux parties, les coordonnées x, y, z, et les angles λ, μ, ν, qui leur correspondent respectivement; puis, sur une seconde ligne, je disposerai ces six quantités,

aussi en deux parties, et dans un ordre différent, de sorte qu'on ait

$$x, y, z, \qquad \lambda, \mu, \nu;$$
$$z, x, y, \qquad \nu, \lambda, \mu.$$

Cela fait, je remplacerai dans la première équation (3), chacune des quantités de la ligne supérieure par la quantité correspondante de la ligne inférieure; par cette permutation, h ne changera pas, et l'on obtiendra la troisième équation (3). Je mettrai de nouveau, dans celle-ci, les quantités de la ligne inférieure à la place de celles qui leur correspondent dans la ligne supérieure; ce qui donnera la seconde équation (3); et en opérant de même sur cette équation, on retrouvera la première équation (3), d'où l'on est parti.

Chacune de ces opérations revient à un changement d'axes des coordonnées dans lequel on fait d'abord tourner les axes des x et des y dans leur plan, de manière que l'axe des x positives vienne tomber sur l'axe des y positives, puis celui-ci sur l'axe des x négatives; et où l'on fait tourner ensuite cet axe des y positives, ainsi déplacé, et l'axe des z positives, de manière que le premier vienne tomber sur l'axe des z positives; puis celui-ci sur l'axe primitif des x positives; en sorte que, finalement, chaque axe des coordonnées positives ait pris la place d'un autre axe des coordonnées positives. C'est pour cela que les équations relatives aux trois axes des coordonnées se déduisent l'une de l'autre par de simples permutations de lettres, et sans aucun changement de signe; ce qui n'aurait pas lieu si l'on ne permutait pas simultanément les trois coordonnées et les quantités qui s'y rapportent de la manière qu'on vient d'indiquer.

23. Voici encore une observation générale, par laquelle je terminerai cette introduction.

Les équations que nous aurons à considérer renfermeront des nombres abstraits, tels que le nombre π, les logarithmes, les lignes trigonométriques, etc., elles contiendront, en outre, d'autres quantités de diverses natures, qui y seront aussi représentées par des nombres exprimant leurs rapports à des unités choisies arbitrairement, pourvu que chaque unité soit la même pour toutes les quantités d'une même espèce. Or, en changeant la grandeur d'une ou de plusieurs unités, les nombres qui expriment les quantités correspondantes, varieront en raison inverse de cette grandeur; et, malgré ce changement tout-à-fait arbitraire, les équations qui les renferment devront encore subsister. Il faudra, pour cela, que leur forme remplisse certaines conditions, faciles à vérifier dans chaque cas particulier, et qu'on appelle, dans l'acception la plus étendue, les conditions de l'*homogénéité des quantités*. Toute équation qui n'y satisfera pas sera, par cela seul, inexacte, et devra être rejetée.

Ainsi, en indiquant par F une fonction donnée, supposons qu'on ait

$$F(f, f', \ldots l, l', \ldots m, m', \ldots t, t', \ldots) = 0; \quad (a)$$

$f, f', \ldots$ désignant des forces, $l, l', \ldots$ des lignes, $\ldots m, m', \ldots$ des masses, $t, t', \ldots$ des temps. Si l'on représente par n, n', n'', n''', des nombres abstraits, et que l'on diminue à la fois l'unité de force dans le rapport de un à n, l'unité linéaire dans le rapport de un à n', l'unité de masse dans le rapport de un à n'', l'unité de temps dans le rapport de un à n''', les nombres $f, f', \ldots l, l', \ldots m, m', \ldots t, t', \ldots$ deviendront $nf, nf', \ldots n'l, n'l', \ldots n''m, n''m', \ldots n'''t, n'''t', \ldots$, et l'équation (a) devra encore avoir lieu, c'est-à-dire, qu'on devra encore avoir

$$F(nf, nf', \ldots n'l, n'l', \ldots n''m, n''m', \ldots n'''t, n'''t', \ldots) = 0,$$

quels que soient n, n', n'', n'''. Si l'équation (a) renfermait des surfaces $s, s', \ldots$ et des volumes $v, v', \ldots$ leurs dimensions devraient être rapportées à la même unité que les lignes $l, l', \ldots$, et ces quantités $s, s' \ldots v, v', \ldots$ deviendraient conséquemment $n'^2 s', n'^2 s', \ldots n'^3 v, n'^3 v', \ldots$ par le changement de cette unité.

L'équation du n° 18, qui donne la valeur de ρ, satisfait évidemment à cette condition; car elle ne renferme que des lignes finies ou infiniment petites $\rho, ds, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$; et quand on change l'unité linéaire et qu'on multiplie, comme on vient de le dire, chacune de ces lignes par un même nombre n', ce nombre disparaît et l'équation n'est pas changée. Celle du même numéro, d'où dépend la valeur de δ^2, satisfait également à la condition de l'homogénéité, en observant que δ^2 est un nombre abstrait qui ne change pas, non plus que cette valeur, avec la grandeur de l'unité linéaire.

Il sera impossible que l'équation (a) ne renferme qu'une seule quantité d'une même espèce; lorsqu'elle en contiendra deux, par exemple deux forces f et f', et qu'on la résoudra par rapport à l'une d'elles, ce qui donnera

$$f' = F(f, l, l', \ldots m, m', \ldots t, t', \ldots),$$

il faudra, pour l'homogénéité des quantités, que f soit facteur à tous les termes de la nouvelle fonction F, ou, autrement dit, il faudra qu'on ait

$$f' = Nf;$$

N étant un facteur qui ne contiendra aucune quantité de la nature de f et f' et ne variera plus avec l'unité de force.

Quelquefois le principe de l'homogénéité des quantités paraîtra n'avoir pas lieu, parce qu'on aura pris pour unité de force l'une des forces que l'on considère dans la question, ou bien pour unité linéaire la distance de deux des points matériels dont on s'occupe, ou bien pour unité de masse

celle de l'un des corps du problème, etc. Mais alors, si l'on change arbitrairement ces unités, et que la force, la ligne, la masse, le temps, qu'on avait d'abord pris pour unités, soient maintenant exprimés par φ, λ, μ, θ, les autres quantités de ces différentes natures qui entrent dans l'équation (a) deviendront

$$\frac{f}{\varphi}, \frac{f'}{\varphi}, \ldots \frac{l}{\lambda}, \frac{l'}{\lambda}, \ldots \frac{m}{\mu}, \frac{m'}{\mu}, \ldots \frac{t}{\theta}, \frac{t'}{\theta}, \ldots;$$

il faudra donc qu'on ait

$$F\left(\frac{f}{\varphi}, \frac{f'}{\varphi}, \ldots \frac{l}{\lambda}, \frac{l'}{\lambda}, \ldots \frac{m}{\mu}, \frac{m'}{\mu}, \ldots \frac{t}{\theta}, \frac{t'}{\theta}, \ldots\right) = 0;$$

équation qu'on pourra écrire ainsi

$$F_1, (\varphi, f, f', \ldots \lambda, l, l', \ldots \mu, m, m', \ldots \theta, t, t', \ldots) = 0,$$

et qui devra maintenant satisfaire à la condition de l'homogénéité : F_1 indique ici une fonction qui se déduira, dans chaque cas, de la fonction donnée F.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE,

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA COMPOSITION ET DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT.

24. Lorsqu'un point matériel est soumis à l'action simultanée de plusieurs forces qui ne se font pas équilibre, il se meut suivant une direction déterminée, et l'on peut attribuer le mouvement qu'il prend, à une force unique agissant suivant cette direction. Cette force est ce qu'on appelle la *résultante* des forces qui ont mis le mobile en mouvement, et celles-ci sont nommées les *composantes* de la première. Appliquée en sens contraire de sa direction, la résultante fait équilibre aux composantes, puisqu'elle tend à imprimer au mobile un mouvement égal et contraire à celui qu'il recevrait de l'action simultanée des composantes, et qu'il n'y a pas de raison, par conséquent, pour qu'il se meuve plutôt d'un côté que de l'autre.

Si toutes les composantes sont dirigées suivant une même droite, et agissent dans le même sens, il suit de la notion que nous avons donnée de la mesure des forces (n° 5), que la résultante sera égale à leur somme. Si le mobile est sollicité par deux forces directement contraires, on décomposera la plus grande en deux autres, dont l'une, égale à la plus petite, sera détruite par celle-ci, et dont l'autre, égale à l'excès de la plus grande sur la plus petite, sera la résultante. On conclut de ces deux propositions que s'il y a un nombre quelconque de composantes, dirigées, en partie suivant une droite, et en partie suivant son prolongement, la résultante sera égale à la somme de celles qui agissent dans un même sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire, et qu'elle agira dans le sens de la plus grande somme. Quand les deux sommes seront égales, la résultante sera nulle, et les forces données se feront équilibre.

25. Il y a un autre cas dans lequel on détermine aussi très aisément la grandeur et la direction de la résultante.

Soient MA, MB, MC (fig. 5), les directions de trois forces égales appliquées au point M; supposons ces forces comprises dans un même plan, et les trois angles AMB, BMC, CMA, égaux entre eux, ou chacun à 120°; le point M demeurera en équilibre; car il n'y aurait pas de raison pour qu'il sortît du plan des trois forces, ni pour qu'il se mît en mouvement plutôt dans l'un que dans l'autre de ces trois angles. Chacune des trois forces sera donc égale et contraire à la résultante des deux autres. Or, si l'on prend sur les directions MA et MB de deux d'entre elles des lignes égales MG et MH, pour représenter leurs intensités, et qu'on achève le losange GMHK, la diagonale MK tombera sur le prolongement MD de MC; l'angle MGK sera de 60°, comme chacun des deux autres angles du même triangle, qui sera équilatéral; on aura donc MK = MG; par conséquent la diagonale MK du losange construit sur les deux forces MG et MH représente, en grandeur et en direction, la résultante de ces deux forces.

Cette proposition est comprise dans une autre que nous allons d'abord démontrer dans le cas de

deux forces égales, dont les directions font un angle quelconque, et que nous étendrons ensuite à des forces inégales.

26. La résultante de deux forces égales coupe toujours en deux parties égales l'angle compris entre leurs directions ; car il n'y aurait pas de raison pour qu'elle se rapprochât davantage de l'une de ces deux forces, ni pour que sa direction s'écartât de leur plan plutôt d'un côté que de l'autre : sa direction est donc connue, et nous n'aurons que sa grandeur à déterminer.

Soient, pour y parvenir, MA et MB (fig. 6) les directions des composantes dont la valeur commune sera représentée par P. Soient aussi $2z$ l'angle AMB, et MD la direction de la résultante, de sorte qu'on ait $AMD = BMD = z$. Son intensité ne peut dépendre que des quantités P et z; en la désignant donc par R, nous aurons

$$R = f(P, z).$$

Dans cette équation, R et P sont les seules quantités dont l'expression numérique varie avec l'unité de force; d'après le principe de l'homogénéité des quantités (n° 23), il faut donc que la fonction $f(P, z)$ soit de la forme $P\varphi z$. Ainsi l'on a

$$R = P\varphi z;$$

et la question se réduit à déterminer la forme de la fonction φz.

Pour cela, je mène arbitrairement par le point M les quatre lignes MA', MA'', MB', MB''; je suppose les quatre angles A'MA, A''MA, B'MB, B''MB, égaux entre eux, et je représente chacun d'eux par s. Je décompose la force P dirigée suivant MA, en deux forces égales dirigées suivant MA' et MA'', c'est-à-dire que je regarde la force P comme la résultante de deux forces égales dont la valeur est inconnue et qui agissent suivant MA' et MA''; en désignant cette valeur par Q, j'aurai

$$P = Q\varphi s;$$

car il doit exister entre les quantités P, Q, s, la même relation qu'entre les quantités R, P, z. Je décompose de même la force P dirigée suivant MB, en deux forces Q, dirigées suivant MB' et MB''; de cette manière, les deux forces P se trouvent remplacées par les quatre forces Q; par conséquent, la résultante de celles-ci devra coïncider, en grandeur et en direction, avec la force R, résultante des deux forces P.

Or, en appelant Q' la résultante des deux forces Q, dirigées suivant MA' et MB', et observant que $A'MD = B'MD = z - s$, cette force Q' sera dirigée suivant MD, et l'on aura

$$Q' = Q\varphi(z - s).$$

De même, la résultante des deux autres forces Q sera encore dirigée suivant MD, puisque cette droite coupe aussi l'angle A''MB'' en deux parties égales ; et à cause de $A''MD = B''MD = z + s$, on aura

$$Q'' = Q\varphi(z + s);$$

Q'' désignant cette seconde résultante. Les deux forces Q' et Q'' étant dirigées suivant la même droite MD, leur résultante, qui est aussi celle des quatre forces Q, sera donc égale à leur somme; par conséquent, on doit avoir

$$R = Q' + Q''.$$

Mais on a déjà

$$R = P\varphi z = Q\varphi s\varphi z;$$

et en substituant cette valeur de R et celles de Q' et Q'' dans l'équation précédente, et supprimant le facteur Q commun à tous les termes, il vient

$$\varphi z\varphi s = \varphi(z + s) + \varphi(z - s). \quad (1)$$

C'est cette équation qui nous reste à résoudre pour en déduire l'expression de φz.

27. On voit d'abord qu'on y satisfait en prenant

$$\varphi z = 2\cos az;$$

a étant une constante arbitraire, de sorte qu'on ait, en même temps,

$$\varphi s = 2\cos as,$$
$$\varphi(z + s) = 2\cos a(z + s),$$
$$\varphi(z - s) = 2\cos a(z - s);$$

et effectivement, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), on obtient l'équation connue

$$2\cos az\cos as = \cos a(z + s) + \cos a(z - s).$$

Or je dis que cette expression de la fonction φz est la seule qui satisfasse à l'équation (1), et que de plus, dans la question qui nous occupe, la constante a est l'unité, en sorte que l'on a

$$\varphi z = 2\cos z. \quad (2)$$

Cela est évident quand $z = 0$; car alors les directions des deux forces P coïncident et la résultante R est égale à 2P, ce qui suppose $\varphi z = 2$. Admettons qu'il y ait une autre valeur α de z, pour laquelle on ait aussi $\varphi\alpha = 2\cos\alpha$; je dis que l'équation (2) subsistera également pour toutes les valeurs 2α, 3α, 4α, ..., $1/2\,\alpha$, $1/4\,\alpha$, $1/8\,\alpha$, ..., de z, et généralement pour

$$z = \frac{m\alpha}{2^n}; \quad (3)$$

m et n étant des nombres entiers quelconques.

En effet, si l'équation (2) se vérifie pour les trois angles z, s, $z - s$, de manière qu'on ait

$$\varphi z = 2\cos z,\ \varphi s = 2\cos s,\ \varphi(z - s) = 2\cos(z - s),$$

elle aura encore lieu pour un quatrième angle $z + s$; car, en vertu de l'équation (1), on aura alors

$$\varphi(z + s) = 4\cos z\cos s - 2\cos(z - s);$$

équation qui se réduit à

$$\varphi(z + s) = 2\cos(z + s).$$

Ainsi l'équation (2) ayant lieu pour $x = 0$ et $x = \alpha$, il s'ensuit qu'elle subsiste pour $x = 2\alpha$; ayant lieu pour $x = \alpha$ et $x = 2\alpha$, elle subsistera pour $x = 3\alpha$; et, en continuant de même, on verra qu'elle aura lieu pour $x = m\alpha$.

Je fais maintenant $m\alpha = \zeta$; on aura donc

$$\varphi \zeta = 2 \cos \zeta;$$

et de là on conclura que l'équation (2) aura encore lieu pour $x = 1/2\,\zeta$; car en faisant $x = s = 1/2\,\zeta$, l'équation (1) deviendra

$$(\varphi\, 1/2\,\zeta)^2 = 2 \cos \zeta + 2;$$

d'où l'on tire

$$\varphi\, 1/2\,\zeta = 2 \cos 1/2\,\zeta.$$

En faisant ensuite $x = s = 1/4\,\zeta$, on aura, d'après l'équation (1) et cette dernière,

$$(\varphi\, 1/4\,\zeta)^2 = 2 \cos 1/2\,\zeta + 2, \quad \varphi\, 1/4\,\zeta = 2 \cos 1/4\,\zeta;$$

et, en continuant ainsi, l'équation (2) sera démontrée pour $x = \frac{\zeta}{2^n}$, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs de x comprises dans la formule (3).

Or, les nombres m et n étant aussi grands qu'on voudra, et pouvant même devenir infinis, on peut faire croître ces valeurs de x par degrés infiniment petits. La formule (3) comprend donc toutes les valeurs possibles de l'angle x, et l'équation (2) est complètement démontrée, si toutefois elle est vraie pour une valeur particulière $x = \alpha$, différente de zéro. Mais, d'après le théorème du n° 25, la résultante R est égale à P, dans le cas de $x = 60°$; on a donc alors

$$\varphi x = 1 = 2 \cos 60°;$$

donc l'équation (2) a lieu pour $x = 60°$, et conséquemment pour toutes les valeurs de x.

28. Au moyen de cette équation, on aura

$$R = 2P \cos x.$$

Si donc la résultante R et les deux composantes P sont représentées, comme dans le n° 25, par des droites prises sur leurs directions respectives, à partir de leur point d'application, la force R sera le double de la projection de P sur sa direction, ou égale à la diagonale du losange construit sur les deux forces P.

Soient maintenant deux forces inégales P et Q, appliquées au point M (fig. 7) suivant les directions MA et MB; représentons leurs intensités par les lignes MG et MH, prises sur leurs directions, et achevons le parallélogramme MGKH : il y aura deux cas à considérer, le premier où l'angle AMB sera droit, le second où il sera aigu ou obtus.

Dans le premier cas, tirons les deux diagonales MK et GH qui se coupent au point L; par les points G et H, menons les parallèles GN et HO à ML, qui rencontrent en N et O la parallèle à GH, menée par le point M. Le point L est le milieu de MK et de GH; et comme, dans un rectangle, les deux diagonales sont égales, il s'ensuit qu'on a

$$GL = LH = LM = LK.$$

Les deux parallélogrammes GLMN et HLMO sont donc des losanges; par conséquent, d'après la proposition précédente, la force MG pourra être regardée comme la résultante des deux forces MN et ML, et la force MH comme la résultante de MO et ML. Donc, en substituant aux deux forces données leurs composantes, nous aurons, au lieu de MH et MG, les deux forces MN et MO, qui se détruisent, puisqu'elles sont égales et contraires, et les deux forces ML, qui s'ajoutent et donnent une résultante représentée en grandeur et en direction par la diagonale MK.

Dans le second cas, menons par les points G et H (fig. 8), les perpendiculaires GE et HF à la diagonale MK, et les parallèles GN et HO à cette même droite; par le point M, menons aussi la perpendiculaire NMO à cette droite MK. Les deux parallélogrammes GEMN et HFMO seront des rectangles qui auront leurs côtés MN et MO égaux, comme étant les hauteurs des deux triangles égaux GMK et HMK. D'après le premier cas, on pourra remplacer les forces MG et MH par leurs composantes rectangulaires ME et MN, MF et MO; au lieu des deux forces données, on aura donc les deux forces MN et MO, qui se détruiront, comme étant égales et contraires, et les deux forces ME et MF de même direction, qui s'ajouteront et donneront, à cause de ME = FK, une résultante représentée en grandeur et en direction par la diagonale MK.

Concluons donc que la résultante de deux forces quelconques, appliquées en un même point et représentées par des lignes prises sur leurs directions à partir de ce point, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces données.

29. Voici les conséquences qui se déduisent le plus immédiatement de ce théorème.

On voit d'abord que toutes les questions qu'on peut proposer sur la *composition* de deux forces en une seule et sur la *décomposition* d'une force en deux autres, sont ramenées à la résolution d'un triangle. En effet, les grandeurs de la résultante et des deux composantes sont représentées par les trois côtés MK, MG, GK, du triangle MGK; et les trois angles de ce triangle sont ceux que fait la résultante avec chacune des composantes et le supplément de l'angle compris entre les deux composantes. Il s'ensuit donc que trois de ces six choses, les trois forces et les trois angles compris entre leurs directions, étant données, on trouvera les trois autres en résolvant le triangle MGK; ce qui suppose une force au moins au nombre des données. Par exemple, soient P et Q les valeurs des deux composantes, et m l'angle compris entre leurs directions; on demande leur résultante R

et l'angle x qu'elle fait avec la force P. On aura d'abord l'équation

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos m,$$

pour déterminer la valeur de R; et celle de x se déduira de cette proportion :

$$\sin x : \sin m :: Q : R.$$

Si l'équilibre a lieu entre trois forces P, Q, S, appliquées en un même point M (fig. 9), suivant les directions MA, MB, MC, il faut que chacune de ces forces soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres; et comme cette résultante est comprise dans le plan de ces deux forces, il s'ensuit d'abord que les trois forces données doivent aussi être dans un même plan. Soit MD le prolongement de MC; la résultante de P et Q sera dirigée suivant MD, et si on la représente par R, on aura R = S. D'ailleurs, en comparant la force R à chacune de ses composantes, on a, d'après ce qu'on vient de dire,

$$R : Q :: \sin AMB : \sin AMD,$$
$$R : P :: \sin AMB : \sin BMD;$$

à cause de

$$\sin AMD = \sin AMC, \quad \sin BMD = \sin BMC,$$

il en résultera donc

$$S : Q : P :: \sin AMB : \sin AMC : \sin BMC;$$

ce qui montre que quand trois forces sont en équilibre autour d'un même point, la grandeur de chacune d'elles peut être représentée par le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

Du point O, pris sur la direction de la résultante R ou sur son prolongement, j'abaisse des perpendiculaires OE et OF sur les directions des composantes P et Q; on aura

$$OE = MO \sin AMD, \quad OF = MO \sin BMD.$$

Si donc on multiplie par MO les deux derniers termes de la proportion

$$P : Q :: \sin BMD : \sin AMD,$$

il en résultera

$$P : Q :: OF : OE;$$

en sorte que les composantes sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d'un point quelconque appartenant à la direction de la résultante. Réciproquement, si les composantes P et Q sont en raison inverse des perpendiculaires OE et OF, abaissées sur leurs directions, d'un point O pris dans leur plan, ce point appartiendra à la direction de la résultante; car, en divisant par MO les deux derniers termes de la dernière proportion, on obtient la précédente, qui détermine cette direction.

30. La résultante de deux forces étant connue, il est aisé d'en déduire celle d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point et situées ou non situées dans un même plan. On prendra d'abord la résultante de deux de ces forces; ensuite, on composera cette résultante avec une troisième force, ce qui donnera une seconde résultante, que l'on composera de même avec une quatrième force; et l'on continuera de même jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les forces données. Dans cette construction, il est aisé de voir que si les grandeurs de toutes les forces sont représentées par les côtés d'une portion de polygone, parallèles à leurs directions et tracées dans le sens de leurs actions, la résultante sera représentée, en grandeur et en direction, par la droite qui joindra les deux extrémités de cette ligne brisée et fermera le polygone. L'ordre dans lequel les côtés parallèles aux forces se succéderont, sera indifférent. Quand le polygone se fermera de lui-même, la résultante sera nulle, et les forces données se feront équilibre.

Il suit de là que quand les forces données sont au nombre de trois, non situées dans un même plan, leur résultante est, en grandeur et en direction, la diagonale du parallélépipède dont ces trois forces sont les côtés adjacens.

31. On peut effectuer d'une manière plus simple cette réduction d'un nombre quelconque de forces à une seule, en considérant d'abord le cas particulier de trois forces rectangulaires, auquel on ramène ensuite le cas général.

Soient X, Y, Z, les trois composantes, R leur résultante, a, b, c les angles qu'elle fait avec X, Y, Z. D'après ce qu'on vient de voir, R est la diagonale du parallélépipède dont X, Y, Z sont les trois côtés adjacens; or, ce parallélépipède étant rectangle, il s'ensuit qu'on aura

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \qquad (a)$$

Il en résulte aussi que si l'on joint l'extrémité de la diagonale R à celles des trois côtés X, Y, Z, on formera trois triangles rectangles, dont R sera l'hypoténuse commune; d'où l'on conclura

$$X = R \cos a, \quad Y = R \cos b, \quad Z = R \cos c; \quad (b)$$

équations qui s'accordent avec la précédente, à cause que les trois angles a, b, c, sont liés entre eux par cette équation (n° 6)

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Lorsque les composantes X, Y, Z, seront données, l'équation (a) fera connaître la valeur de la résultante, et les équations (b) en détermineront la direction au moyen des trois angles a, b, c; si, au contraire, la force R est donnée, et qu'il s'agisse de la décomposer en trois forces rectangulaires X, Y, Z, qui fassent avec elle des angles donnés a, b, c, les valeurs des forces demandées seront immédiatement déterminées par les l'équations (b).

Si l'une des composantes, la force Z par exem-

ple, est nulle, R n'est plus la résultante que des deux forces X et Y; elle est comprise dans leur plan, et sa direction dépend seulement des deux angles a et b. Ces angles et la valeur de R sont alors déterminés par les équations

$$R^2 = X^2 + Y^2, \quad X = R \cos a, \quad Y = R \cos b.$$

32. Supposons actuellement que M (fig. 1re) soit le point d'application d'un nombre quelconque de forces données. Représentons ces forces par P, P', P'', etc.; et, pour fixer les idées, supposons que la droite MD soit la direction de la force P. Les directions des autres forces sont inutiles à indiquer dans la figure. Soient α, β, γ, les angles que fait la direction MD avec les trois axes rectangulaires MA, MB, MC, menés arbitrairement par le point M. Désignons de même par α', β', γ', les angles que fait la force P' avec ces mêmes axes; par α'', β'', γ'', ceux qui répondent à la force P''; etc. Tous ces angles sont donnés et doivent s'étendre depuis zéro jusqu'à 180° (n° 7), afin que les forces P, P', P'', etc., puissent avoir toutes les positions possibles autour du point M.

Décomposons chacune de ces forces en trois autres dirigées suivant les axes MA, MB, MC. Les composantes de la force P, seront P cos α, P cos β, P cos γ; celles de la force P' seront P' cos α', P' cos β', P' cos γ', etc.; et ces composantes agiront suivant les axes ou suivant leurs prolongemens, selon qu'elles seront positives ou négatives. Par exemple, la direction MD tombant, ainsi que l'axe MC, au-dessus du plan AMB des deux autres axes, la composante P cos γ de la force P tend à élever le point M, c'est-à-dire qu'elle agit suivant MC; et, dans ce cas, P cos γ est une quantité positive, puisqu'on a $\gamma < 90°$. Au contraire, si cette direction MD tombait au-dessous du plan AMB, on aurait $\gamma > 90°$; la composante P cos γ serait négative, et, en même temps, elle tendrait à abaisser le point M, c'est-à-dire qu'elle agirait suivant le prolongement de MC. En ayant donc égard aux signes des composantes, on voit, d'après ce qu'on a dit dans le n° 24, que toutes les forces dirigées suivant un même axe et son prolongement, se réduisent à une seule, égale à leur somme.

De cette manière, les forces données P, P', P'', etc., seront remplacées par trois forces rectangulaires; et en désignant celles-ci par X, Y, Z, on aura

$$\left.\begin{aligned} X &= P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.}, \\ Y &= P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.}, \\ Z &= P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Les valeurs de X, Y, Z, pourront être positives ou négatives, et leurs signes feront connaître le sens de leur action. Si la force X est positive, c'est qu'elle agit suivant l'axe MA ou dans le sens des composantes P cos α, P' cos α', etc., qui sont positives; si elle est négative, il en faut conclure qu'elle agit suivant le prolongement de MA ou dans le sens des composantes négatives; et de même pour les forces Y et Z.

Cela posé, soit R la résultante des forces données P, P', P'', etc., ou des trois forces X, Y, Z; soient aussi a, b, c, les angles que sa direction inconnue fait avec les axes MA, MB, MC. Les valeurs de R, a, b, c, seront données par les équations (a) et (b), dans lesquelles on mettra les formules (c) à la place de X, Y, Z. Les angles a, b, c, pourront être aigus ou obtus; à cause que la force R doit toujours être une quantité positive, les signes de leurs cosinus seront les mêmes que ceux des quantités X, Y, Z, en vertu des équations (b). De cette manière, la force R sera complètement déterminée en grandeur et en direction.

33. La grandeur de la résultante R ne saurait dépendre de la direction arbitraire des axes MA, MB, MC; elle dépend seulement de la grandeur des forces données et des angles compris entre leurs directions; et, en effet, on en peut trouver une expression qui ne contienne que ces quantités.

Pour cela, désignons par PMP', PMP'', P'MP'', etc., les angles compris entre les directions des forces P et P', P et P'', P' et P'', etc. D'après l'équation (2) du n° 9, nous aurons

$$\cos PMP' = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma',$$
$$\cos PMP'' = \cos \alpha \cos \alpha'' + \cos \beta \cos \beta'' + \cos \gamma \cos \gamma'',$$
$$\cos P'MP'' = \cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma'',$$
etc.

Nous aurons aussi

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$
$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1,$$
$$\cos^2 \alpha'' + \cos^2 \beta'' + \cos^2 \gamma'' = 1,$$
etc.;

et, cela étant, si l'on ajoute les carrés des formules (c), et qu'on ait égard à l'équation (a), il vient.

$$\begin{aligned} R^2 = {} & P^2 + P'^2 + P''^2 + \text{etc.} \\ & + 2PP' \cos PMP' + 2PP'' \cos PMP'' \\ & + 2P'P'' \cos P'MP'' + \text{etc.}, \end{aligned}$$

pour le carré de la valeur R dont il s'agit.

34. On déduit aussi des équations (b) et (c) une propriété de la résultante, qui nous sera utile dans un des numéros suivans.

Dans une direction quelconque, je mène par le point M une droite, dont j'appelle O l'autre extrémité. Soient g, h, k, les angles AMO, BMO, CMO, que cette droite fait avec les trois axes MA, MB, MC. Désignons par RMO, PMO, P'MO, etc., les angles compris entre cette même droite MO et les directions des forces R, P, P' P'', etc; on aura, comme tout à l'heure

$$\cos RMO = \cos g \cos a + \cos h \cos b + \cos k \cos c,$$
$$\cos PMO = \cos g \cos \alpha + \cos h \cos \beta + \cos k \cos \gamma,$$
$$\cos P'MO = \cos g \cos \alpha' + \cos h \cos \beta' + \cos k \cos \gamma',$$
etc.

D'après la première de ces formules et les équations (b), on aura

$$R \cos RMO = X \cos g + Y \cos h + Z \cos k ;$$

et, en vertu des formules suivantes, si l'on ajoute les équations (c) après les avoir multipliées, la première par $\cos g$, la deuxième par $\cos h$, la troisième par $\cos k$, il en résultera

$$R \cos RMO = P \cos PMO + P' \cos P'MO + \text{etc.} ;$$

ce qui montre déjà que la composante de la résultante R, suivant une dirction quelconque MO, est égale à la somme des composantes de P, P', P'' etc., suivant cette même direction.

Cela posé, je projette la droite MO sur les directions des forces R, P, P', P'', etc.; j'appele r, p, p', p'', etc., ses projections, de sorte qu'on ait

$$r = MO \cos RMO ,$$
$$p = MO \cos PMO , \quad p' = MO \cos P'MO , \quad \text{etc.} ,$$

en considérant chacune des quantités r, p, p', p'', etc., comme positive ou comme négative, selon que la projection qu'elle représente, tombe sur la direction même de la force ou sur son prolongement. Si donc on multiplie par MO l'équation précédente, on aura

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} ; \qquad (d)$$

ce qui renferme la propriété de la résultante qu'il s'agissait de démontrer.

35. Pour que les forces P, P', P'', etc., soient en équilibre, il suffit que leur résultante R soit nulle, et cette condition est nécessaire si leur point d'application M est entièrement libre; mais l'équation $R = 0$, ou

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 ,$$

ne peut avoir lieu, à moins qu'on ait séparément

$$X = 0 , \quad Y = 0 , \quad Z = 0 ,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations (c),

$$\left.\begin{aligned} P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = 0 , \\ P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.} = 0 , \\ P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.} = 0 , \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Telles sont donc les *équations d'équilibre* d'un point matériel qu'on suppose entièrement libre. Dans cet état, chacune des forces qui le sollicitent doit être égale et directement contraire à la résultante de toutes les autres; c'est en effet, ce qu'il est aisé de vérifier.

Soit R' la résultante des forces P', P'', etc. Appelons a', b', c', les angles qu'elle fait avec les axes MA, MB, MC, et faisons, pour abréger,

$$X' = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} ,$$
$$Y' = P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.} ,$$
$$Z' = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.} ;$$

nous aurons, d'après le n° 32,

$$X' = R' \cos a' , \quad Y' = R' \cos b' , \quad Z' = R' \cos c' ,$$

et par conséquent, en vertu des équations d'équilibre,

$$P \cos \alpha = - R' \cos a' ,$$
$$P \cos \beta = - R' \cos b' ,$$
$$P \cos \gamma = - R' \cos c' .$$

En ajoutant ces équations, après avoir élevé leurs deux membres au carré, on a

$$P^2 = R^2 ,$$

à cause de (n° 6)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 ,$$
$$\cos^2 a' + \cos^2 b' + \cos^2 c' = 1 ;$$

on aura donc $P = \pm R'$; mais comme ces forces doivent être toutes deux des quantités positives, il faut prendre $P = R'$. Les équations précédentes deviennent alors

$$\cos \alpha = - \cos a' , \quad \cos \beta = - \cos b' , \quad \cos \gamma = - \cos c' ;$$

par conséquent, les angles α, β, γ, sont suppléments de a', b', c', et répondent à une force dont la direction est le prolongement de la force R' (n° 7). Il s'ensuit donc que la force P est égale et directement opposée à la résultante R' de toutes les autres forces P', P'', etc.; ce qu'il s'agissait de vérifier.

36. Si le point M, auquel sont appliquées les forces P, P', P'', etc., est assujetti à rester sur une surface donnée, il ne sera plus nécessaire, pour l'équilibre, que leur résultante soit nulle; il suffira qu'elle soit normale à la surface, puisqu'alors elle ne pourra faire glisser le point M dans aucun sens sur cette surface; et, de plus, cette condition sera nécessaire; car si elle n'était pas remplie, la résultante se décomposerait en deux forces, l'une normale à la surface et qui serait détruite, l'autre tangente et que rien n'empêcherait de faire glisser le mobile. On n'aurait donc qu'à chercher dans chaque cas, la direction de la résultante des forces P, P', P'', etc., et à examiner si elle est perpendiculaire à la surface donnée, pour savoir si l'équilibre existera; mais il vaut mieux, comme nous venons de le faire pour un point libre, exprimer les conditions de l'équilibre par des équations entre les données de la question.

Or, la composante normale de chacune des forces qui agissent sur le point M, est détruite par la résistance de la surface; par conséquent, cette résistance équivaut à une force égale et contraire à la totalité des forces détruites. On conçoit donc que l'on peut faire abstraction de la surface donnée, et considérer le point matériel comme entièrement libre, pourvu que l'on joigne aux forces données P, P', P'', etc., une nouvelle force de grandeur inconnue et perpendiculaire à cette surface.

Soient donc N cette force, et λ, μ, ν, les angles que sa direction fait avec les axes MA, MB, MC; chacune des équations d'équilibre qu'on vient de

trouver sera augmentée d'un nouveau terme, de sorte qu'au lieu des équations (e), on aura

$$\left.\begin{array}{l} N\cos\lambda+P\cos\alpha+P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+\text{etc.}=0,\\ N\cos\mu+P\cos\beta+P'\cos\beta'+P''\cos\beta''+\text{etc.}=0,\\ N\cos\nu+P\cos\gamma+P'\cos\gamma'+P''\cos\gamma''+\text{etc.}=0.\end{array}\right\}(f)$$

Je désigne par x, y, z, les trois coordonnées de M rapportées à des axes parrallèles à MA, MB, MC, et par $L=0$ l'équation de la surface donnée; la direction de la force N étant, par hypothèse, celle de la normale au point M, on aura, d'après les équations (5) du n° 21,

$$\cos\lambda=V\frac{dL}{dx},\quad \cos\mu=V\frac{dL}{dy},\quad \cos\nu=V\frac{dL}{dz},$$

en faisant, pour abréger,

$$V=\pm\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Le signe de V sera inconnu, parce qu'on ne sait pas d'avance suivant quelle partie de la normale doit être dirigée la force N; mais V disparaît lorsqu'on élimine N entre les équations (f); et si l'on a égard aux formules (c), on trouve

$$Y\frac{dL}{dz}-X\frac{dL}{dy}=0,\quad Z\frac{dL}{dx}-X\frac{dL}{dz}=0,\quad (g)$$

pour les deux équations nécessaires et suffisantes de l'équilibre d'un point matériel assujetti à demeurer sur une surface donnée.

37. Si la position de ce point sur cette surface n'est pas connue, les équations (g), jointes à l'équation donnée $L=0$, serviront à déterminer les coordonnées des différens points de cette surface, où le mobile pourra demeurer en équilibre. Lorsque sa position sera donnée, on aura seulement à vérifier si les coordonnées x, y, z, des points d'application des forces données satisfont aux équations (g). Mais, dans ce cas, on aura des équations plus simples en faisant coïncider l'un des axes MA, MB, MC, le premier, par exemple, avec l'une des deux parties de la normale; d'où il résultera

$$\cos\lambda=\pm 1,\quad \cos\mu=0,\quad \cos\nu=0;$$

ce qui change les équations (f) en celles-ci :

$$\begin{array}{l} \pm N+P\cos\alpha+P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+\text{etc.}=0,\\ P\cos\beta+P'\cos\beta'+P''\cos\beta''+\text{etc.}=0,\\ P\cos\gamma+P'\cos\gamma'+P''\cos\gamma''+\text{etc.}=0.\end{array}$$

Ces deux dernières équations font voir, ce qui est d'ailleurs évident, que dans le plan tangent à la surface donnée, les composantes des forces appliquées au mobile doivent se faire équilibre, comme si cette surface n'existait pas.

La résistance N, que la surface oppose aux forces P, P', P'', etc., est égale et contraire à la *pression* qu'elle en éprouve. En vertu des équations (f), cette pression, dans l'état d'équilibre, est la résultante même de ces forces. Dans la pratique, il en faudra calculer la grandeur au moyen de l'équation (a), pour savoir si la surface est capable de la supporter. Si le mobile est seulement posé sur cette surface, qui sera celle d'un corps solide, il faudra, de plus, que le sens de cette pression soit tel qu'elle appuie le mobile sur cette surface; condition qui ne peut être exprimée par une équation, et qu'on devra vérifier dans chaque cas, en déterminant la direction de cette force d'après les équations (b). Cette vérification se fera plus simplement au moyen de la première des trois équations précédentes.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que la partie de la normale avec laquelle ona fait coïncider l'axe MA, soit la partie située dans la concavité de la surface. On saura si les angles donnés α, α', α'', etc., sont aigus ou obtus; et le signe de la somme X des composantes dirigées suivant cette droite sera connu. La quantité N devant être positive, il faudra, dans l'équation dont il s'agit, c'est-à-dire,

$$\pm N+X=0,$$

prendre le signe — ou le signe + devant N, selon que la somme X sera positive ou négative. Dans le premier cas, on aura $\cos\lambda=-1$, et la pression contraire à N sera dirigée suivant MA; dans le second cas, on aura $\cos\lambda=1$, et la pression agira suivant le prolongement de cette partie déterminée de la normale.

38. Lorsque le point matériel M sur lequel agissent les forces P, P', P'', etc., sera assujetti à rester sur deux surfaces données ou sur leur courbe d'intersection, il suffira, pour l'équilibre, que la résultante de toutes ces forces puisse se décomposer en deux forces perpendiculaires aux surfaces données, et qui seront détruites par leurs résistances. En joignant donc aux forces P, P', P'', etc., deux forces normales à ces surfaces, mais inconnues en grandeur, on pourra faire abstraction des surfaces, et considérer le mobile comme entièrememt libre.

N et N' étant donc ces nouvelles forces; λ, μ, ν, les angles qui déterminent la direction de N par rapport aux axes MA, MB, MC, et λ', μ', ν', ceux qui déterminent de même la direction de N'; les équations (e) deviendront

$$\left.\begin{array}{l} N\cos\lambda+N'\cos\lambda'+P\cos\alpha+P'\cos\alpha'+\text{etc.}=0,\\ N\cos\mu+N'\cos\mu'+P\cos\beta+P'\cos\beta'+\text{etc.}=0,\\ N\cos\nu+N'\cos\nu'+P\cos\gamma+P'\cos\gamma'+\text{etc.}=0.\end{array}\right\}(h)$$

D'ailleurs, en représentant par x, y, z, les coordonnées du point M, rapportées à des axes parallèles à MA, MB, MC, et par $L=0$ et $L'=0$, les équations des deux surfaces données, les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, seront les mêmes que précédemment, et celles de $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, s'en déduiront en y changeant L en L'. Si l'on substitue ces valeurs dans les trois équations (h), et qu'on

élimine ensuite N et N' entre elles, on aura l'équation d'équilibre à laquelle devront satisfaire les forces données P, P', P'', etc.; ou bien, si la position du mobile n'est pas donnée sur l'intersection des deux surfaces, cette équation d'équilibre, et les équations $L=0$ et $L'=0$, détermineront ses trois coordonnées x, y, z.

Quand la position du mobile est donnée sur la courbe où il doit rester, on obtient immédiatement l'équation d'équilibre des forces P, P', P'', etc., en prenant les axes MB et MC, auxquels répondent les angles μ, ζ, ζ', etc., ν, γ, γ', etc., dans le plan des normales aux deux surfaces données. Le troisième axe MA tombe alors sur la tangente à leur courbe d'intersection; il est donc perpendiculaire aux forces normales N et N'; en sorte que l'on a $\lambda=90°$, $\lambda'=90°$, et, en vertu de la première équation (h),

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0,$$

pour l'équation demandée.

Cette équation exprime que la somme des composantes de P, P', P'', etc., tangentes à l'intersection des deux surfaces données, est égale à zéro; ce qui est, en effet, la condition pour que le point M ne puisse pas glisser sur cette courbe. Après s'être assuré qu'elle est remplie, on déterminera les valeurs des forces N et N', et le sens dans lequel elles agissent, au moyen des deux dernières équations (h). Si l'on prend ensuite des forces égales et contraires à N et N', et qu'on les réduise à une seule par la règle du parallélogramme des forces, celle-ci sera la résultante des forces P, P', P'', etc., et fera connaître la pression exercée sur la courbe donnée, à laquelle elle sera perpendiculaire.

39. Par ce qui précède, on voit que quand le mobile est astreint à demeurer sur une courbe donnée, il n'y a qu'une équation d'équilibre; qu'il y en a deux lorsqu'il peut se mouvoir sur une surface donnée, et trois lorsqu'il est entièrement libre; en sorte que le nombre de ces équations augmente, comme cela doit être effectivement, à mesure que les mouvemens possibles du mobile sont moins limités. Ces diverses équations peuvent être renfermées dans une seule formule, qui deviendra, par la suite, l'équation générale de l'équilibre, applicable à un système quelconque de points matériels.

Pour obtenir cette formule, supposons que le mobile soit transporté d'un point M, qu'il occupe dans sa position d'équilibre, en un autre point O infiniment voisin de M, et tel que ce déplacement soit compatible avec la condition à laquelle le mobile est assujetti, s'il n'est pas entièrement libre. Désignons par r, p, p', p'', etc., les projections de la droite infiniment petite MO sur les directions des forces R, P, P', P''; etc., dans la première position du mobile; et considérons chacune de ces projections comme une quantité positive ou négative, selon qu'elle tombe sur la direction même de la force à laquelle elle répond, ou sur son prolongement. Si l'on suppose que la force R soit la résultante des forces P, P', P'', etc., le produit Rr sera toujours nul dans le cas de l'équilibre : il sera nul pour un point matériel entièrement libre, parce qu'alors la résultante R devra être égale à zéro; il le sera encore pour un point assujetti à demeurer sur une surface ou sur une courbe donnée, parce que, d'une part, la force R devra être dirigée suivant la normale, et que, d'un autre côté, la droite infiniment petite MO appartiendra au plan tangent ou à la tangente, ce qui rendra nulle sa projection r sur la direction R. D'après l'équation (d), qu'on a démontrée précédemment, et qui a également lieu quand la droite MO est infiniment petite, on aura donc

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0, \qquad (i)$$

toutes les fois que les forces P, P', P'', etc., se feront équilibre. Réciproquement, l'équilibre existera quand cette équation aura lieu pour tous les déplacemens possibles d'un point matériel entièrement libre, ou astreint à rester sur une surface ou sur une courbe donnée.

On appelle *vitesse virtuelle* d'un point matériel en équilibre, toute droite infiniment petite, telle que MO, qu'on peut lui faire décrire, en observant les conditions auxquelles il peut être assujetti; et le principe d'équilibre contenu dans l'équation qu'on vient d'écrire, sur lequel nous reviendrons par la suite, se nomme le *principe des vitesses virtuelles*. En l'appliquant successivement à un point matériel entièrement libre, assujetti à rester sur une surface, astreint à demeurer sur une courbe, on retrouvera sans difficulté les équations d'équilibre que nous avons précédemment obtenues. Chacune des équations (e) se déduira de la formule (i), en prenant pour MO le déplacement de M sur l'un des axes MA, MB, MC; on obtiendra les équations d'équilibre qui ont lieu dans le cas d'un point assujetti à rester sur une surface donnée, en considérant ses déplacemens suivant deux axes tracés dans le plan tangent; et la formule (i) fournit immédiatement l'équation d'équilibre d'un point astreint à rester sur une courbe donnée, en prenant pour MO l'élément de cette courbe, et pour p, p', p'', etc., les projections de cet élément sur les directions des forces P, P', P'', etc. Les angles que ces directions font avec la tangente à la courbe, étant α, α', α'', etc., on aura alors

$$p = \text{MO}\cos\alpha,\quad p' = \text{MO}\cos\alpha',\quad p'' = \text{MO}\cos\alpha''; \text{ etc.};$$

en supprimant le facteur MO commun à tous les termes de l'équation (i), il en résultera

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0.$$

comme précédemment.

CHAPITRE II.

DE L'ÉQUILIBRE DU LEVIER.

40. On considérera ici un *levier* comme une ligne droite ou courbe ECF (fig. 10) inextensible, et de forme invariable, qui ne peut que tourner, dans un plan, autour d'un de ses points C supposé fixe, que l'on appelle le point d'*appui* du levier. Ordinairement il n'y a que deux forces qui soient appliquées à cette *machine*, et dont l'une a pour objet de tenir l'autre en équilibre; la première s'appelle la *puissance*, et la seconde la *résistance*. Mais, pour plus de généralité, nous supposerons qu'un nombre quelconque de forces, dirigées dans le plan du levier, agissent en différens points de cette ligne; et il s'agira de trouver les conditions de leur équilibre.

Je ne me propose pas, dans cet ouvrage, d'appliquer aux diverses machines les lois de l'équilibre qui y seront exposées. Pour ce qui regarde les machines simples, je renverrai aux Traités élémentaires de Statique; mais la loi de l'équilibre dans le levier étant un principe de la Mécanique, il est nécessaire de nous en occuper; et l'on va montrer comment ce principe est lié à celui de la composition des forces qui agissent sur un point isolé.

41. Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un corps qu'on suppose de forme invariable, on peut transporter le point d'application de chacune de ces forces en un autre point du corps pris sur sa direction ou sur son prolongement. Si une force donnée P agit, par exemple, à l'extrémité E du levier, suivant la droite AE, et que M soit un autre point appartenant à cette direction, qu'on suppose lié au levier d'une manière invariable, il est permis de remplacer la force P par une autre force de même intensité, agissant au point M suivant la droite MA. En effet, on peut d'abord appliquer au point M deux forces égales entre elles, agissant en sens contraires, l'une suivant MA, l'autre suivant son prolongement MA'; si, de plus, on suppose que chacune de ces forces soit égale à P, celle qui agit suivant MA' détruira la force P appliquée au point E suivant EA, puisque ces deux forces égales agissent en sens contraires aux extrémités de la droite ME, de longueur invariable, par hypothèse; il ne restera donc plus que la force P agissant au point M dans la direction MA, et par laquelle la force donnée P, qui agissait au point E, se trouvera remplacée.

Les forces agissent souvent sur les corps qu'elles mettent en mouvement ou qu'elles tendent à mouvoir, soit en les tirant par le moyen d'un fil qui leur est attaché, soit en les poussant par le moyen d'une barre appuyée contre leur surface. Ce fil ou cette barre s'étend ou se contracte plus ou moins; c'est quand ils ont cessé de s'alonger ou de se raccourcir qu'on les considère comme des lignes invariables qui représentent la direction de chaque force, dont l'action est la même alors que si elle s'exerçait immédiatement aux points de la surface du mobile où ces lignes viennent aboutir. Un levier n'est pas non plus, comme on le suppose ici, une ligne de forme invariable; c'est une barre qui fléchit un tant soit peu, et s'étend ou se contracte aussi d'une petite quantité, en raison des forces qui y sont appliquées. La forme qu'il doit prendre serait très difficile à déterminer d'avance; mais c'est quand il y est parvenu qu'on le considère comme invariable, et c'est à cette figure, très peu différente de sa forme naturelle, que se rapporteront les conditions d'équilibre qu'il s'agit de trouver.

42. Supposons qu'une seconde force Q agisse à l'autre extrémité F du levier, suivant la droite FB, et que les deux directions EA et FB soient comprises dans le plan où le levier peut tourner; ces deux droites, ou leurs prolongemens, viendront se couper en un certain point M, que l'on pourra prendre, d'après ce qu'on vient de prouver, pour le point d'application commun à P et Q. Cela étant, par la règle du parallélogramme des forces, on déterminera la résultante de ces deux forces, de laquelle M sera aussi le point d'application. Or, pour qu'elle soit détruite et que le levier demeure en équilibre, il sera nécessaire que sa direction vienne passer par le point d'appui C; et cela suffira, puisqu'en y transportant cette résultante, elle sera détruite par la résistance de ce point fixe. D'après ce qu'on

a vu dans le n° 29, si l'on abaisse du point C des perpendiculaires CG et CH sur les directions des forces P et Q, on aura donc, dans le cas de l'équilibre,

$$P : Q :: CH : CG;$$

et, réciproquement, l'équilibre existera quand cette proportion aura lieu. Par conséquent, en appelant p et q les perpendiculaires CG et CH, l'équation d'équilibre sera

$$Pp = Qq.$$

On appelle *moment d'une force par rapport à un point*, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction. Ainsi, la condition d'équilibre dans le levier consiste en ce que les momens de la puissance et de la résistance, pris par rapport au point d'appui, sont égaux; ces deux forces tendant d'ailleurs à faire tourner le levier en sens opposés.

Si l'on suppose les droites CG et CH liées invariablement au levier, on pourra prendre G et H pour les points d'application des forces P et Q, et remplacer le levier de figure quelconque ECF par le levier coudé GCH (fig. 11). Les perpendiculaires CG et CH s'appellent les *bras de levier*, de la puissance et de la résistance. La condition de l'équilibre ne dépend pas de la grandeur de l'angle GCH; et c'est aussi ce que l'on peut voir *à priori*.

En effet, si du point C et d'un rayon CH on décrit l'arc de cercle HH', qu'on le suppose lié invariablement au levier, et qu'on applique au point H' deux forces égales à Q, agissant en sens contraires, suivant les parties H'B' et H'B'' de la tangente en ce point, il est évident que la force Q, dirigée suivant H'B'', sera détruite par la force Q dirigée suivant HB; car ces deux forces tendent à faire tourner le système en des sens opposés, et il n'y aurait pas de raison pour qu'il obéît plutôt à l'une qu'à l'autre. La seconde de ces deux forces se trouvera donc remplacée par la force Q dirigée suivant H'B', et l'angle GCH sera changé dans l'angle GCH', plus grand ou plus petit, sans que l'équilibre soit troublé.

Par ce changement, l'angle des deux bras du levier pourra devenir 180° ou zéro; alors le levier sera droit; la puissance et la résistance seront des forces parallèles dirigées dans le même sens ou en sens contraires; et, pour l'équilibre, il faudra toujours que leurs intensités soient en raison inverse des longueurs de leurs bras de levier.

43. Si l'on appelle R la résultante des deux forces P et Q concourantes au point M (fig. 10), et m l'angle AMB compris entre leurs directions, on aura (n° 29)

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos m;$$

et la valeur de R fera connaître la *charge* que le point d'appui C aura à supporter dans l'état d'équilibre. Appliquée en ce point, la force R aura pour direction la droite CD, prolongement de MC. La figure 10 suppose le point C situé entre les points d'application E et F de la puissance et de la résistance. Le contraire a lieu dans la figure 12; mais les raisonnemens qu'on vient de faire s'appliquent à ces deux cas : ils diffèrent l'un de l'autre en ce que, dans le premier cas, les forces P et Q agissent de deux côtés différens du levier, et l'angle AMB est aigu, au lieu que, dans le second cas, elles agissent d'un même côté, et l'angle AMB est obtus.

Les trois points E, F, C, restant les mêmes, si le point de concours M des trois forces P, Q, R, s'éloigne à l'infini, ces forces deviendront parallèles. Dans le cas de la figure 10, l'angle m devient alors infiniment petit; on a $\cos m = 1$, et conséquemment

$$R = P + Q.$$

Dans le second cas, c'est le supplément de l'angle m qui devient infiniment petit; on a donc $\cos m = -1$, et

$$R = Q - P,$$

en supposant $P < Q$. Par conséquent, la résultante de deux forces parallèles est égale à leur somme ou à leur différence, selon que ces forces agissent dans le même sens ou en sens opposés; et quand leurs directions sont contraires, la résultante agit dans le sens de la plus grande. Dans ces deux cas, les composantes P et Q sont en raison inverse de leurs distances CG et CH à la résultante.

Cela étant, si l'on mène une perpendiculaire commune aux trois forces parallèles, et qu'on appelle a la partie GH de cette droite (fig. 13 et 14) comprise entre les deux composantes P et Q, et x la distance CH de la résultante R à la composante Q qu'on suppose la plus grande, on aura

$$P : Q :: x : a \mp x,$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que P et Q agiront dans le même sens (fig. 13) ou en sens contraires (fig. 14). On en déduit

$$P : Q \pm P :: x : a,$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{aP}{Q \pm P};$$

ce qui fera connaître la position de la résultante, dont la valeur sera en même temps $Q \pm P$.

44. Lorsque les forces P et Q agissent en sens contraires, et qu'elles diffèrent très peu l'une de l'autre, leur résultante, toujours dirigée dans le sens de la plus grande, se trouvera située à une très grande distance des forces données. Mais quand elles seront rigoureusement égales, cette distance deviendra infinie; ce qui signifie que deux forces égales, parallèles et agissant en sens opposés, ne peuvent être remplacées par une seule force; et, en effet, il n'y aurait aucune raison pour que cette

force unique agit plutôt dans un sens que dans l'autre.

Deux semblables forces agissant aux extrémités d'un droite GH (fig. 15), feront tourner cette ligne autour de son milieu K; effet qui, évidemment, ne saurait être produit par l'action d'une seule force. On peut les remplacer d'une infinité de manières différentes par deux autres forces qui tombent dans le même cas; car on ne changera rien à leur action en appliquant, par exemple, aux points G et H suivant les prolongemens GE et HF de la droite GH, des forces égales et de grandeur quelconque; or, la résultante des forces dirigées suivant GA et GE, et celle des forces dirigées suivant HB et HF, seront encore des forces égales, parallèles et dirigées en sens opposés, suivant des droites GC et HD, et ces résultantes remplaceront les forces primitives qui agissaient suivant GA et HB. Si l'on appelle P la grandeur commune de ces deux forces, et a leur distance mutuelle, l'une et l'autre de ces deux quantités changeront par l'opération que nous indiquons; mais leur produit a P demeurera constant, ainsi qu'on le prouvera tout à l'heure.

45. Au reste, ce cas particulier est le seul dans lequel un système d'un nombre quelconque de forces P, P', P'', etc., comprises dans un même plan et agissant sur des points matériels liés entre eux d'une manière invariable, ne puisse pas se réduire à une seule force. En effet, soit que les deux forces P et P' concourent en un point, ou qu'elles soient parallèles, on les réduira à une seule force Q, par la règle du parallélogramme des forces, ou par celle du numéro précédent. On réduira de même à une seule force Q', cette première résultante Q et P''; puis à une seule force Q'', la seconde résultante Q' et P''; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait réduit toutes les forces données à deux seulement, qui se réduiront elles-mêmes à une seule force R, à moins qu'elles ne tombent dans le cas d'exception dont il s'agit.

Dans le cas général, cette force R est la résultante des forces données P, P', P'', etc.; et si l'on joint aux composantes une force R' égale et contraire à R, il y aura équilibre dans le système. La grandeur de R et sa position dans le plan des forces données ne dépendra nullement de l'ordre dans lequel on aura pris ces forces dans les réductions successives qu'on vient d'indiquer; car, en changeant cet ordre, si l'on parvenait à une force S différente de R en grandeur ou en direction, il faudrait que l'une de ces deux forces prise en sens contraire fît équilibre à l'autre; ce qui serait impossible.

Pour l'équilibre des forces P, P', P'', etc., quand elles seront appliquées à un levier situé dans leur plan, il faudra d'abord qu'elles se réduisent à une seule force; car si elles se réduisaient à deux forces; parallèles S et S' non réductibles à une seule, et que S' fût la plus rapprochée du point d'appui, on pourrait décomposer S' en deux forces Q et Q', parallèles et agissant dans le même sens, dont la première serait directement opposée à S et la seconde passerait par le point d'appui: ces deux composantes seraient l'une et l'autre moindres que S' ou S, la force Q' serait détruite, et il ne resterait qu'une force S — Q, qui ferait tourner le levier dans le sens de S. Les forces données étant réduites à une force unique R, il faudra, en outre, pour l'équilibre du levier, que cette force vienne passer par son point d'appui. Cette condition s'exprimera par une équation, au moyen du théorème que nous allons démontrer.

46. Considérons d'abord deux forces seulement et leur résultante. Le moment de cette résultante, par rapport à un point situé dans le plan des trois forces, sera égal à la somme ou à la différence des momens des deux composantes par rapport au même point: à la différence, quand le centre des momens est situé dans l'angle des composantes, ou, dans son opposé, au sommet; à la somme, quand ce point est hors de ces deux angles.

En effet, soient P et P' ces deux forces, MA et MA' (fig. 16 et 17) leurs directions, Q leur résultante agissant suivant MB, C le centre des momens, p, p', q, les perpendiculaires Ca, Ca', Cb, abaissées du point C sur la direction de P, P', Q. Décomposons chacune de ces trois forces en deux autres, dirigées suivant la droite MC et suivant la perpendiculaire KMK' à cette droite; et considérons les composantes perpendiculaires. On a évidemment

$$\cos \mathrm{BMK} = \sin \mathrm{BMC} = \frac{q}{c},$$

en désignant par c la longueur de la droite MC; donc la composante de Q suivant MK sera égale à $\frac{Qq}{c}$. De même, les composantes de P et P' perpendiculaires à MC seront $\frac{Pp}{c}$ et $\frac{P'p'}{c}$. Elles agissent en sens contraire, quand la ligne MC traverse l'angle AMA' (fig. 16), et dans le même sens, quand elle tombe hors de cet angle. Or, la somme de ces composantes, dans le second cas, et l'excès de la plus grande sur la plus petite, dans le premier, doit reproduire la composante de Q, puisque Q est la résultante de P et P'; en supposant la composante de P plus grande que celle de P', et supprimant le diviseur commun c, on aura donc

$$Qq = Pp \pm P'p';$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Si l'on imagine que le point C soit fixe et que les perpendiculaires Ca, Ca', Cb, forment un système invariable, les forces P, P', Q, qui peuvent être censées agir aux extrémités a, a', b, de ces droites, ne pourront produire qu'un mouvement de rotation autour du centre des momens. Or, l'inspection de la figure 17, à laquelle répond le signe supérieur dans l'équation précédente, montre que quand le point C tombe hors de l'angle AMA', et de

son opposé au sommet, les trois forces P, P', Q, tendent à faire tourner leurs points d'application dans le même sens autour du point C; au contraire, lorsque ce point tombe dans l'un de ces deux angles, la figure 16, qui répond au signe inférieur, fait voir que les forces P et P' tendent à faire tourner les points a et a' en sens opposés; et l'on voit aussi que, dans ce cas, la résultante Q tend à faire tourner son point d'application dans le même sens que la composante qui a le plus grand moment. D'après cette remarque, le théorème qu'on vient de démontrer revient à dire que le moment de la résultante de deux forces est égal à la somme ou à la différence des momens de ces deux forces, selon que les composantes tendent à faire tourner leurs points d'application dans le même sens ou en sens opposés autour du centre des momens, et que la résultante tend à faire tourner dans le sens de la composante qui a le plus grand moment.

Ce théorème ayant lieu pour des forces dont les directions font un angle quelconque, doit encore subsister lorsqu'elles deviennent parallèles; c'est effectivement une conséquence facile à déduire de de la composition des forces de ce genre (nº 43).

47. L'avantage de ce dernier énoncé est de pouvoir facilement s'étendre à un nombre quelconque de forces P, P', P'', etc., dirigées dans un même plan. En regardant le centre des momens comme un point fixe, autour duquel les forces tendent à faire tourner le système de leurs points d'application, liés entre eux d'une manière invariable, le moment de la résultante est égale à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans le même sens qu'elle, moins la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire.

Pour fixer les idées, supposons que les trois premières forces P, P', P'', tendent à faire tourner dans un même sens, et toutes les autres dans un sens opposé. Reprenons la série de réductions du nº 45. Soient Q la résultante de P et P', et Q' celle de Q et P'', ou de P, P', P''. Soient aussi p, p', p'', q, q', les perpendiculaires abaissées du centre des momens sur les directions de P, P', P'', Q, Q'; nous aurons, d'après ce qu'on vient de voir,

$$Qq = Pp + P'p', \quad Q'q' = Qq + P''p''.$$

et, par conséquent,

$$Q'q' = Pp + P'p' + P''p''$$

De même si l'on désigne par $Q_{,}$ la résultante de toutes les autres forces P''', P^iv, etc.; par $q_{,}$ la perpendiculaire abaissée du centre des momens sur sa direction; par p''', p^{iv}, etc., les perpendiculaires abaissées du même point sur les directions P''', P^iv, etc., on aura aussi

$$Q_{,}q_{,} = P'''p''' + P^{iv}p^{iv} + \text{etc.}$$

Or, la résultante R de toutes les forces données sera celle des deux forces Q' et $Q_{,}$; si, donc, on représente par r la perpendiculaire abaissée du centre des momens sur la direction de R, et si l'on considère que ces forces Q' et $Q_{,}$ tendent à faire tourner en sens opposés, on aura

$$Rr = \pm (Q'q' - Q_{,}q_{,}),$$

selon que $Q'q'$ sera plus grand ou moindre que $Q_{,}q_{,}$. Dans le premier cas, la force R tendra à faire tourner dans le même sens que la force Q', et, conséquemment, dans le même sens que les trois forces P, P', P''. Nous supposerons que ce soit ce premier cas qui ait lieu, et en substituant pour $Q'q'$ et $Q_{,}q_{,}$ leurs valeurs, nous aurons alors

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{iv}p^{iv} - \text{etc.}; \quad (1)$$

équation qui renferme le théorème qu'on voulait démontrer.

En supposant que le centre des momens soit le point d'appui du levier auquel les forces P, P', P'', etc., sont appliquées, il faudra, pour l'équilibre de ce levier, qu'on ait

$$Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{iv}p^{iv} - \text{etc.} = 0, \quad (2)$$

puisque dans ce cas, ces forces doivent avoir une résultante qui doit passer par le point d'appui (nº 45), et pour laquelle on a donc $r = 0$.

48. On peut rendre l'équation (1) plus générale, en supposant que par des décompositions et recompositions des forces P, P', P'', etc., on les ait transformées en d'autres forces S, S', S'', etc., dont l'ensemble soit équivalent aux forces données. En désignant par s, s', s'', etc., les perpendiculaires abaissées du centre des momens sur les directions de S, S', S'', etc., on trouvera, par le même raisonnement que dans le numéro précédent,

$$Ss + S's' + S''s'' + \text{etc.} = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{iv}p^{iv} - \text{etc.}; \quad (3)$$

équation dans laquelle on devra prendre avec le signe +, les momens des forces S, S', S'', etc., qui tendent à faire tourner dans le même sens que P, P', P''; et avec le signe —, les momens de celles qui tendent à faire tourner dans le même sens que P''', P^iv, etc.

Le cas particulier où les forces P, P', P'', etc., sont irréductibles à une seule, est compris dans cette dernière équation. Soient alors S et S' deux forces égales, parallèles et non directement opposées; et appelons h leur distance mutuelle. Si le centre des momens est situé entre leurs directions, on aura $s + s' = h$; elles tendront à faire tourner dans le même sens autour de ce point; on donnera donc le même signe à leurs momens, et il en résultera

$$Ss + S's' = Sh.$$

Si, au contaire, le centre des momens n'est pas compris entre S et S', et qu'on suppose $s > s'$, on aura $s - s' = h$; ces deux forces tendront à faire tourner en sens opposé; on devra donner le signe + au moment

de S et le signe — au moment de S'; et il en résultera

$$Ss - S's' = Sh.$$

Par conséquent, l'équation (3) deviendra toujours

$$Sh = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{\text{IV}}p_{\text{IV}} - \text{etc.}$$

Son second membre se composant de quantités qui sont toutes données, il en résulte que si les valeurs de S et h viennent à changer, leur produit demeurera constant, ainsi qu'on l'avait déjà dit plus haut.

On conclut aussi de cette dernière équation que, quand son second membre est nul, les forces données ne peuvent pas tomber dans le cas d'exception où elles sont irréductibles à une seule; il s'ensuit donc que l'équation (2) exprime à la fois que les forces P, P', P'', etc., ont une résultante unique, et que cette résultante passe par le centre des momens; par conséquent, elle est l'équation nécessaire et suffisante pour l'équilibre du lévier dont ce centre est le point d'appui. La résultante R que l'on obtiendra par la série des réductions du nº 45, exprimera la charge qu'il aura à supporter; quand elle sera nulle, les forces P, P', P'', etc., se feront équilibre dans leur plan sans le secours de ce point fixe.

49. La condition de l'équilibre dans le levier peut aussi s'exprimer par une équation analogue à la formule (s) du nº 39.

Soient, par exemple, M, M', M'' (fig. 18), les points d'application des trois forces P, P', P'', qui agissent sur le levier ECF, suivant des directions MA, M'A', M''A'', comprises dans son plan. Faisons tourner infiniment peu ce levier autour de son point d'appui C, de sorte que M, M', M'', viennent en m, m', m''. D'après la définition du nº 39, les arcs infiniment petits Mm, M'm', M''m'', que l'on peut prendre pour des lignes droites, seront les vitesses virtuelles des points d'application M, M', M'', des trois forces que l'on considère. J'abaisse de m, m', m'', des perpendiculaires ma, $m'a'$, $m''a''$, sur les droites MA, M'A', M''A'', ou sur leurs prolongemens; Ma sera la projection de Mm sur la direction même de la force P qui tend à faire tourner le levier dans le sens de la rotation qui a eu lieu; M'a' et M''a'' seront les projections de M'm' et M''m'' sur les prolongemens des deux autres forces P' et P'' qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé. Pour cette raison, je considère la première de ces projections comme une quantité positive, et les deux autres comme des quantités négatives. Je représenterai ces trois quantités par ϖ, ϖ', ϖ''.

Cela posé, en vertu du principe des vitesses virtuelles, la somme des forces données multipliées respectivement par les projections ainsi définies des vitesses virtuelles de leurs points d'application, est nulle dans le cas de l'équilibre, et réciproquement l'équilibre a lieu quand cette somme est zéro; en sorte que l'équation d'équilibre du levier est

$$P\varpi + P'\varpi' + P''\varpi'' = 0; \qquad (4)$$

et, en effet, il est aisé de vérifier qu'elle coïncide avec celle que l'on a déduite de la considération des momens.

Pour cela, désignons par p, p', p'', les perpendiculaires CG, CG', CG'', abaissées du point C sur les directions des forces P, P', P''; par c, c', c'', les distances CM, CM', CM'', de leurs points d'application au point C; et par γ, γ', γ'', les vitesses virtuelles Mm, M'm', M''m''. L'arc infiniment petit Mm se confondant avec sa tangente, les triangles M$m\varpi$ et CMG ont leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre, et sont semblables; on a donc

$$Ma : Mm :: CG : CM;$$

et à cause de

$$Ma = \varpi, \quad Mm = \gamma, \quad CG = p, \quad CM = c,$$

on en déduit

$$\varpi = \frac{P\gamma}{c}.$$

On aura de même

$$\varpi' = -\frac{P'\gamma'}{c'}, \quad \varpi'' = -\frac{P''\gamma''}{c''},$$

en observant que ϖ' et ϖ'' sont, par hypothèse, des quantités négatives. De plus, la forme du levier étant supposée invariable, les trois arcs Mm, M'm', M''m'', décrits en même temps, répondent à un même angle; et en les divisant par leurs rayons respectifs CM, CM', CM'', on aura trois rapports égaux. En désignant par θ la grandeur commune de ces rapports, on aura donc

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\gamma'}{c'} = \frac{\gamma''}{c''} = \theta,$$

et, par conséquent,

$$\varpi = p\theta, \quad \varpi' = -p'\theta, \quad \varpi'' = -p''\theta.$$

Or, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (4), et qu'on supprime ensuite le facteur θ commun à tous ses termes, elle deviendra

$$Pp - P'p' - P''p'' = 0;$$

ce qui est effectivement l'équation d'équilibre du levier que nous considérons. Réciproquement, si l'on multiplie cette dernière équation par θ, elle se changera dans l'équation (4).

Le raisonnement serait évidemment le même, quels que fussent le nombre des forces données P, P', P'', etc, et le sens dans lequel elles tendent à faire tourner le levier.

CHAPITRE III.

DE LA COMPOSITION ET DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

50. La composition des forces parallèles se déduit, ainsi qu'on l'a vu précédemment (n° 43), de la règle du parallélogramme des forces, en considérant les forces données comme des forces dont le point de concours est à l'infini; mais en s'appuyant toujours sur cette règle, on peut aussi obtenir la résultante de deux forces parallèles par un autre moyen qu'il est bon de connaître.

Soient P et Q les deux composantes, agissant aux points E et F de la droite inflexible EF, suivant les directions parallèles EA et FB, dans le même sens (fig. 19), ou en sens opposés (fig. 20). On ne changera rien à ce système de forces, en appliquant aux extrémités de cette droite des forces égales, dirigées en sens contraire l'une de l'autre, suivant ses prolongemens EC et FD, et dont la grandeur commune sera représentée par S. Je prends la résultante des forces P et S appliquées au point E, qui sera une force P′ agissant suivant une droite EA′ comprise dans l'angle AEC; de même la résultante des forces Q et S, qui agissent au point F, sera une force Q′ dirigée suivant une droite FB′, comprise dans l'angle BFD; et si l'on excepte le cas du n° 44, où les forces données P et Q sont égales et agissent en sens opposés, les deux droites EA′ et FB′ ne seront pas parallèles. Par conséquent, en supposant leur point d'intersection K lié invariablement à la droite EF, il sera permis de le prendre pour le point d'application commun aux deux forces P′ et Q′ (n° 41). Par ce point K, je mène les droites E′F′ et KH′, parallèles à la droite EF et à la direction des forces P et Q, puis je décompose chacune des forces P′ et Q′ suivant ces parallèles : il est évident qu'on retrouvera de cette manière les composantes S et P, dirigées suivant KE′ et KH, et les composantes S et Q, dirigées suivant KF′ et KH (fig. 19), ou suivant KF′ et KH′ (fig. 20). Nous aurons donc les quatre mêmes forces qu'auparavant, mais appliquées toutes quatre à un même point K. En supprimant les deux forces S, il restera les deux forces P et Q, dirigées suivant la même droite KH, dans le cas de la figure 19, ou suivant cette droite KH et son prolongement KH′, dans le cas de la figure 20, qui suppose que Q est la plus grande des deux forces données. Donc, la résultante de ces deux forces leur sera parallèle; et en la désignant par R, nous aurons

$$R = Q \pm P,$$

selon qu'elles seront dirigées dans le même sens ou en sens opposés.

Pour déterminer le point O, où sa direction viendra couper la droite EF ou son prolongement, je supposerai que E′ et F′ soient les intersections des lignes AE et BF avec la droite E′F′; les deux quadrilatères EE′KO et FF′KO seront des parallélogrammes; et si l'on prend leurs diagonales KE et KF pour représenter les résultantes P′ et Q′, on aura

$$S : P :: EO : KO,$$
$$S : Q :: FO : KO,$$

pour les rapports des composantes. On conclut de là

$$P : Q :: FO : EO;$$

ce qui fera connaître la position du point O qu'on pourra prendre pour le point d'application de la résultante R.

On en déduit aussi

$$P : Q \pm P :: FO : EF,$$
$$Q : Q \pm P :: EO : EF,$$

les signes supérieurs se rapportant à la figure 19, et les signes inférieurs à la figure 20; en ayant égard à la valeur précédente de R, on aura donc, dans les deux cas,

$$P : Q : R :: FO : EO : EF;$$

ce qui montre que chacune des trois forces P, Q, R, est proportionnelle à la distance comprise entre les points d'application des deux autres.

Cette proportion, et, par suite, la position du point O, sont indépendantes de l'angle sous lequel les directions des forces données sont coupées par la ligne EF, qui peut être une droite quelconque aboutissant par ses extrémités à ces deux directions.

51. On résoudra maintenant, sans aucune difficulté, toutes les questions qui peuvent se présenter sur la composition des deux forces parallèles en une seule et sur la décomposition d'une force en deux autres qui lui soient parallèles. Nous n'en-

trerons dans aucun détail à ce sujet; et nous ne reviendrons pas non plus sur le cas particulier des forces égales et non directement opposées, que nous avons exclu de la démonstration précédente et qui a été suffisamment examiné dans le n° 44.

Je vais actuellement considérer un nombre quelconque de forces parallèles, dont une partie agit dans un sens et l'autre partie dans le sens opposé, qui sont situées ou non situées dans un même plan, et appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, par exemple, à différens points d'un corps solide.

En composant deux de ces forces en une seule, puis celle-ci et une troisième encore en une seule, et ainsi de suite, on parviendra à déterminer la grandeur et la position dans l'espace de la résultante de toutes les forces données, à moins que les deux dernières forces qu'on aura à considérer ne tombent dans le cas d'exception du n° 44. Cette résultante sera évidemment parallèle à la direction commune des composantes; de plus, elle sera égale à la somme de celles qui agissent dans un même sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire, et elle agira dans le sens de la plus grande somme. Si donc on regarde les unes comme des quantités positives, et les autres comme des quantités négatives (n° 11), qu'on les représente toutes par P, P', P'', etc., et leur résultante par R, on aura toujours

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.}$$

52. Si les forces données viennent à tourner autour de leurs points d'application sans cesser d'être parallèles, leur résultante tournera aussi autour d'un des points de sa direction; car son point d'application, qu'on trouve en composant successivement les forces données, comme on vient de l'indiquer, ne dépend en aucune manière de la direction commune de ses forces, et reste, conséquemment le même quand cette direction vient à changer.

Ainsi, par exemple, supposons que les forces données soient au nombre de trois, P, P', P'', dirigées suivant les droites MA, M'A', M''A'' (fig. 21). Soit d'abord NB la direction de la résultante de P et P', qui sera égale à P + P'; soit ensuite N'B' la direction de la résultante de P + P' et P''; cette dernière force P'' étant supposée, dans la figure, agissante en sens contraire de P et P', et plus grande que P + P'. Concevons maintenant que les trois forces P, P', P'', tournent autour des points M, M', M'', en conservant leur parallélisme et le sens relatif de leurs actions. Soient M*a*, M'*a*', M''*a*'', leurs nouvelles directions. Dans ce nouvel état, la résultante des forces P et P' rencontrera la droite MM' au même point N qu'auparavant, puisque la position de ce point ne dépend que du rapport des composantes, et nullement de l'angle que la droite MM' fait avec leurs directions (n° 50); elle sera présentement dirigée suivant la droite N*b* parallèle à M*a* et M'*a*', et encore égale à P + P'. Par la même raison, la résultante de P + P' et P'' rencontrera le prolongement de la droite MM' au même point N' qu'auparavant, et sera dirigée suivant une droite N'*b*' parallèle à N*b*; par conséquent, les trois forces P, P', P'', tournant autour de leurs points d'application M, M', M'', leur résultante tournera aussi autour d'un même point N'.

53. Nous appellerons *centre des forces parallèles* le point dans lequel viennent se couper toutes les directions successives de la résultante, quand ses composantes tournent autour de leurs points d'application, qu'on suppose invariables.

On verra par la suite combien le centre des forces parallèles est important à considérer, surtout dans les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps pesans. On peut déjà observer que si un corps solide est sollicité par des forces parallèles quelconques, que l'on détermine le centre de ces forces, et qu'on le suppose fixe, l'équilibre aura lieu dans toutes les positions que le corps pourra prendre autour de ce point, pourvu que les forces données restent toujours parallèles et appliquées aux mêmes points de ce corps; car alors leur résultante passera constamment par le point fixe, ce qui suffit pour qu'elle soit détruite.

Les coordonnées du centre des forces parallèles, rapportées à trois axes rectangulaires, dépendent, comme on va le voir, des produits de ces forces multipliées par les coordonnées de leurs points d'application. A cause que ces produits se présentent dans un grand nombre de cas, on leur a donné un nom particulier; on appelle *moment d'une force par rapport à un plan*, le produit de cette force et de sa distance à ce plan. Ainsi, P étant l'intensité d'une force appliquée en un point dont les coordonnées sont x, y, z, les produits Pz, Py, Px, seront ses momens par rapport aux plans des x et y, des x et z, des y et z. Les momens de cette espèce n'ont rien de commun, en général, avec les momens par rapport à un point qu'on a définis dans le n° 42. Ceux-ci dépendent de la direction de la force, et sont indépendans de son point d'application; les momens par rapport à un plan dependent, au contraire, de la position du point d'application de la force, et sont indépendans de sa direction. On ne fait usage des derniers que dans le cas des forces parallèles; en sorte qu'ils peuvent être des quantités positives ou négatives, à raison du signe de la force et des coordonnées du point où elle est appliquée.

54. Soient M, M', M'', etc. (fig. 22), les points d'application des forces parallèles P, P', P'', etc., dont il sera inutile d'indiquer les directions. Menons arbitrairement trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, qui seront ceux des coordonnées; désignons par x, y, z, les coordonnées de M; par x', y', z', celles de M', par x'', y'', z'', celles de M'', etc.; et supposons que toutes ces coordonnées et ces forces sont des quantités données qui peuvent être positives ou négatives. Soient encore Q, Q',

Q'', etc., les projections des points M, M', M'', etc., sur le plan des x et y; en sorte qu'on ait

$$MQ = z,\ M'Q' = z',\ M''Q'' = z'',\ \text{etc.}$$

Enfin, représentons par x_1, y_1, z_1, les trois coordonnées du centre des forces parallèles dont il s'agit de trouver les valeurs.

La résultante $P + P'$ des deux forces P et P' rencontrera en un point N la droite MM' ou son prolongement, selon que ces deux forces seront de même signe ou de signe contraire; mais dans les deux cas on aura

$$P' : P + P' :: MN : MM'.$$

Soit K la projection de N sur le plan des x et y. Par le point M, menons la parallèle MGH à la droite QKQ', qui rencontre les droites NK et M'Q' aux points G et H, de sorte qu'on ait

$$MQ = GK = HQ';$$

on aura aussi

$$MN : MM' :: NG : M'H;$$

et de cette proportion jointe à la précédente, on conclura

$$(P + P')\,NG = P'.\ M'H.$$

A cette équation, j'ajoute l'équation identique

$$(P + P')\,GK = P.\ MQ + P'.\ HQ';$$

ce qui donne

$$(P + P')\,NK = Pz + P'z'.$$

La résultante des deux forces $P + P'$ et P'' rencontrera en un point N' la droite NM'' ou son prolongement, selon que ces deux forces auront le même signe ou des signes contraires; et si K' est la projection de N sur le plan des x et y, on trouvera, comme dans le cas précédent,

$$(P + P' + P'')\,N'K' = (P + P')\,NK + P''z'';$$

par conséquent, on aura

$$(P + P' + P'')\,N'K' = Pz + P'z' + P''z''.$$

On continuera de même jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les forces données P, P', P'', etc.; et si R est leur résultante totale, on aura finalement

$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}$$

La figure 22 suppose que tous les points M', M', M'', etc., N, N', etc., sont situés d'un même côté du plan des x et y, ou que leurs ordonnées parallèles à l'axe des z sont toutes de même signe; mais il est aisé de voir que si l'équation précédente est vraie dans ce cas, elle le sera encore lorsque ces coordonnées seront en partie positives et en partie négatives. En effet, transportons le plan des x et y, parallèlement à lui-même, à une distance quelconque h de sa position primitive. Par rapport à ce nouveau plan, soient Z, Z', Z'', etc., les coordonnées de M, M', M'', etc., et Z_1, celle du centre des forces parallèles, de sorte qu'on ait

$$Z_1 = z_1 - h,\ Z = z - h,\ Z' = z' - h,\ Z'' = z'' - h,\ \text{etc.};$$

si l'on retranche de l'équation précédente l'équation identique

$$Rh = Ph + P'h + P''h + \text{etc.},$$

il en résultera

$$RZ_1 = PZ + P'Z' + P''Z'' + \text{etc.};$$

équation dans laquelle les ordonnées Z, Z', Z'', etc., peuvent être positives ou négatives.

On voit donc que, dans tous les cas, le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles par rapport à un plan choisi arbitrairement, est égal à la somme des momens de ces forces par rapport au même plan.

55. En prenant successivement les momens par rapport aux trois plans des coordonnées, on aura, d'après les notations précédentes,

$$\left.\begin{aligned} Rx_1 &= Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.},\\ Ry_1 &= Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.},\\ Rz_1 &= Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.}; \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

et à cause de

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.},\qquad (2)$$

les trois coordonnées du centre des forces parallèles seront complètement déterminées. En menant par ce point une droite parallèle aux forces données, dans le sens indiqué par le signe de R, on aura la direction de la résultante. Ces quatre équations renfermeront, de la manière la plus générale, la théorie des forces parallèles.

La somme des momens des forces P, P', P'', etc., est égale à zéro, par rapport à tout plan passant par le centre des forces parallèles; car, en prenant ce plan pour celui des x et y, il faudra qu'on ait $z_1 = 0$, et, conséquemment,

$$Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.} = 0.$$

Dans le cas particulier où P, P', P'', etc., se réduisent à deux forces égales, agissant en sens opposé, leur somme R est égale à zéro; ce qui rend infinies les valeurs de x_1, y_1, z_1. Le centre des forces parallèles est donc alors situé à l'infini, ou plutôt ce centre n'existe pas, non plus que la résultante.

56. Lorsque tous les points d'application M, M', M'', etc., des forces données sont situés dans un même plan, il est évident, par la nature du centre des forces parallèles (n° 52), que ce point, s'il existe, devra aussi se trouver dans ce plan; c'est aussi ce que l'on peut conclure des équations (1) et (2).

En désignant par a, b, c, trois constantes données, on aura, dans ce cas,

$$\begin{aligned} z &= ax + by + c,\\ z' &= ax' + by' + c,\\ z'' &= ax'' + by'' + c,\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Je substitue ces valeurs de x, x', x'', etc., dans la troisième équation (1); il vient

$$\begin{aligned} Rz_1 = &(Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.})\, a \\ &+ (Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.})\, b \\ &+ (P + P' + P'' + \text{etc.})\, c. \end{aligned}$$

En vertu des deux autres équations (1) et de l'équation (2), on peut remplacer par Rx_1, Ry_1, R, les coefficiens de a, b, c; et en supprimant ensuite le facteur commun R, on a

$$z_1 = ax_1 + by_1 + c;$$

ce qui montre que le centre des forces parallèles appartient au plan des points M, M', M'', etc.

Lorsque tous ces points sont sur une même ligne droite, ce centre s'y trouve également; et il suffit de la première des équations (1) pour déterminer sa position, en prenant cette droite pour l'axe des x. Si, de plus, les forces P, P', P'', etc., sont perpendiculaires à cette droite, les momens que nous considérons actuellement se confondent avec les momens par rapport à un point, qui est ici l'origine O des abscises x, et la première équation (1) coïncide avec l'équation (1) du n° 47. Il est aisé de voir, en effet, que parmi les forces données P, P', P'', etc., celles qui tendent à faire tourner autour du point O dans le même sens que la résultante R, sont toutes les forces qui ont le même signe que leurs distances x, x', x'', etc., à ce point, et que celles qui tendent à faire tourner dans le sens opposé, sont les forces qui ont un signe contraire à celui de ces mêmes distances; par conséquent, les momens des premières s'ajoutent, et ceux des dernières se retranchent, conformément à l'énoncé du numéro cité.

57. Les équations d'équilibre des forces parallèles P, P', P'', etc., se déduisent aisément de la théorie qu'on vient d'exposer.

S'il n'existe aucun point fixe dans le système, il faut, pour l'équilibre, qu'en séparant l'une de ces forces, par exemple la force P, toutes les autres aient une résultante qui soit égale et directement opposée à P. Soit donc R' la résultante des forces P', P'', etc.; puisque les forces P et R' sont égales et dirigées en sens contraires, elles doivent être égales et de signes différens, ou, autrement dit, on doit avoir $P + R' = 0$. Mais R' est la somme des composantes P', P'', etc.; il en résulte donc, pour la première équation d'équilibre,

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0. \qquad (a)$$

Pour exprimer, en outre, que les forces P et R' sont directement opposées, soient α, β, γ, les trois coordonnées du centre des forces parallèles P' P'', etc., de manière qu'on ait

$$\begin{aligned} R'\alpha &= P'x' + P''x'' + \text{etc.}, \\ R'\beta &= P'y' + P''y'' + \text{etc.}, \\ R'\gamma &= P'z' + P''z'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Ce centre étant le point d'application de leur résultante R', il sera nécessaire qu'il se trouve sur la direction de la force P, pour que R' soit directement opposée à cette force, ou, ce qui revient au même, ce centre et le point d'application M de la force P doivent être sur une même parallèle à la direction commune des forces données. Si donc on prend, pour plus de simplicité, le plan des x et y perpendiculaire à cette direction, il faudra que ces deux points soient situés sur une même perpendiculaire à ce plan; ils auront alors la même projection sur ce plan; par conséquent, leurs coordonnées seront les mêmes parallèlement aux axes des x et y, de sorte que l'on aura

$$\alpha = x, \qquad \beta = y.$$

Je substitue donc x et y à la place de α et β dans les deux premières équations précédentes, et, à cause de $R' = -P$, il vient

$$\left.\begin{aligned} Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} &= 0, \\ Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

équations qui signifient que la somme des momens de toutes les forces P, P', P'', est nulle, etc., par rapport aux plans des x et z, et des y et z, parallèles à leur direction.

Ainsi, l'équilibre de ces forces exige que les équations (a) et (b) aient lieu en même temps. Réciproquement, quand ces trois équations sont satisfaites, l'équilibre existe; car si l'on considère la résultante R' de toutes ces forces moins une, on aura, en vertu de ces équations,

$$R' = -P, \quad R'\alpha = -Px, \quad R'\beta = -Py,$$

et, par conséquent,

$$\alpha = x, \qquad \beta = y;$$

en sorte que cette résultante sera égale et directement opposée à la force P, qu'on avait omise. Il n'est pas nécessaire, pour cela, que les deux plans par rapport auxquels la somme des momens des forces données est zéro, soient perpendiculaires l'un à l'autre; il suffit qu'ils soient parallèles à la direction de ces forces; et l'on peut aussi s'assurer facilement que si cette condition est remplie par rapport à deux plans parallèles à cette direction, elle le sera également par rapport à tous les autres.

Concluons donc que pour l'équilibre d'un système de forces parallèles, appliquées à un corps solide entièrement libre, il est nécessaire et il suffit :

1° Que la somme de ces forces soit égale à zéro;

2° Que la somme de leurs momens soit nulle par rapport à deux plans quelconques parallèles à leur direction commune. Quand toutes les forces seront comprises dans un même plan, cette seconde condition sera déjà remplie par rapport à ce plan, et il suffira qu'elle le soit, en outre, par rapport à un autre plan.

58. Si l'un des points de ce corps solide est sup-

posé fixe, il suffira, pour l'équilibre des forces parallèles, que la somme de leurs momens soit nulle par rapport à deux plans passant par ce point et parallèles à leur direction, et il ne sera plus nécessaire que leur résultante soit égale à zéro; car alors les distances de cette résultante à ces deux plans seront nulles : elle coïncidera donc avec leur intersection, et sera détruite par la résistance du point fixe.

Lorsque ce point sera le centre des forces parallèles, la somme des momens sera zéro par rapport à tous les plans passant par ce point; par conséquent, les forces données se feront équilibre, quelle que soit leur direction commune; ce que nous savions déjà (n° 53).

Si le corps solide est retenu par un axe fixe, autour duquel il ait seulement la liberté de tourner, il suffira, pour l'équilibre des forces parallèles appliquées en ses différens points, que la somme de leurs momens soit égale à zéro, par rapport au plan mené par cet axe parallèlement à leur direction; car leur résultante tombant alors dans ce plan, elle y rencontrera l'axe fixe, et sera détruite par sa résistance. Lorsque l'axe fixe est lui-même parallèle aux forces données, le plan dont il s'agit est indéterminé; la condition d'équilibre s'évanouit par conséquent; ce qui doit être, puisque des forces qui sont toutes parallèles à un axe fixe ne peuvent faire tourner un corps solide autour de cette droite, de sorte que, dans ce cas, l'équilibre a lieu indépendamment de leurs intensités et de leurs distances à cet axe.

CHAPITRE IV.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES CORPS PESANS ET SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ.

59. On appelle indifféremment *pesanteur* ou *gravité*, la force qui précipite les corps vers la surface de la terre aussitôt qu'ils ne sont plus soutenus. Son action s'exerce sur tous les points matériels, dans des directions perpendiculaires à cette surface, ou suivant des lignes *verticales*. Les directions prolongées de la pesanteur en différens lieux de la terre, convergent donc vers son centre, à cause de sa forme à peu près sphérique; mais en ayant égard à la grandeur du rayon terrestre, relativement aux dimensions des corps que l'on considère ordinairement, on peut supposer, sans erreur sensible, la pesanteur parallèle à elle-même dans toute l'étendue d'un même corps.

L'observation a prouvé que l'intensité de cette force varie à la surface de la terre avec la latitude, et que sur une même verticale elle varie aussi avec l'élévation au-dessus de cette surface; mais il faut que les changemens de hauteur et de latitude soient très considérables pour que ces variations deviennent sensibles, et elles ne le sont nullement dans l'étendue d'un corps de dimensions ordinaires.

60. On conclut de là que la résultante des forces parallèles en nombre infini, qui agissent sur tous les points d'un corps pesant, est indépendante de sa forme; cette résultante est ce qu'on appelle le *poids* du corps. Dans les corps *homogènes*, le poids est évidemment proportionnel au volume; mais une expérience journalière nous montre que les corps de nature différente n'ont pas le même poids sous le même volume; ce qui peut provenir de ce que l'attraction de la terre, qui est la cause principale de la pesanteur, comme on le verra par la suite, dépend de la nature des points matériels sur lesquels elle agit, ou bien, de ce que les corps *hétérogènes* renferment, sous des volumes égaux, des quantités différentes de points matériels également pesans. Nous expliquerons, dans un autre chapitre, comment on a conclu, du mouvement observé des corps pesans, que c'est le second de ces deux cas qui a lieu dans la nature.

Il en résulte que le poids d'un corps quelconque est en raison composée de sa masse et de l'intensité de la pesanteur dans le lieu où il est situé. Ainsi, en appelant P ce poids, M la masse, et g la mesure de la gravité, on a

$$P = gM.$$

Cette quantité g, indépendante de la nature particulière de chaque corps, est, comme on voit, le poids de celui dont on prend arbitrairement la masse pour unité. On verra par la suite comment sa valeur a été déterminée en différens points de la terre, d'après le mouvement des corps soumis à la seule action de la gravité.

Nous pouvons aussi écrire

$$P = \varpi V,$$

en désignant par ϖ le poids du corps sous l'unité de volume, et son volume par V. Le poids ϖ est ce qu'on appelle la *pesanteur spécifique* du corps que l'on considère; dénomination impropre, puisque la pesanteur est commune à tous les corps d'espèces différentes, et qu'on devrait remplacer par celle de *poids spécifique*.

Enfin, si l'on représente par D la masse, sous l'unité de volume, du corps que l'on considère, D sera ce qu'on nomme la *densité* de ce corps, et l'on aura

$$M = DV, \qquad P = gDV.$$

Telles sont les équations qui ont lieu entre les cinq quantités P, g, M, D, V, dont chacune doit être exprimée numériquement, en la rapportant à une unité de son espèce.

61. Le *gramme*, ou l'unité de poids, est celui d'un centimètre cube d'eau distillée et prise à son *maximum* de densité, qui répond à environ 4° du thermomètre centigrade. Ce poids varie avec le lieu qu'il occupe; mais comme les poids des autres corps, qu'il sert à peser, varient exactement dans le même rapport, il s'ensuit que le poids d'un corps quelconque, exprimé en grammes, est partout le même, et qu'on n'a pas besoin de dire en quel endroit il a été déterminé. D'après les expériences de M. Hallström, le poids du centimètre cube d'eau distillée, à la température zéro, est

$$0^{\text{gram.}},9998918.$$

On prend communément pour unité de densité, celle de l'eau distillée à cette dernière température. Les densités d'un grand nombre de substances ont été déterminées par l'expérience, et exprimées en nombres au moyen de cette unité. Ainsi, par exemple, la densité du mercure à cette même température est

$$13,5975,$$

et elle augmente ou diminue de

$$\frac{1}{5550},$$

pour chaque degré de diminution ou d'augmentation de la température. La densité de l'air, prise aussi à la température de la glace fondante, sous la pression barométrique de 76 centimètres et à l'Observatoire de Paris, a été trouvée égale à

$$\frac{1}{769,4};$$

et, pour chaque variation d'un degré dans la température, elle varie, en sens contraire, de

$$0,00375,$$

comme celle de tout autre gaz.

Le poids de la colonne de mercure qui exprime la pression barométrique, variant avec la latitude et l'élévation au-dessus de la surface de la terre, la densité de l'air, soumise à une pression d'une hauteur donnée, varie en même temps. Voilà pourquoi il ne suffit pas d'assigner cette hauteur; il faut encore dire à quel lieu elle se rapporte, comme ici à l'Observatoire de Paris. Le rapport de la densité du mercure à celle de l'air, qui répond aux nombres précédens, est

$$10462.$$

Dès qu'on attribue un phénomène, tel que la chaleur, par exemple, à une substance matérielle, cette substance est soumise à la pesanteur; et l'expression *impondérable* ne doit s'entendre que d'une matière dont la densité est si faible, qu'elle échappe à tous nos moyens d'investigation; en sorte que sa présence n'augmente ni le poids ni la masse mesurable du corps dont elle fait partie, en quelque quantité qu'elle s'y trouve.

62. Les poids sont les forces qui nous sont le plus familières, et dont nous pouvons, au moyen de la balance, déterminer les rapports avec le plus d'exactitude et de facilité. C'est pourquoi il est naturel de les faire servir de terme de comparaison aux forces d'une autre nature. Ainsi, lorsque la force musculaire d'un animal, ou toute autre force, agit sur un corps par l'intermédiaire d'une corde attachée à sa surface, nous pouvons toujours concevoir que cette force soit équivalente à un certain poids déterminé, et nous pouvons même, sans changer sa direction, remplacer son action par celles de ce poids, en le suspendant à l'extrémité de la corde, après avoir fait passer celle-ci sur une poulie fixe convenablement placée.

Le poids fournit la mesure la plus commode de la masse; sans le secours de la pesanteur, il serait, en effet, très difficile de déterminer le rapport des masses de deux corps. On verra par la suite qu'on pourrait, à la rigueur, le conclure du choc mutuel de ces corps; mais il est beaucoup plus simple de remplacer le rapport des masses par celui des poids, auquel il est égal en chaque lieu de la terre, en vertu de l'équation $P = gM$. Toutefois, on doit avoir une idée préalable de l'égalité et du rapport des masses, indépendamment de la pesanteur qui n'est qu'une propriété secondaire des corps, puisqu'elle deviendrait tout-à-fait insensible, sans que les masses eussent changé, en les transportant à une distance suffisamment grande de la terre. Nous reviendrons sur ce point dans un autre endroit de cet ouvrage.

63. Puisque tous les points d'un corps pesant sont sollicités par des forces parallèles, il s'ensuit

que si on lui fait prendre successivement diverses positions par rapport à la direction de ces forces, leur résultante passera constamment par un certain point de ce corps. Ce point, que nous avons appelé, en général, *centre des forces parallèles* (n° 53), prend ici le nom particulier de *centre de gravité*. Sa propriété caractéristique dans les corps solides, qui ne sont soumis qu'à la seule action de la pesanteur, consiste en ce que, s'il est supposé fixe, le corps auquel il appartient reste en équilibre dans toutes les positions possibles autour de ce point, puisque, dans toutes ces positions, la résultante des forces appliquées à tous les points du corps vient passer par le point fixe.

On conçoit aussi que quand un corps solide pesant est retenu par un autre point fixe, il est nécessaire et il suffit, pour l'équilibre, que la droite qui joint ce point et le centre de gravité soit verticale; ce centre pouvant d'ailleurs se trouver au-dessus ou au-dessous du point fixe. En effet, le poids du corps étant une force verticale appliquée à son centre de gravité, sa direction coïncidera, dans cette hypothèse, avec la droite qui joint ce centre et le point fixe, ou avec son prolongement; par conséquent, cette force sera détruite par la résistance du point fixe, comme si elle y était immédiatement appliquée.

Par la même raison, si l'on suspend un corps solide pesant à un point fixe, par le moyen d'un fil dont l'extrémité inférieure est attachée à un point de sa surface, la direction de ce fil sera verticale dans l'état d'équilibre, et son prolongement ira passer par le centre de gravité du corps. Il en sera de même si l'on suspend, une ou plusieurs autres fois, ce même corps au point fixe, en attachant l'extrémité inférieure du fil à d'autres points de sa surface. Les prolongemens du fil, tracés successivement dans l'intérieur du corps, s'y couperont à son centre de gravité; ce qui fournit un moyen pratique de déterminer la position de ce centre dans un corps de forme quelconque, homogène ou hétérogène.

Dans toutes les questions d'équilibre relatives à un corps solide, on pourra faire abstraction de la pesanteur de ses diverses parties, pourvu qu'on ajoute aux autres forces données qui agissent sur ce corps, une force égale à son poids, et appliquée verticalement à son centre de gravité. Ainsi, par exemple, dans le cas de l'équilibre du levier, il faudra comprendre au nombre des forces données dont la somme des momens doit être nulle, par rapport au point d'appui (n° 47), le poids du levier agissant à son centre de gravité suivant la direction de la pesanteur.

64. Lorsque l'on connaît les centres de gravité G et G' des deux parties d'un corps, et leurs poids p et p', on en déduit immédiatement le centre de gravité K de ce corps; car ce centre est le point d'application sur la droite GG', de la résultante des forces parallèles p et p', qui agissent dans le même sens à ses extrémités G et G'; et, pour en déterminer la position, on a conséquemment

$$GK : GG' :: p' : p + p'.$$

De même, si l'on connaît les centres de gravité K et G d'un corps et de l'une de ses parties, et que les poids du corps et de cette partie soient P et p, on en conclura le centre de gravité G' de l'autre partie; car ce point sera situé au delà du point K sur le prolongement de la droite GK, et sa distance au point G sera déterminée par la proportion

$$GG' : GK :: P : P - p.$$

Si un corps est divisé en un nombre quelconque de parties dont les poids et les centres de gravité soient connus, on en pourra déduire son centre de gravité par une suite de proportions; mais il conviendra mieux de déterminer ses trois coordonnées au moyen du théorème relatif aux momens des forces parallèles (n° 54).

Soient, pour cela, p, p', p'', etc., les poids des différentes parties du corps, et P son poids total, de sorte qu'on ait

$$P = p + p' + p'' + \text{etc.}$$

Soient aussi x, y, z, les coordonnées du centre de gravité de la partie dont p est le poids; x', y', z', celles du centre de gravité de la partie dont le poids est p'; etc. Toutes ces quantités seront données par hypothèse; et si l'on appelle x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité du corps entier, rapportées aux mêmes axes que les précédentes, on aura, d'après le théorème cité,

$$\begin{aligned} Px_1 &= px + p'x' + p''x'' + \text{etc.}, \\ Py_1 &= py + p'y' + p''y'' + \text{etc.}, \\ Pz_1 &= pz + p'z' + p''z'' + \text{etc.}, \end{aligned}$$

ce qui fait connaître les valeurs de x_1, y_1, z_1.

65. On peut, dans ces équations, remplacer les poids par les masses auxquelles ils sont proportionnels. En désignant donc par m, m', m'', etc., les masses des différentes parties du corps dont les poids sont représentés par p, p', p'', etc., et représentant par M la masse totale, de sorte qu'on ait

$$M = m + m' + m'' + \text{etc.},$$

il en résultera

$$\left.\begin{aligned} Mx_1 &= mx + m'x' + m''x'' + \text{etc.}, \\ My_1 &= my + m'y' + m''y'' + \text{etc.}, \\ Mz_1 &= mz + m'z' + m''z'' + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ce qui montre que le centre de gravité est indépendant de l'intensité de la pesanteur, et qu'il sera toujours le même point du corps, à différentes latitudes et à différentes hauteurs au-dessus de la surface de la terre. En considérant que ce point ne suppose pas l'action de la gravité, et qu'il ne dépend que des masses et de leur disposition respective, Euler et d'autres auteurs l'appellent *centre*

d'inertie; mais la dénomination de centre de gravité a plus généralement prévalu.

Si la masse M a été divisée en un nombre infini de parties infiniment petites m, m', m'', etc., on pourra prendre tel point qu'on voudra de chacune d'elles pour son centre de gravité, puisque les coordonnées, suivant chaque axe, de tous les points d'un même élément, ne différeront entre elles que d'un infiniment petit. Les seconds membres des équations (1) se composeront alors d'une infinité de termes infiniment petits, dont les sommes seront des intégrales définies, d'après le théorème du n° 13 étendu aux intégrales multiples. Par conséquent, on pourra toujours, par les règles du calcul intégral, déterminer exactement ou par approximation le centre de gravité d'un corps quelconque, sans connaître celui d'aucune de ses parties.

Dans un corps dont toutes les parties sont homogènes, leurs masses sont entre elles comme les volumes; on peut donc alors substituer les volumes aux masses, dans les équations (1); et si l'on représente par V le volume entier, et par v, v', v'', etc., ses parties correspondantes à m, m', m'', etc., on aura

$$\begin{aligned} V &= v + v' + v'' + \text{etc.}, \\ Vx_1 &= vx + v'x' + v''x'' + \text{etc.}, \\ Vy_1 &= vy + v'y' + v''y'' + \text{etc.}, \\ Vz_1 &= vz + v'z' + v''z'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Le point qu'on détermine par ces équations est le centre des forces parallèles appliquées à tous les points d'un corps, et proportionnelles aux élémens de son volume; ce point s'appelle le *centre de gravité* du volume, quoiqu'un volume n'ait ni masse ni pesanteur. On appelle aussi *centre de gravité* d'une surface ou d'une ligne, le centre des forces parallèles appliquées à tous leurs points, et proportionnelles à leurs élémens. On déterminera ses coordonnées en remplaçant dans les équations précédentes, les volumes V, v, v', v'', etc., soit par les aires de la surface et de ses parties, soit par les longueurs de la ligne et de ses parties.

66. Les masses M, m, m', m'', etc., et les distances mutuelles de leurs centres de gravité, sont liées entre elles par une équation facile à déduire des équations (1).

Pour cela, plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité de M; ces équations deviendront

$$\begin{aligned} mx + m'x' + m''x'' + \text{etc.} &= 0, \\ my + m'y' + m''y'' + \text{etc.} &= 0, \\ mz + m'z' + m''z'' + \text{etc.} &= 0. \end{aligned}$$

En faisant le carré de la première, on en conclut

$$\begin{aligned} m^2x^2 + m'^2x'^2 + m''^2x''^2 + \text{etc.} &= \\ - 2mm'xx' - 2mm''xx'' - 2m'm''x'x'' - \text{etc.} \end{aligned}$$

J'ajoute, aux deux nombres de cette équation, la quantité

$$\begin{aligned} &m(m' + m'' + \text{etc.})x^2 + m'(m + m'' + \text{etc.})x'^2 \\ &+ m''(m + m' + \text{etc.})x''^2 + \text{etc.}; \end{aligned}$$

il en résulte

$$\begin{aligned} M(mx^2 + m'x'^2 + m''x''^2 + \text{etc.}) &= mm'(x - x')^2 \\ + mm''(x - x'')^2 + m'm''(x' - x'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

La seconde et la troisième équation (1) donneront de même

$$\begin{aligned} M(my^2 + m'y'^2 + m''y''^2 + \text{etc.}) &= mm'(y - y')^2 \\ + mm''(y - y'')^2 + m'm''(y' - y'')^2 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(mz^2 + m'z'^2 + m''z''^2 + \text{etc.}) &= mm'(z - z')^2 \\ + mm''(z - z'')^2 + m'm''(z' - z'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, si nous ajoutons ces trois dernières équations, et que nous fassions

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= r'^2, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= r''^2, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 &= \rho^2, \\ (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 &= \rho'^2, \\ (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 &= \rho''^2, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} M(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \text{etc.}) &= mm'\rho^2 \\ + mm''\rho'^2 + m'm''\rho''^2 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

pour l'équation qu'il s'agissait d'obtenir, et dans laquelle ρ, ρ', ρ'', etc., sont les distances mutuelles des centres de gravité de m, m', m'', etc., et r, r', r'', etc., les distances de ces points au centre de gravité de M.

67. On déduit aussi des équations (1) une propriété curieuse de l'équilibre d'un point matériel entièrement libre. Voici en quoi elle consiste.

Soit O (fig. 23) le point en équilibre; représentons en grandeurs et en directions, par les droites OA, OA', OA'', etc., les forces qui le sollicitent; si leurs extrémités A, A', A'', etc., sont les centres de gravité de masses égales, le point O sera le centre de gravité de ce système entier.

En effet, en appliquant les équations (1) à ces masses, et supposant que n soit leur nombre, on aura

$$\begin{aligned} nx_1 &= x + x' + x'' + \text{etc.}, \\ ny_1 &= y + y' + y'' + \text{etc.}, \\ nz_1 &= z + z' + z'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

D'un autre côté, si l'on désigne par α, β, γ, les angles que fait la force OA avec trois axes rectangulaires menés par le point O; par α', β', γ', ce que ces angles deviennent relativement à la force OA'; par α'', β'', γ'', ce qu'ils deviennent relativement à la force OA''; etc., les équations d'équilibre de ces forces seront

$$\begin{aligned} OA\cos\alpha + OA'\cos\alpha' + OA''\cos\alpha'' + \text{etc.} &= 0, \\ OA\cos\beta + OA'\cos\beta' + OA''\cos\beta'' + \text{etc.} &= 0, \\ OA\cos\gamma + OA'\cos\gamma' + OA''\cos\gamma'' + \text{etc.} &= 0. \end{aligned}$$

Or, en plaçant l'origine des coordonnées au point O, on aura

$x = OA \cos \alpha$, $y = OA \cos \beta$, $z = OA \cos \gamma$,
$x' = OA' \cos \alpha'$, $y' = OA' \cos \beta'$, $z' = OA' \cos \gamma'$,
$x'' = OA'' \cos \alpha''$, $y'' = OA'' \cos \beta''$, $z'' = OA'' \cos \gamma''$,
etc.,

pour les coordonnées des points A, A', A'', etc. En vertu des équations d'équilibre, on aura donc

$$x + x' + x'' + \text{etc.} = 0,$$
$$y + y' + y'' + \text{etc.} = 0,$$
$$z + z' + z'' + \text{etc.} = 0;$$

d'où l'on conclut

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0,$$

pour les coordonnées du centre de gravité des masses égales; par conséquent, ce centre coïncidera avec le point O; ce qu'il s'agissait de démontrer.

68. Il y a beaucoup de cas particuliers où le centre de gravité est immédiatement connu. Ainsi, le centre de gravité d'une sphère ou d'un ellipsoïde est évidemment au centre de figure; celui d'un parallélipipède, à l'intersection de ses quatre diagonales; celui d'un cylindre à bases parallèles, au milieu de son axe. Le centre de gravité d'un cercle ou d'une ellipse est aussi au centre de figure, et celui d'un parallélogramme, à l'intersection des deux diagonales. Le centre de gravité d'une ligne droite est le milieu de cette droite; d'où l'on conclut sans difficulté le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque, soit par une suite de proportions (n° 64), soit par les équations des momens des forces parallèles. On voit de même que quand on aura trouvé les centres de gravité d'un triangle et d'une pyramide triangulaire, on en déduira, par l'un ou l'autre de ces deux moyens, les centres de gravité d'un polygone et d'un polyèdre donnés, que l'on peut toujours décomposer, soit en triangles, soit en pyramides triangulaires.

Mais, en général, la détermination des centres de gravité exige l'emploi du calcul intégral; et dans le chapitre suivant nous allons donner tous les détails qu'on peut désirer sur ce problème.

CHAPITRE V.

DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ.

§ 1er. *Centres de gravité des lignes courbes.*

69. Soit s l'arc de la courbe donnée, aboutissant à un point quelconque M, et compté à partir d'un point fixe que j'appellerai C. Soient aussi x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de M. On considérera cette courbe comme un polygone d'une infinité de côtés; ds sera le côté ou l'élément de la courbe qui répond au point M; et, quelque part que soit le centre de gravité de cet élément on prendra x, y, z, pour ses trois coordonnées, qui ne sauraient, effectivement, différer de x, y, z, que de quantités infiniment petites.

Appelons l la longueur de la partie déterminée de la courbe dont il s'agit de déterminer le centre de gravité; et représentons par s_0 et s_1 les valeurs données de s qui répondent aux deux extrémités de l. Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité de cet arc l, rapportées aux axes des x, y, z. D'après le théorème du n° 13, la somme des valeurs de chacun des produits xds, yds, zds, dans toute l'étendue de l, sera une intégrale définie prise depuis $s = s_0$ jusqu'à $s = s_1$, en regardant x, y, z, comme des fonctions de s données par la nature de la courbe que l'on considère. Nous aurons donc (n° 65)

$$lx_1 = \int_{s_0}^{s_1} xds, \; ly_1 = \int_{s_0}^{s_1} yds, \; lz_1 = \int_{s_0}^{s_1} zds, \quad (1)$$

pour les trois équations qui serviront à déterminer x_1, y_1, z_1.

Supposons, par exemple, que la ligne donnée soit une droite, et que sa partie l aboutisse au point C, de sorte qu'on ait $s_0 = 0$ et $s_1 = l$. Désignons par α, β, γ, les trois angles que fait cette partie l avec des axes menés par le point C suivant la direction des x, y, z, positives; soient aussi a, b, c, les trois coordonnées du point C; pour le point quelconque M nous aurons

$x = a + s \cos \alpha$, $y = b + s \cos \beta$, $z = c + s \cos \gamma$.

Je substitue ces valeurs dans les équations (1); et en effectuant les intégrations et divisant ensuite par l, il vient

$$x_1 = a + 1/2 l \cos\alpha, y_1 = b + 1/2 l \cos\beta, z_1 = c + 1/2 l \cos\gamma;$$

ce qui montre, comme cela devait être, que le centre de gravité de la droite l est situé à son milieu.

70. Lorsqu'il s'agira d'une courbe plane, et qu'on prendra son plan pour celui des x et y, il suffira des deux premières équations (1) pour déterminer la position de son centre de gravité dans ce plan. Si, de plus, la portion l de la courbe est symétrique de part et d'autre du point C, on aura $s_0 = -1/2\, l$ et $s_1 = 1/2\, l$; le centre de gravité sera situé sur la normale au point C; et en prenant cette droite pour l'axe des x, il suffira de déterminer la valeur de x_1, qui sera donnée par l'équation

$$lx_1 = \int_{-1/2 l}^{1/2 l} x ds.$$

L'arc de cercle est compris dans ce cas particulier, en prenant pour axe des x, le diamètre qui passe par son milieu. Si l'on place en même temps l'origine des coordonnées au centre du cercle, et qu'on appelle a son rayon, on aura

$$x = a \cos \frac{s}{a},$$

pour l'abscisse du point quelconque M. On en conclut

$$lx_1 = 2a^2 \sin \frac{l}{2a};$$

et en appelant c la corde de l'arc l, on aura

$$c = 2a \sin \frac{l}{2a}, \quad lx_1 = ac;$$

ce qui montre que la distance x_1 du centre de gravité d'un arc de cercle au centre du cercle, est quatrième proportionnelle au rayon, à la corde et à l'arc.

71. L'équation de la courbe plane fera connaître l'une des deux variables x et y en fonction de l'autre. Si l'on suppose la valeur de y donnée en fonction de x, on prendra

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx;$$

et en appelant α et β les valeurs de x qui répondent aux deux extrémités de l'arc l, on aura, au lieu des équations précédentes,

$$\left.\begin{aligned} l &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx, \\ lx_1 &= \int_\alpha^\beta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx, \\ ly_1 &= \int_\alpha^\beta y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Si la courbe donnée est une section conique, on obtiendra sous forme finie, par les règles ordinaires, les valeurs des intégrales contenues dans les deux dernières équations (2). Dans le cas de la parabole, on obtiendra de même la valeur de l'intégrale que renferme la première de ces équations; en sorte que les deux coordonnées du centre de gravité d'un arc de parabole, pourront toujours s'obtenir en fonctions des abscisses α et β de ses extrémités. D'après un théorème de Landen, l'arc d'hyperbole s'exprime au moyen de deux arcs d'ellipse et d'une partie algébrique; quant à l'arc d'ellipse, on le regarde comme une fonction irréductible à d'autres fonctions plus simples; et M. Legendre a calculé des tables fort étendues de cette fonction, qui en font connaître les valeurs numériques avec une grande approximation. Par conséquent, lorsque les valeurs numériques de α et β et celles des axes de l'hyperbole ou de l'ellipse seront données, il sera facile de calculer la valeur de l, et par suite les coordonnées x_1 et y_1 du centre de gravité d'un arc appartenant à l'une ou l'autre de ces deux courbes.

72. Je prendrai l'arc de *cycloïde* pour un autre exemple de l'application des équations (2). Dans cette courbe, la longueur, l'aire, la surface, le volume engendrés par sa révolution, et les coordonnées de leurs centres de gravité, se déterminent exactement. La construction de la tangente en un point quelconque de cette courbe est aussi très simple; sa développée est une autre cycloïde; et, de plus, par une série de développemens successifs, une courbe quelconque approche de plus en plus de se confondre avec la cycloïde et s'y confondrait rigoureusement à l'infini *. C'est encore la cycloïde que l'on trouve, comme on le verra par la suite, lorsqu'on cherche la courbe qui jouit des propriétés les plus remarquables, par rapport au mouvement curviligne des corps pesans. Cette réunion singulière d'un grand nombre de propriétés curieuses et de nature différente sur une même courbe, en rend la considération très utile et très fréquente en Géométrie et dans la Mécanique. Voici comment on obtient son équation.

La cycloïde est une courbe plane ACB (fig. 24), engendrée par un point déterminé M de la circonférence d'un cercle pendant qu'il roule sans glisser sur une droite AB. Si le point générateur se trouve d'abord au point A, et qu'il arrive ensuite au point B de cette droite, l'intervalle AB sera égal à la circonférence du cercle donné; on voit aussi que son diamètre sera égal à la perpendiculaire CD, abaissée du sommet C de la cycloïde sur AB, et qui divise la courbe en deux parties symétriques. En appelant c le rayon du cercle donné, on aura donc

$$AB = 2\pi c, \quad CD = 2c.$$

Dans une position quelconque du cercle, soient

* *Journal de l'École Polytechnique*, 18e cahier, page 431.

MG son diamètre perpendiculaire à la base AB, et H son point de contact avec cette droite. Du point M, abaissons les perpendiculaires MP et MK sur AB et GH, et faisons

$$AP = p, \quad PM = q;$$

nous aurons

$$AH = AP + MK = p + \sqrt{2cq - q^2}$$

$$\text{arc } MH = c.\text{ arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{2cq - q^2}}{c}\right).$$

Mais le cercle générateur tournant sans glisser sur la droite AB, il s'ensuit qu'on a constamment

$$AH = \text{arc } MH;$$

l'équation demandée de la cycloïde sera donc

$$p + \sqrt{2cq - q^2} = c.\text{ arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{2cq - q^2}}{c}\right);$$

p et q étant les coordonnées courantes.

En la différentiant, on a

$$dp = \frac{q\,dq}{\sqrt{2cq - q^2}},$$

pour son équation différentielle. On en conclut que les deux cordes MG et MH du cercle générateur sont la tangente et la normale à la cycloïde qui répondent au point M. En déterminant par la formule connue son rayon de courbure au même point, on le trouve égal au double de MH; d'où il résulte qu'en prolongeant MH d'une quantité HN égale à MH, le point N sera le centre de courbure. En faisant de même la droite CDE double de CD, le point E sera le centre de courbure qui répond au sommet C; et de là on conclut aisément que la développée ANE de la demi-cycloïde AMC est la même courbe renversée de manière que son sommet C soit transporté en A et son origine A en E. Il s'ensuit que la longueur de ANE ou de AMC est égale à la droite CDE, et que, par conséquent, la longueur totale de la cycloïde est égale à quatre fois le diamètre de son cercle générateur.

73. Dans les usages que nous ferons de cette équation, il sera plus commode de transporter l'origine des coordonnées au sommet C (fig. 25). Je prendrai pour axes des x et des y les droites Cx et Cy, perpendiculaires et parallèles à la base AB. En abaissant du point quelconque M une perpendiculaire MP sur Cx, on aura donc

$$CP = x, \quad MP = y;$$

et si l'on compare ces coordonnées aux précédentes, et que l'on appelle a le diamètre CD du cercle générateur, on voit que

$$p = 1/2\,\pi a - y, \quad q = a - x;$$

donc, en substituant ces valeurs dans l'équation différentielle de la cycloïde, et mettant aussi a au lieu de $2c$, elle deviendra

$$dy = \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{ax - x^2}}. \quad (a)$$

Il en résulte

$$ds = \sqrt{\frac{a}{x}}\,dx.$$

En prenant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse quand $x = 0$, on a

$$s = 2\sqrt{ax},$$

pour la longueur de l'arc CM, dont l'origine est au sommet C. Au point A, on a $x = a$; ce qui donne, comme précédemment, $2a$ pour la longueur de la demi-cycloïde CMA. On peut remarquer que $s^2 = 4ax$ est une équation de la cycloïde semblable à celle de la parabole, dont elle ne diffère qu'en ce que l'ordonnée y s'y trouve remplacée par l'arc s.

En appliquant les deux dernières équations (2) au centre de gravité de l'arc CM, nous aurons

$$sx_1 = \int x\sqrt{\frac{a}{x}}\,dx, \quad sy_1 = \int y\sqrt{\frac{a}{x}}\,dx,$$

où l'on prendra les intégrales de manière qu'elles s'évanouissent avec x. En y mettant pour s sa valeur, il en résulte

$$2x_1\sqrt{x} = \int\sqrt{x}\,dx, \quad 2y_1\sqrt{x} = \int\frac{y\,dx}{\sqrt{x}}.$$

On aura donc

$$x_1 = 1/3\,x;$$

d'où l'on conclut d'abord que le centre de gravité d'un arc M'CM symétrique de part et d'autre du sommet C, qui doit appartenir à la droite CD, se trouve au tiers de CP, à partir du point C.

En intégrant par partie, on a

$$\int\frac{y\,dx}{\sqrt{x}} = 2y\sqrt{x} - 2\int\sqrt{x}\,dy.$$

Si l'on substitue pour dy sa valeur donnée par l'équation (a), on aura donc

$$y_1\sqrt{x} = y\sqrt{x} - \int\sqrt{a - x}\,dx,$$

et, par conséquent,

$$y_1 = y + \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(a - x)^{3/2} - a\sqrt{a}\right];$$

ce qui, joint à la valeur de x_1, détermine complètement le centre de gravité de l'arc CM. Dans le cas de la demi-cycloïde, on a $x = a$ et $y = 1/2\,\pi a$; d'où il résulte

$$x_1 = 1/3\,a, \quad y_1 = a\,(1/2\,\pi - 2/3).$$

74. Quand une courbe plane tourne autour d'une droite comprise dans son plan et que je prendrai pour l'axe des abscisses, elle engendre une surface de révolution dont l'étendue peut se déduire de la longueur de cette courbe et de l'ordonnée de son centre de gravité.

Pour le faire voir, soient x et y l'abscisse et l'ordonnée du point quelconque M de cette courbe, et s l'arc CM aboutissant à ce point et compté d'un point fixe C; l'élément ds engendrera la surface d'un cône tronqué, et son milieu décrira une circonférence égale à $2\pi\,(y + 1/2\,dy)$, ou simplement à $2\pi y$, à cause que dy est un infiniment petit. D'après la règle connue, on aura donc $2\pi y ds$ pour cet élément de surface. Donc, si l'on appelle s_0 et s_1 les valeurs de s qui répondent aux deux extrémités de la courbe génératrice, et S la surface engendrée, on aura, d'après le théorème du n° 13,

$$S = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y ds.$$

On remarquera que cette expression suppose que la courbe génératrice n'est pas coupée par l'axe des x, sans quoi ses parties situées des deux côtés de cet axe décriraient deux surfaces différentes, dont S n'exprimerait plus que la différence. Avec cette restriction, elle subsistera encore lorsque la génératrice sera une courbe fermée; et, pour l'appliquer à ce cas, il suffira de prendre pour s_1 l'arc s_0 augmenté de la circonférence entière de cette courbe.

Cela posé, si l'on compare cette formule à la troisième équation (2), on en conclut

$$S = 2\pi l y_1\,;$$

ce qui montre que la surface engendrée S est égale à la longueur l de la courbe génératrice, multipliée par la circonférence $2\pi y_1$ que décrit son centre de gravité.

Ce théorème servira à déterminer la valeur de S toutes les fois que le centre de gravité de la génératrice sera connu sans aucun calcul, et, pour ainsi dire, à l'inspection de cette courbe; il ne servirait plus à rien s'il fallait calculer l'ordonnée y_1, puisque ce calcul serait le même que celui de S. En supposant, par exemple, que la courbe génératrice soit un cercle; désignant par a son rayon, par c la distance de son centre à l'axe de rotation, et supposant qu'on n'ait pas $c < a$, on aura

$$l = 2\pi a, \quad y_1 = c,$$

et, par conséquent,

$$S = 4\pi^2 ac.$$

Quand le cercle touchera l'axe de rotation, on aura $c = a$, et la surface engendrée sera équivalente au carré dont le côté est égal à la circonférence $2\pi a$ du cercle générateur.

§ II. *Centres de gravité des surfaces.*

75. Soient toujours x, y, z; les coordonnées d'un point quelconque M, et x_1, y_1, z_1, celles du centre de gravité qu'il s'agit de déterminer. Je considère z comme une fonction donnée de x et y; je fais

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

et j'appelle ω l'élément de la surface donnée qui répond au point M; on aura (n° 21)

$$\omega = dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Quel que soit le point de ω où se trouve le centre de gravité de cet élément, ses coordonnées différeront infiniment peu de x, y, z; on pourra donc prendre $\omega x, \omega y, \omega z$, pour les momens de ω par rapport aux trois plans des coordonnées, et il en résultera (n°s 13 et 65)

$$\lambda = \iint \omega, \lambda x_1 = \iint x\omega, \lambda y_1 = \iint y\omega, \lambda z_1 = \iint z\omega;$$

λ étant l'aire de la portion de surface dont on demande le centre de gravité, et les intégrales doubles s'étendant à tous les élémens de λ.

Dans le cas d'une surface plane, et en prenant son plan pour celui des x et y, les quantités p et q seront nulles, et l'on aura seulement à considérer les trois équations.

$$\lambda = \iint dxdy, \quad \lambda x_1 = \iint xdxdy, \quad \lambda y_1 = \iint ydxdy.$$

Supposons que λ soit alors terminée par la courbe ABC (fig. 26); à chaque abscisse x ou OP répondront deux ordonnées PM et PN, que je représenterai par y et y', et qui seront données en fonctions de x par l'équation de cette courbe. Soient aussi a et c les abscisses OD et OE des points A et B où les tangentes sont parallèles aux ordonnées. Les intégrales devront être prises, d'abord depuis $y = PN$ jusqu'à $y = PM$, et ensuite depuis $x = a$ et $x = c$; et il en résultera

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \int_a^c (y - y')\,dx\,, \\ \lambda x_1 &= \int_a^c (y - y')\,xdx\,, \\ \lambda y_1 &= 1/2\int_a^c (y^2 - y'^2)\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Au lieu d'être circonscrite par une courbe fermée ABC, si l'aire λ est comprise entre deux courbes différentes et entre deux droites parallèles à l'axe Oy des ordonnées, on tirera de l'équation de la courbe supérieure la valeur de y, et de l'équation de la courbe inférieure celle de y', et l'on prendra pour a et c les distances de ces deux parallèles au point O. Dans le cas le plus ordinaire, la courbe inférieure sera remplacée par l'axe Ox des abscisses; on aura donc $y' = 0$, et simplement

$$\lambda = \int_a^c y dx,\ \lambda x_1 = \int_a^c yx dx,\ \lambda y_1 = 1/2 \int_a^c y^2 dx, \quad (2)$$

pour déterminer l'aire et le centre de gravité d'une portion de surface plane comprise entre une courbe donnée, l'axe des abscisses et deux ordonnées de cette courbe.

Observons aussi qu'on parvient directement aux équations (1) de la manière suivante.

Je partage l'aire ABC en élémens tels que MNN'M', infiniment minces et parallèles à l'axe Oy. J'appelle u la longueur de la droite MN; par ses deux extrémités M et N, si l'on mène des parallèles à l'axe Ox, on ajoutera à l'élément MNN'M', ou l'on en retranchera des triangles infiniment petits du second ordre, qui n'en altéreront pas la grandeur; par conséquent, cet élément sera égal à udx. Si l'on désigne par v la distance du milieu de MN à l'axe Ox, on pourra prendre x et v pour les deux coordonnées du centre de gravité de cet élément; car il est évident qu'elles n'en pourront différer que de quantités infiniment petites. D'après les autres notations précédentes, on aura donc

$$\lambda = \int_a^c udx,\ \lambda x_1 = \int_a^c xudx,\ \lambda y_1 = \int_a^c vudx. \quad (3)$$

D'ailleurs, y et y' étant toujours les ordonnées PM et PN qui répondent à une même abscisse quelconque, on a aussi

$$u = y - y',\quad v = 1/2\,(y + y');$$

ce qui fait coïncider ces dernières formules avec les équations (1).

76. Pour premier exemple, je suppose qu'on demande le centre de gravité du triangle ABC (fig. 27).

Je place l'origine des coordonnées au sommet C, et je prends l'axe des x perpendiculaire à la base AB; je représente cette base par b, et la hauteur CD par h. Par le point quelconque P appartenant à CD, je mène la perpendiculaire MN à cette droite; CP et MN seront les variables x et u, et l'on aura la proportion

$$u : x \quad :: b$$

de laquelle on tire

$$u = \frac{bx}{h}.$$

On aura, en outre, $a = 0$ et $c = h$. Au moyen de ces valeurs, les deux premières équations (3) donneront

$$\lambda = 1/2\ bh,\quad \lambda x_1 = 1/3\ bh^2;$$

d'où il résulte

$$x_1 = 2/3\ h.$$

On n'aura pas besoin de calculer la valeur de y; car si E est le milieu de AB, et qu'on tire la droite CE, elle coupera en deux parties égales tous les élémens du triangle parallèles à AB, et contiendra, conséquemment, son centre de gravité. Si donc on prend sur CD une partie

$$\text{CF} = 2/3\ \text{CD} = x_1,$$

et qu'on élève la droite FG perpendiculaire à CD, le point G où elle rencontrera CE sera le centre de gravité du triangle. La droite FG coupant CD et CE en parties proportionnelles, on aura aussi

$$\text{CG} = 2/3\ \text{CE};$$

ce qui montre que le centre de gravité d'un triangle se trouve sur la droite qui joint son sommet au milieu de sa base, aux deux tiers de cette droite à partir du sommet, ou au tiers à partir de la base.

77. On démontre aussi ce théorème sans le secours du calcul intégral.

En effet, par la décomposition du triangle ABC (fig. 28) en élémens parallèles au côté AB, on prouvera que son centre de gravité se trouve sur la droite CD, qui joint le sommet C au milieu D de ce côté. En le décomposant en élémens parallèles au côté CA, on prouvera de même que ce centre de gravité est aussi sur la droite BE qui va du sommet B au milieu E de CA; ce point sera donc situé à l'intersection G des deux droites CD et BE. Or, si l'on tire la droite DE, elle sera parallèle à CB, puisqu'elle coupe CA et AB en parties proportionnelles; il en résultera donc

$$\text{DE} : \text{CB} :: \text{AD} : \text{AB} :: 1 : 2,$$
$$\text{DG} : \text{CG} :: \text{DE} : \text{CB} :: 1 : 2;$$

en sorte que DG sera la moitié de CG, et, conséquemment, le tiers de CD; ce qu'il s'agissait de démontrer.

On en peut conclure que les trois droites qui vont des sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés, doivent se couper en un même point; ce qui est conforme à un théorème connu.

Si les sommets A, B, C, du triangle sont les centres de gravité de trois masses égales, le centre de gravité de ces trois corps coïncidera avec celui du triangle; car le centre de gravité des deux masses qui répondent à A et B, se trouvera d'abord au milieu D de la droite AB; et ensuite le centre de gravité de ces deux masses et de la troisième sera le point G de la droite CD, tel que GD est moitié de CG ou le tiers de CD.

Il suit de là et du théorème du n° 67, que si l'on applique au centre de gravité G d'un triangle, des

forces représentées en grandeur et en direction par les droites GA, GB, GC, qui vont de ce point aux trois sommets, ces trois forces seront en équilibre.

78. Connaissant le centre de gravité d'un triangle, on en déduit successivement ceux d'un secteur et d'un segment circulaires.

Soient CADB (fig. 29) le secteur, et C le centre du cercle. Si l'on considère l'arc ADB comme une portion de polygone d'une infinité de côtés égaux, on pourra décomposer le secteur en élémens triangulaires aussi égaux, qui auront tous ces côtés pour bases et leur sommet commun au point C. On appliquera ensuite la force qui agit sur chacun de ces élémens à son centre de gravité; et comme la distance au point C de chaque centre de gravité est les deux tiers du rayon du cercle, il en résultera un système de forces parallèles et égales, appliquées à tous les élémens de l'arc A′ D′ B′, décrit du point C comme centre, et d'un rayon égal à 2/3 CD. Par conséquent, le centre de gravité du secteur sera le centre de ces forces parallèles, c'est-à-dire, le centre de gravité de cet arc A′ D′ B′. Or, en désignant par a, l, c, le rayon CD, l'arc ADB et la corde AB, les quantités analogues, relativement à A′ D′ B′, seront $2/3\,a$, $2/3\,l$, $2/3\,c$; si donc G est le centre de gravité demandé, et qu'on fasse $CG = x$, on aura, d'après le théorème du n° 70,

$$x = \frac{2ac}{3l}.$$

Maintenant, soient S, S′, S_1, les surfaces du secteur CADB, du triangle CAB et du segment ADBE; appelons G, G′, G_1, leurs centres de gravité, qui seront évidemment sur le rayon CD aboutissant au milieu D de l'arc ADB; si l'on désigne par x, x', x_1, les distances de ces trois points au centre C, et qu'on y applique des forces parallèles et proportionnelles à S, S′, S_1, la première sera la résultante des deux autres; en considérant les momens de ces forces, on aura donc

$$Sx = S'x' + S_1 x_1.$$

On a, d'ailleurs,

$$S = \frac{1}{2}\,al, \quad x = \frac{2ac}{3l}.$$

En appelant h la hauteur CE du triangle dont la base est AB ou c, on a aussi

$$S' = 1/2\,ch, \quad x' = 2/3\,h.$$

Donc, à cause de

$$S_1 = S' - S = 1/2\,(al - ch),$$

l'équation des momens deviendra

$$1/3\,a^2 c = 1/3\,ch^2 + 1/2\,(al - ch)\,x_1;$$

et elle fera connaître la distance x_1 du centre de gravité du segment ADBE au centre du cercle. En observant que

$$c = 2a \sin\frac{l}{2a}, \quad h = a\cos\frac{l}{2a},$$

on en déduira

$$x_1 = \frac{4a^2 \sin^3\frac{l}{2a}}{3\left(l - a\sin\frac{l}{a}\right)}.$$

Lorsque l'arc l est la demi-circonférence, on a $l = \pi a$; le secteur et le segment coïncident ainsi que les distances x et x_1, dont la valeur commune est

$$x = x_1 = \frac{4a}{3\pi}.$$

79. Si l'on prend successivement les trois sections coniques pour la courbe à laquelle répondent les formules (2), les intégrations s'effectueront par les règles connues, et l'on pourra obtenir, sous forme finie, les valeurs des deux coordonnées x_1 et y_1 du centre de gravité. J'indique cet exemple comme exercice de calcul, et je passe immédiatement à la détermination du centre de gravité de l'aire de la cycloïde.

Soit CPM (fig. 25) le segment dont on veut trouver le centre de gravité; en désignant par x et y l'abscisse CP et l'ordonnée PM, comme dans l'équation (a) du n° 73, il faudra que les intégrales contenues dans les formules (2) s'évanouissent quand $x = 0$; et en intégrant par partie, ces formules deviendront

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= xy - \int x\,dy, \\ \lambda x_1 &= 1/2\,x^2 y - 1/2 \int x^2\,dy, \\ \lambda y_1 &= 1/2\,xy^2 - \int xy\,dy; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

les nouvelles intégrales s'évanouissant aussi en même temps que x.

En vertu de l'équation (a), on a

$$\int x\,dy = \int \sqrt{ax - x^2}\,dx;$$

mais si N est le point où l'ordonnée PM rencontre le cercle décrit sur CD comme diamètre, cette dernière intégrale exprime le demi-segment circulaire CNP; en représentant, pour abréger, par γ l'aire de ce demi-segment, on aura donc

$$\lambda = xy - \gamma.$$

Dans le cas où le point M coïncide avec le point A, on aura

$$x = CD = a,\ y = DA = 1/2\,\pi a,\ \gamma = 1/8\,\pi a^2,$$

et, par conséquent,

$$\lambda = 3/8\,\pi a^2.$$

L'aire CAD de la demi-cycloïde est donc triple de celle du demi-cercle CND, dont le rayon est

$1/2\, a$, ou, autrement dit, l'aire de la cycloïde entière est égale à trois fois celle de son cercle générateur.

On aura aussi

$$\int x^2\, dy = \int z \sqrt{ax - x^2}\, dx,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\int x^2\, dy = 1/2\, a \int \sqrt{ax - x^2}\, dx - \int (1/2\, a - x) \sqrt{ax - x^2}\, dx.$$

La dernière intégrale s'obtient immédiatement; et à cause qu'elle doit s'évanouir, quand $x = 0$, nous aurons

$$\lambda x_1 = 1/3\, x^2 y - 1/4\, a\gamma + 1/6\, (ax - x^2)^{3/2};$$

équation qui fera connaître la valeur de x_1 d'après celle de λ

Dans le cas de la demi-cycloïde CAD, où l'on a, en même temps,

$$x = a,\ y = 1/2\, \pi a,\ \gamma = 1/8\, \pi a^2,\ \lambda = 3/8\, \pi a^3,$$

on en conclura

$$x_1 = \frac{7a}{12},$$

pour la distance de son centre de gravité à l'axe Cy. Ainsi, le centre de gravité de l'aire entière de la cycloïde se trouve aux sept douzièmes de la hauteur CD, à partir du sommet C.

Relativement à un segment quelconque CMP, il reste à déterminer l'ordonnée y_1; ce qui exige un calcul plus compliqué.

80. En vertu de l'équation (a), on a

$$\int xy\, dy = \int y \sqrt{ax - x^2}\, dx,$$

et la valeur de y peut s'écrire ainsi :

$$y = \int \frac{(1/2\, a - x)\, dx}{\sqrt{ax - x^2}} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}};$$

en faisant donc, pour un moment,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = z,$$

et supposant que cette intégrale soit nulle comme toutes les autres, quand $x = 0$, on aura

$$y = \sqrt{ax - x^2} + 1/2\, az;$$

d'où il résultera

$$\int xy\, dy = 1/2\, ax^2 - 1/3\, x^3 + 1/2\, a \int z \sqrt{ax - x^2}\, dx. \quad (5)$$

Parce que l'on a fait

$$\gamma = \int \sqrt{ax - x^2}\, dx,$$

on aura, en intégrant par partie,

$$\int z \sqrt{ax - x^2}\, dx = z\gamma - \int \gamma dz. \quad (6)$$

On peut écrire l'expression de γ sous la forme

$$\gamma = \frac{1}{4}\, a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} - \int \frac{(1/2a - x)^2 dx}{\sqrt{ax - x^2}};$$

et en intégrant par partie dans le second terme, il vient

$$\gamma = \frac{1}{4} a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} - \left(\frac{1}{2}\, a - x\right) \sqrt{ax - x^2} - \int \sqrt{ax - x^2}\, dx;$$

d'où l'on conclut

$$\gamma = 1/8\, a^2 z - 1/2\, (1/2\, a - x) \sqrt{ax - x^2}.$$

A cause de $\sqrt{ax - x^2}\, dz = dx$, on aura donc

$$\int \gamma dz = 1/16\, a^2 z^2 - 1/4\, (ax - x^2).$$

Je substitue ces valeurs de γ et $\int \gamma dz$ dans l'équation (6); il en résulte

$$\int z \sqrt{ax - x^2}\, dx = \frac{1}{16}\, a^2 z^2 - \frac{z}{2} \left(\frac{1}{2}\, a - x\right) \sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{4}\, (ax - x^2);$$

ce qui change l'équation (5) en celle-ci :

$$\int xy\, dy = 1/8\, a^2 z + 3/8\, ax^2 - 1/3\, x^3 + 1/32\, a^3 z^2 - 1/4\, az (1/2a - x) \sqrt{ax - x^2}. \quad (7)$$

Au moyen de cette valeur et de celle de z, savoir :

$$z = arc \left(\cos = \frac{a - 2x}{a}\right),$$

la troisième équation (4) ne contiendra plus rien d'inconnu, et fera connaître la valeur de y_1 pour un segment quelconque CMP.

Dans le cas de la demi-cycloïde CAD, on aura

$$x = a,\ z = arc\ (\cos = -1) = \pi;$$

la formule (7) se réduira à

$$\int xy\, dy = a^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{\pi^2}{32}\right);$$

et à cause de

$$y = 1/2\, \pi a,\ \lambda = 3/3\, \pi a^2,$$

la troisième équation (4) donnera

$$y_1 = \frac{\pi a}{4} \left(1 - \frac{4}{9\pi^2}\right);$$

ce qui, joint à la valeur de x_1 du numéro précédent, déterminera complètement la position du centre de gravité.

81. Soit S l'aire d'une zone de surface de révolution, comprise entre deux plans perpendiculaires à son axe de figure. Cet axe renfermera le centre de gravité de S : je le prendrai pour l'axe des x; et je désignerai par x_1 la distance de ce centre à l'origine des coordonnées, et par a et c les distances à la même origine, des deux plans qui terminent S; la détermination du centre de gravité de cette zone se réduira à celle de la valeur de x_1.

Je décompose S en élémens dont chacun sera la surface d'un cône tronqué décrite par le côté infiniment petit de la courbe génératrice, comme dans le n° 74; celui qui répond au point M de cette courbe dont les coordonnées sont x et y, sera égal à $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$; il aura aussi son centre de gravité sur l'axe des x, et l'on pourra prendre x pour la distance de ce point à l'origine des coordonnées, puisqu'elle ne pourra différer de x que d'un infiniment petit. Cela étant, on aura (nos 13 et 65),

$$\left.\begin{aligned} S &= 2\pi\int_a^c y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx,\\ Sx_1 &= 2\pi\int_a^c xy\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx,\end{aligned}\right\}(8)$$

en considérant y comme une fonction de x, donnée par l'équation de la génératrice.

Si cette courbe est, par exemple, un arc de cercle; que l'on place l'origine des coordonnées à son centre, et qu'on appelle a son rayon, on aura

$$y=\sqrt{a^2-x^2};$$

d'où il résultera

$$S=2\pi a\,(c-a),$$
$$Sx_1=\pi a\,(c^2-a^2),$$

et, par conséquent,

$$x_1=1/2\,(a+c);$$

ce qui montre que le centre de gravité d'une zone sphérique est au milieu de la partie du diamètre comprise entre les deux plans qui la terminent, et perpendiculaire à ces plans.

82. La cycloïde nous fournira deux exemples de l'application des formules (8), en faisant tourner successivement l'arc CM (fig. 25) autour de l'axe Cx et de l'axe Cy.

Dans le premier cas, on aura, en vertu de l'équation (a) du n° 73,

$$S=2\pi\sqrt{a}\int y\frac{dx}{\sqrt{x}},\quad Sx_1=2\pi\sqrt{a}\int y\sqrt{x}\,dx,$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent au point C, où l'on a $x=0$. En intégrant par partie, et ayant égard à la valeur de dy donnée par la même équation (a), il vient

$$S=4\pi y\sqrt{ax}-4\pi\sqrt{a}\int\sqrt{a-x}\,dx,$$

$$Sx_1=\frac{4\pi}{3}yx\sqrt{ax}-\frac{4\pi}{3}\sqrt{a}\int x\sqrt{a-x}\,dx;$$

et, par conséquent,

$$S=4\pi y\sqrt{ax}+\frac{8\pi}{3}\sqrt{a}(a-x)^{3/2}-\frac{8\pi}{3}a^3,$$

$$Sx_1=\frac{4\pi}{3}yx\sqrt{ax}+\frac{8\pi}{9}x\sqrt{a}(a-x)^{3/2}$$
$$+\frac{16\pi}{45}\sqrt{a}(a-x)^{5/2}-\frac{16\pi}{45}a^3;$$

ce qui fait connaître la surface concave vers l'axe de figure, engendrée par l'arc CM, et la distance de son centre de gravité au point C. Quand cet arc devient la demi-cycloïde CA, on a $x=a$ et $y=1/2\pi a$, et, conséquemment.

$$S=2\pi a^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right),\qquad Sx_1=\frac{2\pi a^3}{3}\left(\pi-\frac{8}{15}\right).$$

Dans le second cas, il faudra, pour continuer de faire usage de l'équation (a) du n° 73, permuter x et y dans les formules (8), lesquelles deviendront, par là,

$$S=2\pi\int x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx,$$

$$Sy_1=2\pi\int xy\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx;$$

y_1 étant la distance au point C, du centre de gravité de S situé sur la droite Cy, et les intégrales s'évanouissant au point C, c'est-à-dire, quand $x=0$. D'après l'équation (a), nous aurons

$$S=2\pi\int x\sqrt{\frac{a}{x}}\,dx=\frac{4\pi}{3}x\sqrt{ax};$$

la valeur de Sy_1 sera la même que celle de Sx_1 du premier cas, et en la divisant par cette valeur de S, on aura la distance au point C, du centre de gravité de la surface convexe vers l'axe de figure, engendrée par l'arc CM. Lorsque cet arc deviendra la demi-cycloïde CA, la surface engendrée sera égale à $4\pi a^2$; en même temps, la distance y_1 aura pour valeur

$$y_1=\frac{a}{2}\left(\pi-\frac{8}{15}\right).$$

On peut remarquer que quand un même arc de courbe tourne successivement autour de deux axes rectangulaires et passant par une de ses extrémités, le second membre de la seconde équation (8) ne change pas de valeur, et, par consé-

quent, les distances à cette extrémité, des centres de gravité des deux surfaces engendrées, sont en raison inverse des aires de ces surfaces.

83. Si la courbe ABC (fig. 26) tourne autour de l'axe Ox; compris dans son plan et qui ne la traverse pas, sa surface engendrera un solide de révolution dont le volume que je représenterai par V, pourra s'exprimer au moyen de l'aire de cette surface et de l'ordonnée y_1 de son centre de gravité.

En conservant toutes les notations du n° 75, il est aisé de voir qu'on aura

$$V = \pi \int_a^c (y^2 - y'^2)\, dx.$$

En effet, la tranche infiniment petite de ce volume, engendrée par l'élément MNN'M' de l'aire génératrice, sera la différence $\pi y^2\, dx - \pi y'^2\, dx$ des deux cylindres dont les rayons sont PM et PN, et qui ont dx pour hauteur commune; car on peut négliger les volumes infiniment petits du second ordre, engendrés par les triangles que l'on retranche de cet élément, ou qu'on y ajoute, en menant par les points M et N des parallèles à l'axe Ox. Or, si l'on compare cette expression de V à la troisième formule (1) du numéro cité, on a

$$V = 2\pi\lambda y_1;$$

ce qui montre que le volume engendré par l'aire λ d'une courbe plane, est égal à cet aire multipliée par la circonférence $2\pi y_1$ du cercle que décrit son centre de gravité; théorème analogue à celui du n° 74, et qui servira à déterminer le volume V quand le centre de gravité de λ sera connu *à priori*. Il subsistera encore, lorsque la surface génératrice, au lieu d'être circonscrite par une courbe fermée, sera comprise entre deux courbes différentes et deux perpendiculaires à l'axe de figure, pourvu que cet axe ne passe pas entre ces deux courbes planes.

Si l'aire génératrice est un demi-cercle tournant autour de son diamètre, la distance de son centre de gravité à cet axe de rotation, sera égal à $\frac{4a}{3\pi}$ (n° 78), en désignant par a son rayon; la circonférence décrite par ce point aura donc $\frac{8a}{3}$ pour longueur; et comme l'aire du demi-cercle est $1/2\,\pi a^2$, on aura

$$V = \frac{4\pi a^3}{3};$$

ce qui est, effectivement, le volume de la sphère.

Supposons encore que la courbe fermée ABC soit une ellipse, et représentons par a et b ses deux demi-axes, et par c la distance de son centre à l'axe de rotation. L'aire λ sera, comme on sait, égale à πab; et son centre de gravité étant évidemment le centre de figure, on aura $y_1 = c$; d'où il résultera

$$V = 2\pi^2 abc,$$

quelle que soit l'inclinaison de l'un ou l'autre des axes de l'ellipse sur l'axe de rotation.

84. Il est évident que le segment du solide de révolution compris entre deux plans passant par l'axe de figure, est au solide entier comme l'angle de ces deux plans est à quatre angles droits, ou, ce qui est la même chose, comme l'arc décrit entre les deux plans, par le centre de gravité de l'aire génératrice, est à la circonférence entière $2\pi y_1$. Donc, en appelant l la longueur de cet arc, et L le volume du segment, on aura

$$L = l\lambda;$$

λ étant toujours l'aire génératrice qui, par hypothèse, n'est point traversée par l'axe de rotation.

Cette formule peut s'étendre de la manière suivante à d'autres segmens qui n'appartiennent pas à des solides de révolution.

Supposons, en effet, qu'une courbe plane se meuve sans glisser ni tourner dans son plan, et de telle sorte que ce plan soit constamment perpendiculaire à une ligne donnée, qui peut être une courbe plane ou à double courbure. Dans ce mouvement, le même point de ce plan demeurera toujours sur la directrice, et les autres points décriront des courbes semblables à cette ligne. Soient λ, L, l, l'aire de la courbe génératrice, le volume engendré par cette surface, et la longueur de la courbe parcourue par son centre de gravité. Si l était un arc de cercle, L serait un segment de solide de révolution; mais, dans tous les cas, on peut diviser l en parties infiniment petites, dont chacune se confondra avec le cercle osculateur qui lui correspond. Désignons par α l'une de ces parties, et par v le volume du segment correspondant de L; et supposons que les plans perpendiculaires à sa direction, par lesquels v est terminé, se coupent suivant une droite qui ne traverse pas l'aire de la génératrice. Cet élément v de L sera un segment de solide de révolution; et d'après l'équation précédente, on aura

$$v = \alpha\lambda.$$

Donc, en prenant la somme de toutes les valeurs de v et observant que le facteur λ est constant, il en résultera que le volume L est égal au produit de l et λ, comme dans le cas d'un solide de révolution. La règle que cette équation $L = \lambda l$ renferme est utile dans la pratique, et susceptible d'un assez grand nombre d'applications; toutefois, on ne devra point oublier qu'elle n'a plus lieu quand les génératrices consécutives se coupent sur la surface engendrée, et forment, par leurs intersections successives, ce qu'on appelle une *arête de rebroussement*.

85. La considération du centre de gravité fournit aussi une règle pour évaluer le volume d'un prisme

ou d'un cylindre à base quelconque, tronqué par un plan incliné sur cette base.

Soient γ l'aire d'une section de cylindre perpendiculaire à sa génératrice, λ l'aire de la section inclinée qui le termine, θ l'angle de ces deux plans, ω un élément quelconque de λ, ϵ sa projection sur le plan de γ, ou l'élément correspondant de l'aire γ, qui est elle-même la projection de λ. D'après le théorème du n° 10, on aura

$$\gamma = \lambda \cos \theta, \quad \epsilon = \omega \cos \theta.$$

Cela étant, je suppose que λ soit la surface à laquelle se rapportent les formules générales du n° 75, et que θ représente l'inclinaison de son plan sur celui des x et y. Je multiplie la troisième de ces formules par $\cos \theta$, et je fais passer ce facteur constant sous le signe $\int\int$; en vertu des valeurs de γ et ϵ, on aura

$$\gamma z_1 = \int\int z\epsilon.$$

Or, cette intégrale double est le volume du cylindre tronqué compris entre les deux sections γ et λ, et décomposé en filets infiniment minces et perpendiculaires à γ, en supposant, toutefois, que ces deux sections ne se coupent pas mutuellement; il s'ensuit donc que le cylindre tronqué est égal à un cylindre droit ayant la même base γ, et pour hauteur la distance z_1 à cette base, du centre de gravité de la section inclinée.

Ce théorème est évident dans le cas ordinaire, où la base du cylindre est un cercle et la section inclinée une ellipse; car en menant par le centre de cette courbe un plan parallèle à la base, ce cylindre ne change pas de volume puisque le segment qu'on en retranche est évidemment égal à celui qu'on y ajoute.

Si les aires désignées par γ et λ se coupent mutuellement, le volume se composera de deux segmens dont l'intégrale $\int\int z\epsilon$ exprimera la différence et non pas la somme. Quand le cylindre sera terminé par deux sections inclinées dont les aires ne se coupent pas, on pourra toujours le diviser en deux parties, dont la base commune et perpendiculaire à la génératrice, ne coupera ni l'une ni l'autre de ces deux sections; et en observant que leurs centres de gravité se trouvent sur une même droite perpendiculaire à cette base, on voit que le volume total sera égal à l'aire de cette base multipliée par la distance mutuelle de ces deux points.

§ III. *Centres de gravité des volumes et des corps.*

86. La détermination du centre de gravité d'un volume dépend, en général, de plusieurs intégrales triples; mais il y a des corps pour lesquels la position de ce centre se détermine par des intégrales simples. Ce sont ces corps que nous allons d'abord considérer.

Le centre de gravité d'une pyramide ou d'un cône à base quelconque se trouve sur la droite qui va de son sommet au centre de gravité de la base; car cette droite rencontre toutes les sections parallèles à la base, en des points homologues qui sont leurs centres de gravité, et qu'on peut aussi prendre pour les centres de gravité des élémens de ce corps, infiniment minces et parallèles à sa base. Par conséquent, la droite dont il s'agit contient le centre de gravité de la pyramide ou du cône, et il ne reste plus qu'à déterminer sa position sur cette ligne.

Soient b et X l'aire de la base et celle d'une section parallèle; désignons par h et x les perpendiculaires abaissées du sommet sur leurs plans; nous aurons, comme on sait,

$$X : b :: x^2 : h^2$$

et, conséquemment,

$$X = \frac{bx^2}{h^2}.$$

De plus, on pourra prendre Xdx pour l'élément du volume du cône ou de la pyramide; et si l'on appelle V son volume total, et x_1 la valeur de x correspondante à la section qui contient le centre de gravité, on en conclura, comme dans les questions précédentes,

$$V = \int_0^h Xdx, \quad Vx_1 = \int_0^h xXdx.$$

En substituant la valeur de X et effectuant les intégrations, il vient

$$V = \frac{bh}{3}, \quad Vx_1 = \frac{bh^2}{4};$$

d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{3}{4}h.$$

Mais si l'on mène par le centre de gravité un plan parallèle à la base, il coupera en parties proportionnelles la hauteur h et la droite qui va du sommet au centre de gravité de la base; il s'ensuit donc que le centre de gravité du cône ou de la pyramide à base quelconque se trouve aux trois quarts de cette droite, à partir du sommet, ou au quart, à partir de la base.

87. Relativement à la pyramide triangulaire, ce théorème se démontre sans le secours du calcul intégral.

Soit ABCD (fig. 30) cette pyramide. Soient aussi E et F les centres de gravité des faces ACD et BCD; tirons les droites BF et AE, dont les prolongemens se rencontreront au milieu H de l'arête CD; et ensuite dans le plan AHB, tirons les droites AF et BE, qui se couperont en un certain point G. Je dis que ce point sera le centre de gravité de la pyramide ABCD; car en la décomposant en élémens parallèles à la base ACD, on verra, comme dans le nu-

méro précédent, que son centre de gravité doit se trouver sur la droite BE; et en la décomposant en élémens parallèles à BCD, on verra, de même, que ce point appartient à la droite AF. Ces deux droites AF et BE, qui sont effectivement dans un même plan, devront donc se couper, et leur intersection G sera le centre de gravité demandé.

Maintenant, dans le triangle ABH, la droite EF est parallèle à la base AB, puisqu'elle coupe les côtés AH et BH en parties proportionnelles, c'est-à-dire, au tiers à partir de H; on aura donc

$$FG : GA :: EF : AB :: EH : AH,$$

et, par conséquent,

$$FG : GA :: 1 : 3;$$

en sorte que FG est le tiers de GA ou le quart de AF; ce qu'il s'agissait de prouver.

On en conclut que si les quatre sommets A, B, C, D, de la pyramide sont les centres de gravité de masses égales, le point G sera le centre de gravité de ces quatre masses; car déjà le point F est celui des trois masses qui répondent à B, C, D (n° 77); et ensuite le point G, tel que GF est le tiers de GA, sera le centre de gravité de ces trois masses et de la quatrième.

Il suit de là (n° 67) que si l'on applique au centre de gravité de la pyramide triangulaire des forces représentées, en grandeur et en direction, par les droites qui vont de ce point aux quatre sommets, ces quatre forces se feront équilibre.

88. Ayant déterminé le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, on en déduit immédiatement celui d'une pyramide ou d'un cône à base quelconque, en décomposant cette base en un nombre fini ou infini de triangles : le centre de gravité de cette pyramide ou de ce cône doit se trouver à la fois sur la droite qui va du sommet au centre de gravité de la base, et dans le plan parallèle à la base qui coupe toutes les lignes menées du sommet à cette base, aux trois quarts à partir du sommet; ce qui s'accorde avec le résultat du n° 86.

On en déduit aussi le centre de gravité d'un secteur sphérique. En effet, si l'on décompose ce secteur en une infinité de pyramides dont le sommet commun soit au centre de la sphère, et qui aient pour bases les élémens infiniment petits de la base du secteur, leurs centres de gravité se trouveront tous sur la base du secteur concentrique, dont le rayon sera les trois quarts de celui du secteur donné; d'où l'on conclut que le centre de gravité du secteur donné sera le même que celui de la base du secteur concentrique; ce qui en détermine la position.

Supposons que le secteur sphérique soit engendré par le secteur circulaire CADB (fig. 29), tournant autour du rayon CD, qui aboutit au milieu de l'arc AB; le triangle CAB et le segment circulaire ADB engendreront, en même temps, un cône et un segment sphérique : et le centre de gravité de ce segment sphérique se déterminera d'après ceux du secteur sphérique et du cône.

Pour cela, appelons V_1, V, V', les volumes respectifs de ces trois corps, et x_1, x, x', les distances de leurs centres de gravité au point C; nous aurons

$$V = V' + V_1, \quad Vx = V'x' + V_1 x_1. \quad (a)$$

Soient a le rayon CD, c la corde AB et f la flèche DE de l'arc ADB. Relativement au cône, on aura

$$V' = 1/12\ \pi c^2 (a - f), \quad x' = 3/4\ (a - f).$$

La base du secteur sphérique sera égale au produit de la flèche et de la circonférence du grand cercle, ou à $2\pi af$, et son volume aura pour valeur le produit de cette base et de $\frac{1}{3}a$, ou $\frac{2\pi a^2 f}{3}$. Si l'on décrit du point C comme centre, et d'un rayon égal à 3/4 CD, un arc de cercle tel que A' D' B', le centre de gravité de la surface engendrée par cet arc, se trouvera au milieu de la flèche D'E' (n° 81), ou, autrement dit, à une distance du point C égale à CD' — 1/2 D'E', dont la valeur est $3/4\ (a - 1/2 f)$. Donc, ce centre de gravité étant, d'après ce qu'on vient de dire, celui du secteur sphérique V, on aura

$$V = \frac{2\pi a^2 f}{3}, \quad x = \frac{3}{4}\left(a - \frac{1}{2} f\right).$$

En substituant ces différentes valeurs dans les équations (a), il vient

$$2/3\ \pi a^2 f = 1/12\ \pi c^2 (a - f) + V_1,$$
$$1/2\ \pi a^2 f (a - 1/2 f) = 1/16\ \pi c^2 (a - f)^2 + V_1 x_1$$

d'où l'on tirera les valeurs de V_1 et x_1.

Si l'on appelle l la longueur de l'arc AB, on aura

$$c = 2a \sin \frac{l}{2a}, \quad f = a\left(1 - \cos \frac{l}{2a}\right),$$

et il en résultera

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}\left(1 - \cos \frac{l}{2a} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{l}{2a} \cos \frac{l}{2a}\right),$$

$$x_1 = \frac{3a \sin^4 \frac{l}{2a}}{8\left(1 - \cos \frac{l}{2a} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{l}{2a} \cos \frac{l}{2a}\right)};$$

Lorsque l'arc l est la demi-circonférence, on a $l = \pi a$, et par suite

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}, \quad x_1 = \frac{3a}{8}.$$

89. On détermine aussi par des intégrales simples le volume et le centre de gravité de tout corps

symétrique par rapport à un axe, comme un ellipsoïde, par exemple.

Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface; prenons l'axe de figure pour celui des x, et désignons par X l'aire de la section perpendiculaire à cette droite, qui répond à l'extrémité de l'abscisse x. Si l'on décompose le volume en élémens infiniment minces et perpendiculaires à l'axe de figure, on pourra prendre Xdx pour le volume d'un élément quelconque, et x pour la distance de son centre de gravité à l'origine des coordonnées. Donc, en désignant par V une tranche comprise entre deux sections correspondantes à des abscisses données a et $\mathcal{C}$, et par x_1 la distance de son centre de gravité à l'origine des coordonnées, nous aurons

$$V = \int_a^{\mathcal{C}} X\,dx, \quad Vx_1 = \int_a^{\mathcal{C}} xXdx.$$

Dans le cas de l'ellipsoïde, l'équation de la surface est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

a, b, c, désignant les trois demi-axes. Ceux de la section X seront

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

on aura donc

$$X = bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

et, par conséquent,

$$V = \pi bc(\mathcal{C} - a)\left(1 - \frac{a^2 + a\mathcal{C} + \mathcal{C}^2}{3a^2}\right),$$

$$Vx_1 = \frac{1}{2}\pi bc(\mathcal{C}^2 - a^2)\left(1 - \frac{a^2 + \mathcal{C}^2}{2a^2}\right);$$

d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{3(a + \mathcal{C})(2a^2 - a^2 - \mathcal{C}^2)}{4(3a^2 - a^2 - a\mathcal{C} - \mathcal{C}^2)}$$

Si l'on applique cette formule au segment sphérique que l'on a considéré dans le n° précédent, il faudra prendre

$$a = a\cos\frac{l}{2a}, \quad \mathcal{C} = a;$$

ce qui donne

$$x_1 = \frac{3a\left(1 + \cos\frac{l}{2a}\right)\sin^2\frac{l}{2a}}{4\left(1 - \cos\frac{l}{2a} + \sin^2\frac{l}{2a}\right)};$$

et en multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1 - \cos\frac{l}{2a}$, on vérifie qu'elle coïncide avec la valeur de x_1 déjà trouvée.

Pour avoir la valeur entière de l'ellipsoïde, il faudra faire $\mathcal{C} = a$ et $a = -a$; ce qui donne

$$V = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Ce volume est aussi donné par l'intégrale triple $\iiint dxdydz$, étendue à tous les élémens de l'espace terminé par la surface de l'ellipsoïde; mais en faisant

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz',$$

l'équation de cette surface devient

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

et l'intégrale triple se change en

$$abc\iiint dx'dy'dz'.$$

Cette nouvelle intégrale devra s'étendre à tous les élémens de l'espace circonscrit par la surface qui répond à l'équation précédente; elle sera, par conséquent, le volume de la sphère qui a l'unité pour rayon; et ce volume étant égal à $\frac{4\pi}{3}$, il en résulte $\frac{4\pi abc}{3}$, comme précédemment, pour celui de l'ellipsoïde.

90. Les corps symétriques autour d'un axe comprennent les solides de révolution. Nous prendrons toujours l'axe de figure pour celui des abscisses x. En supposant alors un solide de cette nature engendré par une aire plane, comprise entre deux courbes données et les perpendiculaires à l'axe des x qui répondent à $x = a$ et $x = \mathcal{C}$, et désignant par y et y' les ordonnées de ces courbes relatives à une même abscisse quelconque x, il faudra faire

$$X = \pi(y^2 - y'^2),$$

dans les formules du numéro précédent; ce qui donne

$$V = \pi\int_a^{\mathcal{C}}(y^2 - y'^2)dx, \quad Vx_1 = \pi\int_a^{\mathcal{C}}(y^2 - y'^2)xdx.$$

Dans le cas le plus ordinaire où la courbe intérieure se confondra avec l'axe de figure, on aura $y' = 0$, et simplement

$$V = \pi\int_a^{\mathcal{C}} y^2\,dx, \quad Vx_1 = \pi\int_a^{\mathcal{C}} y^2\,xdx. \quad (b)$$

La cycloïde fournira encore des exemples de l'application de ces formules, dans lesquels toutes les intégrations s'effectueront sous forme finie.

Si l'on considère le solide convexe, engendré par l'aire CMP (fig. 25) tournant autour de l'axe

Cx, on intégrera d'abord par partie; ce qui donnera

$$V = \pi x y^2 - 2\pi \int xydy,$$
$$Vx_1 = 1/2\, \pi x^2 y^2 - \pi \int x^2 ydy;$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent au point C, ou quand $x = 0$. En vertu de l'équation (a) du n° 73 on aura donc

$$V = \pi x y^2 - 2\pi \int y \sqrt{ax - x^2}\, dx,$$
$$Vx_1 = 1/2\, \pi x^2 y^2 - \pi \int yx \sqrt{ax - x^2}\, dx;$$

et les calculs s'achèveront par des transformations semblables à celles du n° 80. Dans le cas du volume engendré par la demi-cycloïde CAB, on trouve

$$V = \frac{\pi a^3}{3}\left(\frac{9\pi^2}{16} - 1\right),\ x_1 = \frac{(63\pi^2 - 64)\, a}{12\,(9\pi^2 - 16)}.$$

S'il s'agit, au contraire, du solide convexe engendré par l'aire CMP tournant autour de l'axe Cy, il faudra préalablement permuter x et y dans les équations (b); d'où il résultera

$$V = \pi \int x^2\, dy,\ Vy_1 = \pi \int x^2\, ydy;$$

y_1 étant la distance au point C, du centre de gravité qui se trouve sur l'axe Cy, et les intégrales s'évanouissant en ce point C. En vertu de l'équation (a) de la cycloïde, on aura donc

$$V = \pi \int x \sqrt{ax - x^2} dx,\ Vy_1 = \pi \int yx \sqrt{ax - x^2} dx.$$

La première intégrale s'obtiendra sans difficulté; la seconde, par des transformations semblables à celles du n° 80. Dans le cas où CM sera la demi-cycloïde entière, on trouvera

$$V = \frac{\pi^2 a^3}{16},\ y_1 = \left(\frac{16}{9} + \frac{\pi^2}{4}\right)\frac{a}{\pi}.$$

91. Maintenant, soient x_1, y_1, z_1, les trois coordonnées rectangulaires du centre de gravité d'un corps de forme quelconque, homogène ou hétérogène, dont la masse sera représentée par M. D'après ce qu'on a déjà dit dans le n° 65, il faudra, pour déterminer ces trois inconnues, diviser M en parties infiniment petites, et changer, en conséquence, les sommes en intégrales dans les seconds membres des équations (1) de ce numéro. On aura, de cette manière,

$$Mx_1 = \iiint x dm,\ My_1 = \iiint y dm,\ Mz_1 = \iiint z dm;\ (1)$$

dm étant l'élément différentiel de la masse du corps qui répond aux coordonnées x, y, z. En appelant ρ la densité de ce même élément, et dv son volume, on aura aussi

$$dm = \rho dv.$$

On pourra prendre maintenant, pour l'élément dv du volume, le parallélépipède rectangle dont les trois côtés adjacens sont parallèles aux axes des x, y, z, et égaux aux différentielles dx, dy, dz; d'où il résultera

$$dv = dxdydz.$$

Si le corps est homogène, sa densité sera constante; en désignant par V son volume, on aura

$$M = \rho V;$$

et les équations (1) deviendront

$$Mx_1 = \iiint x dv,\ My_1 = \iiint y dv,\ Mz_1 = \iiint z dv. (2).$$

Si le corps est hétérogène, il pourra se présenter deux cas différens. Dans le premier cas, ce corps se composera de parties homogènes de grandeur finie, et la densité ne variera que d'une partie à l'autre. On appliquera donc à chacune d'elles les équations (2), puis on déterminera le centre de gravité du corps entier d'après ceux de toutes ses parties (n° 64). Dans le second cas, la densité variera par degrés insensibles dans l'intérieur du corps; et alors on fera usage des équations (1), dans lesquelles ρ devra être une fonction donnée de x, y, z.

Toutefois, on doit remarquer que, soit qu'il s'agisse d'un corps homogène ou d'un corps hétérogène, la division de la masse en élémens infiniment petits, dont les densités sont les mêmes ou ne varient que par degrés insensibles, suppose que ce corps est formé d'une matière continue. Or, cela n'a pas lieu dans la nature, où les corps, au contraire, se composent de parties matérielles disjointes et séparées les unes des autres par des espaces vides, comparables en grandeur aux parties pleines. Nous reviendrons sur cette observation dans le chapitre suivant, et nous ferons voir qu'on peut, néanmoins, appliquer les formules (1) et (2) aux corps naturels, comme si la matière n'éprouvait aucune discontinuité dans leur intérieur.

92. Au lieu des coordonnées x, y, z, il sera quelquefois nécessaire, pour faciliter les intégrations, d'employer les coordonnées polaires de chaque élément dm. Soit alors r son rayon vecteur, θ l'angle qu'il fait avec l'axe des x positives, et ψ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x et y; nous aurons (n° 9)

$$x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta \cos\psi,\ z = r \sin\theta \sin\psi.$$

Il faudra, en même temps, exprimer dv au moyen des différentielles de ces nouvelles variables r, θ, ψ. On a des formules générales pour la transformation des variables indépendantes dans les intégrales multiples; mais on peut aussi trouver directement l'expression de dv dont nous devrons faire usage, savoir :

$$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

ainsi qu'on le verra tout à l'heure.

Je mets ρdv à la place de dm dans les équations (1), et j'y substitue ensuite cette valeur de dv et celles de x, y, z; elles deviennent

$$\left.\begin{aligned} Mx_1 &= \iiint \rho r^3 \sin\theta \cos\theta dr\, d\theta\, d\psi, \\ My_1 &= \iiint \rho r^3 \sin^2\theta \cos\psi dr\, d\theta\, d\psi, \\ Mz_1 &= \iiint \rho r^3 \sin^2\theta \sin\psi dr\, d\theta\, d\psi, \end{aligned}\right\} (3)$$

à quoi il faudra joindre l'équation

$$M = \iiint \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

Quant aux limites de ces intégrales triples, elles seront différentes selon que l'origine des coordonnées sera placée en dehors ou en dedans du corps. Lorsque cette origine sera un des points de M, on intégrera d'abord depuis $r = 0$ jusqu'à $r = u$, en représentant par u une fonction de θ et ψ donnée par l'équation de la surface; cela fait, on intégrera depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$, en commençant à volonté par l'angle θ ou par l'angle ψ. Les limites seront généralement plus compliquées quand l'origine des coordonnées n'appartiendra pas à la masse M. Représentons, dans ce cas, par u et u' deux fonctions données de θ et ψ, par ω et ω' deux fonctions de ψ, et par α et α' deux angles donnés; supposons qu'il s'agisse d'une portion de corps comprise, d'une part, entre les deux surfaces qui ont pour équations $r = u$ et $r = u'$; d'une autre part, entre les surfaces coniques qui ont pour axe commun l'axe des x, leur sommet aussi commun à l'origine des coordonnées, et pour équations $\theta = \omega$ et $\theta = \omega'$; enfin, entre les deux plans passant par cet axe, et qui font des angles α et α' avec le plan fixe d'où l'on compte l'angle ψ. On intégrera d'abord depuis $r = u$ jusqu'à $r = u'$, ensuite depuis $\theta = \omega$ jusqu'à $\theta = \omega'$, et finalement, depuis $\psi = \alpha$ jusqu'à $\psi = \alpha'$.

Prenons, par exemple, pour les deux premières surfaces celles de deux sphères concentriques qui ont leur centre commun à l'origine des coordonnées, et dont les rayons sont a et a'; supposons, en même temps, que les deux cônes soient à base circulaire, ou, autrement dit, que ω et ω' soient des angles constans; supposons, de plus, que la densité ne soit fonction que de r; de sorte que la portion de corps que l'on considère appartienne à une sphère composée de couches concentriques infiniment minces, dont chacune ait la même densité dans toute son étendue, laquelle densité variera d'une couche à l'autre, suivant une fonction donnée de la distance au centre. En faisant pour abréger,

$$\int_a^{a'} \rho r^2 \, dr = A, \quad \int_a^{a'} \rho r^3 \, dr = B,$$

et effectuant les intégrations relatives à θ et ψ, on trouve

$$\begin{aligned}
M &= A\,(\alpha' - \alpha)\,(\cos\omega - \cos\omega'),\\
Mx_1 &= 1/2\ B\,(\alpha' - \alpha)\,(\cos^2\omega - \cos^2\omega'),\\
My_1 &= 1/2\ B\,(\sin\alpha' - \sin\alpha)\,(\omega' - \omega - 1/2 \sin 2\omega' + 1/2 \sin 2\omega),\\
Mz_1 &= 1/2\ B\,(\cos\alpha - \cos\alpha')\,(\omega' - \omega - 1/2 \sin 2\omega' + 1/2 \sin 2\omega);
\end{aligned}$$

ce qui fait connaître les valeurs de x_1, y_1, z_1, qu'on ne pourrait déduire, dans cet exemple, des équations (1).

Si la masse M forme un anneau complet, de sorte qu'on ait $\alpha' = \alpha + 2\pi$, il en résultera $y_1 = 0$ et $z_1 = 0$, c'est-à-dire que le centre de gravité sera situé, comme cela doit être, sur l'axe de cet anneau : sa distance x_1 au centre de la sphère dont cet anneau fait partie, aura pour valeur

$$x_1 = \frac{B\,(\cos\omega + \cos\omega')}{2A}.$$

Dans le cas de l'homogénéité de la sphère, la densité ρ étant constante, on aura

$$A = 1/3\ \rho\,(a'^3 - a^3), \quad B = 1/4\ \rho\,(a'^4 - a^4).$$

Quand le vide de l'anneau disparaîtra, on fera $\omega = 0$; et, enfin, s'il se change en un secteur sphérique, on fera aussi $\alpha = 0$; d'où il résultera

$$x_1 = \frac{3a'}{8}\,(1 + \cos\omega');$$

ce qui s'accorde avec la valeur de la quantité désignée par x dans le n° 88, en observant que la flèche représentée par f aurait pour valeur $a'(1 - \cos\omega')$, et que le rayon est a'.

93. Pour trouver la différentielle dv du volume, exprimée au moyen des différentielles des coordonnées polaires, je suppose que M (fig. 31) soit le point qui répond aux coordonnées r, θ, ψ; en sorte que O étant leur origine, OM soit le rayon vecteur r, θ l'angle MOx compris entre ce rayon et un axe fixe Ox, et ψ l'angle que fait le plan de ces deux droites avec un plan fixe mené arbitrairement par la seconde. Soit M' un point situé sur le prolongement de OM, et dont le rayon vecteur OM' sera r'. Du point O comme centre, et dans le plan M'Ox, décrivons les arcs de cercle MN et M'N' compris entre les deux droites OMM' et ONN', et désignons par θ' l'angle NOx; enfin, faisons tourner le plan de cet angle autour de l'axe Ox, et représentons, dans sa nouvelle position, par ψ' l'angle qu'il fera avec le plan fixe. Dans ce mouvement, l'aire MM'N'N engendrera un volume MM'N'NPP'Q'Q, que je représenterai par U. Or, cette aire, différence des deux secteurs circulaires M'ON' et MON, est égale à

$$1/2\,(r'^2 - r^2)\,(\theta' - \theta).$$

Si l'on appelle u la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur l'axe Ox, on aura $u\,(\psi' - \psi)$ pour la longueur de l'arc que ce centre décrira autour de cette droite. D'après le théorème du n° 84, nous aurons donc

$$U = \frac{u}{2}\,(r' + r)\,(r' - r)\,(\theta' - \theta)\,(\psi' - \psi).$$

Cela posé, concevons que les trois dimensions de U deviennent infiniment petites, et faisons, en conséquence,

$$r' - r = dr, \quad \theta' - \theta = d\theta, \quad \psi' - \psi = d\psi.$$

Le facteur $r' + r$ se réduira, en même temps, à $2r$; on pourra aussi prendre pour u la perpendiculaire MH abaissée du point M sur l'axe Ox, laquelle est égale à $r \sin \theta$, et ne saurait différer de u que d'un infiniment petit; enfin U se changera en dv, dont la valeur, qu'il s'agissait de déterminer, sera

$$dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

On remarquera, effectivement, que ce volume dv peut être considéré comme un parallélépipède rectangle, dont les trois côtés adjacens sont MM' ou dr, l'arc infiniment petit MN, qui a son centre au point O et pour longueur $rd\theta$, et l'arc infiniment petit MP, qui a son centre au point H et pour longueur $r \sin \theta d\theta$.

La base MNQP de ce parallélépipède est l'élément de la surface sphérique dont le centre est au point O et le rayon égal à r. En la désignant par $d\sigma$, on a donc

$$d\sigma = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\psi, \quad dv = d\sigma dr.$$

Si l'on appelle $d\omega$ l'élément de la surface sphérique dont le rayon est pris pour unité, on aura aussi

$$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\psi, \quad dv = r^2 \, dr d\omega.$$

En intégrant cette expression de $d\omega$ depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$, on en déduit 4π pour le rapport de la surface de la sphère au carré de son rayon; ce qui est, en effet, sa valeur connue.

CHAPITRE VI.

CALCUL DE L'ATTRACTION DES CORPS.

§ Ier. *Formules relatives à un corps quelconque et à la sphère en particulier.*

94. Supposons qu'un point matériel O (fig. 32) soit soumis aux attractions de tous les points d'un corps de forme quelconque; en décomposant chacune de ces forces en trois autres, dirigées suivant des axes rectangulaires menés arbitrairement par le point O, et faisant ensuite la somme des composantes positives ou négatives qui agissent suivant chaque axe, on aura les trois composantes dont la résultante exprimera, en grandeur et en direction, l'attraction totale qui sera exercée sur le point O. Ces trois composantes seront des sommes d'une infinité d'élémens infiniment petits, étendus à la masse entière du corps attirant; elles s'exprimeront par des intégrales triples, et le calcul de ces quantités sera semblable à celui des coordonnées du centre de gravité d'un corps quelconque dont nous venons de nous occuper : c'est pourquoi je placerai ici ce que j'ai à dire sur le calcul des attractions.

Cette question est une de celles dont les géomètres se sont le plus occupés, soit à cause des difficultés d'analyse qu'elle présente, soit à raison de ses rapports avec le problème de la figure de la terre et de la loi de la pesanteur à sa surface; mais, dans cet ouvrage, on se bornera à donner les formules qui se présentent immédiatement, et quelques-unes de leurs applications. Je renverrai, pour de plus grands développemens, au second volume de la *Mécanique céleste*, et à mon Mémoire sur l'*Attraction des Sphéroïdes*, inséré dans la *Connaissance des Temps* de l'année 1829.

95. Soit D un point fixe pris dans l'intérieur du corps attirant; par ce point, menons trois axes rectangulaires Dx, Dy, Dz, qui seront les axes des coordonnées positives; désignons par x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque M du corps attirant, et par dm l'élément différentiel de sa masse, qui répond à ce point M; représentons aussi par α, β, γ, les trois coordonnées du point O, et par μ la masse de ce point matériel; et soit enfin u la distance OM, de sorte qu'on ait

$$u^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2.$$

L'attraction exercée par dm sur μ sera dirigée suivant la droite OM. On suppose cette force propor-

tionnelle aux produits des deux masses, et en raison inverse du carré de la distance u; en la désignant donc par F, on aura

$$F = \frac{f\mu dm}{u^3};$$

f étant un coefficient constant qui exprimera l'intensité du pouvoir attractif, rapporté aux unités de masse et de distance. Pour se former une idée précise de cette quantité f, il faut concevoir deux corps de forme et de dimension quelconques, dont les masses sont égales et prises pour unité, et supposer que l'attraction ne varie ni en grandeur ni en direction dans toute l'étendue de ces deux corps; en sorte qu'elle soit la même entre deux élémens quelconques de leurs masses, égaux à dm et à μ, qu'entre les points matériels μ et dm que nous considérons, lorsque leur distance OM est égale à l'unité : la force f est l'attraction totale qui serait exercée alors par l'un de ces deux corps sur l'autre.

Les projections de la droite OM sur les axes Dx, Dy, Dz, sont $\alpha - x$, $\beta - y$, $\gamma - z$; en les divisant par u, on aura les cosinus des angles qui déterminent la direction de la force F; ses trois composantes seront donc

$$\frac{\alpha - x}{u}F, \quad \frac{\beta - y}{u}F, \quad \frac{\gamma - z}{u}F;$$

et en y considérant u comme une quantité positive, elles tendront, selon qu'elles seront positives ou négatives, à diminuer ou à augmenter les trois coordonnées α, β, γ, du point O. Si donc on désigne par A, B, C, les trois composantes de l'attraction totale exercée sur ce point, on aura, en mettant pour F sa valeur, et observant que μ et f sont des facteurs constans,

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu f\iiint \frac{\alpha - x}{u^3}\,dm, \\ B &= \mu f\iiint \frac{\beta - y}{u^3}\,dm, \\ C &= \mu f\iiint \frac{\gamma - z}{u^3}\,dm; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ces intégrales triples s'étendant à la masse entière du corps attirant.

En représentant par ρ la densité de l'élément dm, et par dv son volume, on aura

$$dm = \rho dv.$$

Cette quantité ρ sera, dans le cas général, une fonction donnée des coordonnées du point M; elle se réduira à une constante donnée, dans le cas de l'homogénéité du corps attirant. On exprimera dv au moyen des différentielles des coordonnées de M, dont on fera usage, et qui seront le plus propres à faciliter les intégrations.

96. Par une considération très simple, on réduit à une seule les trois intégrales triples d'où dépendent les valeurs de A, B, C.

Les limites étant les mêmes que dans ces intégrales, faisons

$$T = \iiint \frac{dm}{u}.$$

A cause que ces limites sont indépendantes de la position du point O, si l'on différentie T par rapport à ses coordonnées, on pourra effectuer ces différentiations sous les signes $\int$ (n° 14); et comme on a d'ailleurs

$$\frac{d.\frac{1}{u}}{d\alpha} = \frac{\alpha - x}{u^3}, \quad \frac{d.\frac{1}{u}}{d\beta} = \frac{\beta - y}{u^3}, \quad \frac{d.\frac{1}{u}}{d\gamma} = \frac{\gamma - z}{u^3},$$

il en résultera

$$\frac{dT}{d\alpha} = \iiint \frac{\alpha - x}{u^3}\,dm,$$
$$\frac{dT}{d\beta} = \iiint \frac{\beta - y}{u^3}\,dm,$$
$$\frac{dT}{d\gamma} = \iiint \frac{\gamma - z}{u^3}\,dm,$$

ce qui change les équations (1) en celles-ci :

$$A = -\mu f\frac{dT}{d\alpha}, \quad B = -\mu f\frac{dT}{d\beta}, \quad C = -\mu f\frac{dT}{d\gamma}; \quad (2)$$

de sorte que le calcul des trois composantes A, B, C, ne dépendra plus que d'une seule intégrale T.

En la déterminant, il sera important de se rappeler que le dénominateur u devra avoir constamment le même signe dans toute l'étendue de l'intégration, et qu'il doit être positif si l'on veut que les composantes A, B, C, tendent à diminuer ou à augmenter les coordonnées du point O, selon que leurs valeurs données par les équations (2), seront positives ou négatives.

Au lieu d'une attraction, si le point O était soumis à une répulsion, il suffirait de changer les signes des valeurs de A, B, C, ou, ce qui est la même chose, d'y regarder f comme une constante négative. Dans le cas où la force attractive ou répulsive qui agit sur le point O ne serait pas, comme nous l'avons supposé, en raison inverse du carré de la distance, et qu'on représenterait, en général, le coefficient de μdm par une fonction donnée de u, que je désignerai par φu, on prendrait une autre fonction Φu, telle que l'on eût.

$$\frac{d\Phi u}{du} = -\varphi u,$$

et que 'on mettrait à la place de $\frac{1}{u}$ dans l'expres-

sion de T. Il se pourrait aussi que cette force fût attractive pour une partie du corps qui agit sur O, et répulsive pour une autre partie, auquel cas la fonction $\varphi\mu$, dans laquelle est compris le coefficient f, changerait de signe dans l'étendue de l'intégrale que T représente.

Les composantes de l'action exercée sur un corps de forme et de dimensions quelconques, se déduiront des formules précédentes, en y remplaçant μ par l'élément différentiel de sa masse, qui répond aux coordonnées, α, β, γ, et intégrant ensuite, par rapport à ces trois variables, dans toute l'étendue de cette masse; d'où l'on voit que les composantes de l'action exercée par un corps sur un autre dépendront, généralement, d'intégrales sextuples.

Telles sont les formules d'après lesquelles on calculera les attractions ou répulsions; mais avant d'en faire aucune application, il est nécessaire d'expliquer comment elles conviennent à la constitution intime des corps naturels, et d'examiner la difficulté dont il a été question à la fin du n° 91.

97. Les différens corps renferment, sous des volumes égaux, des quantités inégales de matière pondérable (n° 60); et ces quantités variant, pour un même corps, avec sa température et la pression extérieure à laquelle il est soumis, on a été conduit à considérer les corps naturels comme un assemblage de parties matérielles non contiguës, et séparées les unes des autres par des *pores* ou espaces vides de matière pondérable. Ces parties matérielles se nomment des *atomes*; leurs dimensions et celles des pores échappent, par leur extrême petitesse, à nos sens et à tous nos moyens de les mesurer. On regarde les atomes comme indestructibles, et la masse, la forme, le volume de chacun d'eux, comme invariables. Les dimensions des pores varient, au contraire, avec les quantités diverses de chaleur qu'on introduit dans les corps ou qu'on en fait sortir, et avec les pressions auxquelles on les soumet; et comme les changemens de volume d'un corps peuvent être très grands, sans que sa masse ait augmenté ni diminué, il s'ensuit que les dimensions des parties vides doivent être comparables et généralement supérieures à celles des parties pleines.

Les atomes de même nature ou de nature différente, se réunissent en diverses proportions, pour former d'autres parties des corps, toujours insensibles, qu'on appelle leurs *molécules*. Les corps diffèrent entre eux par la nature et la proportion des atomes qui entrent dans la composition de chaque molécule; et les atomes sont regardés comme invariables et indestructibles, ainsi qu'on vient de le dire, parce qu'en les réunissant dans les mêmes proportions, on reproduit, à toutes les époques, les mêmes corps, jouissant des mêmes propriétés.

98. Il est évident, d'après cela, que la division de la masse en élémens infiniment petits, et la supposition d'une densité de chaque élément, qui ne varie pas dans les corps homogènes, ou qui varie par degrés insensibles dans les corps hétérogènes, ne conviennent point aux corps naturels; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse faire usage des formules fondées sur cette considération, et qu'elles ne soient encore applicables lorsque les corps ont été divisés en parties de grandeur tout-à-fait insensible.

En effet, les molécules sont si petites et si rapprochées les unes des autres, qu'une partie de la masse d'un corps qui en renferme des nombres immenses, peut encore être supposée extrêmement petite, et son volume regardé comme insensible. Soit v le volume d'une semblable partie, d'une grandeur insensible, et qui contient, néanmoins, des myriades de molécules; soit aussi m la somme de leurs masses; et désignons par M un des points de v, qui sera, si l'on veut, son centre de gravité. Si nous faisons

$$\frac{m}{v} = \rho,$$

ce rapport ρ exprimera réellement la densité du corps au point M, quelles que soient d'ailleurs les masses des molécules et leur distribution régulière ou irrégulière dans l'étendue de v. De même, en désignant par n le nombre de molécules que v renferme, et faisant

$$\frac{v}{n} = \epsilon^3,$$

cette ligne ϵ, de grandeur insensible, pourra être appelée l'*intervalle moyen des molécules* qui répond au point M et à la densité ρ. Dans un corps homogène, ce rapport et cette ligne ne varient pas avec la position du point M; dans un corps hétérogène, ces deux quantités varieront par degrés insensibles, et pourront être supposées des fonctions données des coordonnées de ce point.

Cela posé, si l'on veut connaître la masse d'un corps, ou, plus généralement, la somme des parties extrêmement petites de cette masse, multipliées chacune par une fonction U des coordonnées de l'un de ses points M, on divisera le volume V de ce corps en parties extrêmement petites v, puis on fera la somme de tous les produits $U\rho v$, que j'indiquerai par

$$\Sigma U\rho v,$$

et qui devra s'étendre à toutes les parties v de V. D'après le théorème du n° 13, si les termes de cette somme étaient infiniment petits et que leur nombre fût infini, sa valeur serait rigoureusement égale à l'intégrale définie.

$$\int U\rho dv,$$

étendue au volume entier V, dont dv est l'élément différentiel. Or, on conçoit qu'en général la différence entre cette somme et cette intégrale diminuera de plus en plus, à mesure que les parties de

la première deviendront plus petites, et que leur nombre sera plus grand; de telle sorte que la grandeur de v étant insensible, mais toujours distincte de dv, on pourra néanmoins prendre, sans erreur appréciable, l'intégrale à la place de la somme. Il y a cependant une exception à ce principe général : c'est lorsque U est du genre des fonctions qui varient très rapidement, et qu'en même temps cette quantité change de signe dans l'étendue de l'intégration; ce qui arrive, effectivement, dans le calcul des forces provenant de l'attraction moléculaire et de la répulsion calorifique, qui ne sont sensibles qu'à des distances insensibles. Mais il nous suffit, quant à présent, d'observer que cette exception n'a aucun rapport avec les formules des nos 91 et 95, relatives aux centres de gravité des corps et aux attractions en raison inverse du carré des distances, et qu'on peut, conséquemment, les appliquer aux corps naturels formés de molécules disjointes.

99. Revenons maintenant au calcul des attractions.

Si la distance du point O au corps attiré est très grande relativement aux dimensions de ce corps, on pourra, dans l'expression de T du no 96, développer la quantité $\frac{1}{u}$ en série convergente, ordonnée suivant les puissances et les produits de x, y, z. En faisant

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2,$$

on aura alors

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\delta} + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\delta^3} + \frac{3(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\delta}{2\delta^5} + \text{etc.}$$

Si l'on prend le centre de gravité du corps attirant pour l'origine D des coordonnées, on aura

$$\iiint x\,dm = 0,\ \iiint y\,dm = 0,\ \iiint z\,dm = 0,$$

puisque ces intégrales, divisées par la masse M du corps, seraient les trois coordonnées de ce point (no 91). En désignant cette masse par M, nous aurons donc

$$T = \frac{M}{\delta} + \frac{3}{2\delta^5}\iiint(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2\,dm - \frac{1}{2\delta^3}\iiint(x^2 + y^2 + z^2)\,dm + \text{etc.}$$

Lorsque la distance OD ou δ sera assez grande pour qu'on puisse réduire cette valeur de T à son premier terme, les équations (2) deviendront

$$A = \frac{\mu M f\alpha}{\delta^3},\ B = \frac{\mu M f\beta}{\delta^3},\ C = \frac{\mu M f\gamma}{\delta^3};$$

or ces composantes sont les mêmes que celles d'une force égale à $\frac{\mu M f}{\delta^2}$, agissant au point O suivant la direction OD; il s'ensuit donc que l'attraction exercée sur un point O, par un corps qui en est très éloigné, est à peu près la même, en grandeur et en direction, que si la masse M de ce corps était réunie à son centre de gravité.

Lorsque ce corps sera une sphère homogène ou composée de couches concentriques, on trouvera que tous les termes de la valeur de T, excepté le premier, se détruisent; il suffira pour cela de remplacer x, y, z, par les coordonnées r, θ, ψ, comme dans le no 92; ce qui permettra d'effectuer les intégrations relatives à θ et ψ. Le théorème qu'on vient d'énoncer sera donc alors tout-à-fait exact, si la distance δ est seulement assez grande pour que le développement de $\frac{1}{u}$ soit une série convergente; et, en effet, on verra dans le numéro suivant, sans recourir à la réduction en série, que ce théorème a lieu, quelle que soit la distance du point O à la sphère attirante, pourvu qu'il ne soit pas situé dans son intérieur. Il est facile d'en conclure que l'attraction d'une sphère sur une autre est la même que si la masse de chaque sphère était réunie à son centre; car, en appelant M et M' les masses des deux sphères, et C et C' leurs centres, l'attraction de M sur un point quelconque O de M' est d'abord la même que si la masse M était concentrée au point C; en outre, cette attraction de C sur tous les points O de M', est égale et contraire à l'attraction de tous ces points ou de M' sur C, laquelle est la même que si la masse M' était réunie au point C'; donc, l'attraction des deux sphères est la même que celle de deux points matériels situés en C et C' et dont les masses seraient M et M'.

100. L'attraction exercée sur le point O par une couche sphérique, homogène et d'une épaisseur constante, dont D est le centre, se réduira évidemment à une force dirigée suivant OD. En faisant coïncider cette droite avec l'axe Dx, les composantes B et C, parallèles aux axes Dy et Dz, seront donc nulles, et l'on n'aura que la valeur de A à calculer.

Dans ce calcul, on emploiera, comme dans le no 92, les coordonnées polaires r, θ, ψ. L'axe Dx se confondant avec la droite DO, on aura alors

$$\text{ODM} = \theta,\ \text{DO} = \alpha,\ \beta = 0,\ \gamma = 0;$$

et à cause de DM $= r$ et OM $= u$, il en résultera

$$u^2 = \alpha^2 - 2\alpha r\cos\theta + r^2$$

L'angle ψ sera celui que fait le plan ODM avec un

plan fixe passant par la droite DO ; on prendra (n° 93)

$$dv = r^2 \sin \theta dr\, d\theta\, d\psi,$$

pour l'élément du volume, et dans l'élément $dm = \rho dv$ de la masse, on regardera ρ comme un facteur constant.

Après avoir substitué ces valeurs dans l'expression de T du n° 96, on intégrera depuis $r = b$ jusqu'à $r = a$, en désignant par a et b les rayons extérieur et intérieur de la couche sphérique, et depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$. Comme la variable ψ n'entrera pas sous le signe $\int$, l'intégration relative à cette variable se réduira à remplacer la différentielle $d\psi$ par 2π. Cela étant, on aura

$$T = 2\pi\rho \int_b^a \left(\int_0^\pi \frac{r \sin \theta d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2}} \right) r dr.$$

Aux limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, le radical aura pour valeurs

$$\pm (\alpha - r,) \quad \pm (\alpha + r);$$

mais comme il exprime la valeur de α, qui doit être constamment positive (n° 96), il faudra prendre $\alpha + r$ à la limite $\theta = \pi$, et $r - \alpha$ ou $\alpha - r$ à la limite $\theta = 0$, selon que le point O sera situé en dedans ou en dehors de la couche sphérique. Nous verrons tout à l'heure ce qu'on doit faire lorsque ce point appartiendra à la couche même, de sorte qu'on ait $r > \alpha$ dans une partie de cette couche, et $r < \alpha$ dans l'autre partie.

Relativement à θ, l'intégrale indéfinie étant

$$\int \frac{r \sin \theta d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2} + \text{const.},$$

on aura donc, dans le cas du point intérieur,

$$\int_0^\pi \frac{r \sin \theta d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2}} = \frac{1}{\alpha} [(r + \alpha) - (r - \alpha)] = 2;$$

par conséquent, la valeur de T ne dépendra pas de α, et celle de A qui s'en déduit au moyen de la première équation (2), sera égale à zéro. Dans le cas du point extérieur, on aura de même

$$\int_0^\pi \frac{r \sin \theta d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2}} = \frac{1}{\alpha} [(\alpha + r) - (\alpha - r)] = \frac{2r}{\alpha},$$

et, conséquemment,

$$T = \frac{4\pi\rho}{\alpha} \int_b^a r^2 dr = \frac{4\pi\rho (a - b)}{3\alpha},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$T = \frac{M}{\alpha};$$

M étant la masse de la couche sphérique dont le volume est $\frac{4\pi (a^3 - b^3)}{3}$. On en conclut.

$$A = \frac{\mu M f}{\alpha^2}; \qquad (3)$$

ce qui est la même force que si la masse entière de cette couche attirante était réunie à son centre.

101. Ces résultats s'étendent immédiatement aux cas d'une couche sphérique d'une épaisseur constante, mais composée d'autres couches concentriques, dont la densité varie de l'une à l'autre, suivant telle loi qu'on voudra, et ne change pas dans toute l'étendue d'une même couche ; car on peut déterminer séparément les attractions de ces différentes couches, et faire ensuite la somme de toutes ces forces, laquelle sera nulle pour un point intérieur, et donnée par la formule (3) pour un point extérieur ; M exprimant toujours la masse totale du corps attirant.

Concluons donc,

1° Que les attractions en raison inverse du carré des distances, exercées par tous les points d'une couche sphérique d'une épaisseur constante, homogène ou composée de couches concentriques, sur un point O situé dans l'espace vide que cette couche termine, se détruisent mutuellement; en sorte que ce point demeurerait en équilibre, quelque part qu'il fût placé dans cet espace.

2° Que l'attraction de cette même couche et, par conséquent aussi, l'attraction d'une sphère entière, exercée sur un point extérieur O, est la même que si la masse du corps attirant était réunie à son centre.

Si le point O fait partie de la couche attirante, ou, autrement dit, si l'on a $\alpha > b$ et $\alpha < a$, on partagera cette couche sphérique en deux autres : l'une dont les rayons extérieur et intérieur seront a et α, l'autre pour laquelle ces rayons seront α et b; le point O étant intérieur à l'égard de la première de ces deux couches, elle n'exercera sur lui aucune action ; et si l'on appelle m la masse de la seconde couche, par rapport à laquelle le point O est extérieur, l'attraction de cette couche se déduira de la formule (3), en y mettant m au lieu de M. L'attraction totale exercée sur le point O aura donc pour valeur

$$A = \frac{\mu m f}{\alpha^2}.$$

Si la couche sphérique se change en une sphère entièrement pleine, et qu'elle ait partout la même densité, on aura

$$m = \frac{4\pi\rho a^3}{3}, \qquad A = \frac{4\pi\mu f\rho a}{3},$$

c'est-à-dire que dans l'intérieur d'une sphère homogène, l'attraction est proportionnelle à la distance du point attiré à son centre.

Les mêmes théorèmes ont lieu dans le cas d'une répulsion, pourvu que cette force varie toujours en raison inverse du carré des distances.

102. L'équilibre du point O, situé dans l'espace que termine une couche sphérique, et attiré ou repoussé par tous ses points, peut facilement se vérifier.

Supposons, pour cela, que cette couche soit d'abord infiniment mince. Soit ε son épaisseur. Décomposons sa surface en élémens infiniment petits; et désignons par ω l'air de celui qui répond au point P (fig. 33). Les élémens correspondans du volume et de la masse de cette couche seront $\varepsilon\omega$ et $\rho\varepsilon\omega$; et si l'on appelle r la distance OP, la valeur de la force dirigée suivant cette droite sera

$$\frac{\mu f\rho\varepsilon\omega}{r^2}.$$

Imaginons un cône dont la base soit ω et le sommet O; en prolongeant la génératrice OP jusqu'à ce qu'elle rencontre en P' la surface sphérique, et prolongeant de même toutes les autres génératrices, on déterminera sur cette surface un second élément que je désignerai par ω'. Soit, de plus, r' la distance OP', la force dirigée suivant cette droite, en sens contraire de la précédente, aura pour valeur

$$\frac{\mu f\rho\varepsilon\omega'}{r'^2};$$

or, je dis que ces deux forces contraires seront égales entre elles, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{\omega}{r^2} = \frac{\omega'}{r'^2}.$$

Soient, en effet, POQ et P'OQ' les sections des deux cônes, faites par un même plan quelconque, passant par leur sommet commun O. Les surfaces semblables ω et ω' seront entre elles comme les carrés des lignes homologues PQ et P'Q'. A cause des triangles semblables POQ et P'OQ', on a d'ailleurs

$$PQ : P'Q' :: OP : OP';$$

en élevant au carré les quatre termes de cette proportion, on en conclura donc

$$\omega : \omega' :: r^2 : r'^2,$$

et, par conséquent, l'équation précédente.

Il résulte de là que les actions exercées sur le point O par tous les élémens de la couche sphérique se détruisent deux à deux. L'action totale de cette couche sera donc nulle; et il en sera encore de même si elle a une épaisseur finie, car alors on pourra la décomposer en une infinité de couches infiniment minces, dont chacune n'exercera aucune action sur le point O.

§ II. *Formules relatives à l'ellipsoïde.*

103. Lorsque le point O (fig. 32) appartiendra à la masse attirante, on facilitera souvent les intégrations en prenant ce point pour origine des coordonnées polaires. Le rayon vecteur du point quelconque M sera alors u; en appelant donc, comme dans le n° 93, $d\omega$ l'élément de la surface sphérique dont le rayon est l'unité, on aura

$$dv = u^2\,du\,d\omega, \quad dm = \rho u^2\,du\,d\omega;$$

et si l'on appelle g, h, k, les angles que fait la droite OM avec des parallèles aux axes Dx, Dy, Dz, menées par le point O, on aura aussi, d'après les notations du n° 95,

$$\cos g = \frac{x-\alpha}{u}, \quad \cos h = \frac{y-\beta}{u}, \quad \cos k = \frac{z-\gamma}{u};$$

ce qui changera les équations (1) de ce numéro en celle-ci :

$$\begin{aligned} A &= -\mu f\iiint\rho\cos g\,du\,d\omega, \\ B &= -\mu f\iiint\rho\cos h\,du\,d\omega, \\ C &= -\mu f\iiint\rho\cos k\,du\,d\omega. \end{aligned}$$

Les intégrales relatives à u s'étendront depuis $u=0$ jusqu'à $u=r$, en désignant par r le rayon vecteur d'un point quelconque de la surface qui termine le corps attirant. Pour plus de simplicité, si l'on suppose ce corps homogène, ces intégrales s'effectueront immédiatement, et il en résultera

$$\left.\begin{aligned} A &= -\mu f\rho\iint r\cos g\,d\omega, \\ B &= -\mu f\rho\iint r\cos h\,d\omega, \\ C &= -\mu f\rho\iint r\cos k\,d\omega. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Pour déterminer la valeur de r, qu'on devra substituer dans ces formules, soit, en coordonnées rectangulaires,

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la surface du corps attirant. En un point quelconque de cette surface, on a

$$x = \alpha + r\cos g, \; y = \beta + r\cos h, \; z = \gamma + r\cos k,$$

d'après les valeurs précédentes de $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$, et α, β, γ, étant toujours les trois coordonnées du point O dont les valeurs sont données. On substituera donc ces valeurs de x, y, z, dans l'équation précédente; celle qui en résultera donnera, en général, deux valeurs de r, l'une positive et l'autre négative; mais on rejettera la valeur

négative, parce que le rayon vecteur r est une quantité positive dont la direction est uniquement déterminée par les angles g, h, k, qui peuvent être aigus ou obtus.

Après la substitution de la valeur de r dans les équations (a), les intégrales doubles s'étendront à tous les élémens $d\omega$ de la surface sphérique, décrite du point O comme centre, et d'un rayon égal à l'unité.

104. Appliquons ces formules au cas de l'ellipsoïde homogène dont la surface a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \qquad (b)$$

a, b, c, désignant les trois demi-axes, et le centre de figure étant l'origine D des coordonnées. Si l'on y substitue les valeurs précédentes de x, y, z, il vient

$$pr^2 + 2qr = l,$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{\cos^2 g}{a^2} + \frac{\cos^2 h}{b^2} + \frac{\cos^2 k}{c^2} = p,$$

$$\frac{\alpha \cos g}{a^2} + \frac{\beta \cos h}{b^2} + \frac{\gamma \cos k}{c^2} = q,$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = l.$$

Nous aurons donc

$$r = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + pl}}{p}.$$

Or, la quantité p est positive; la quantité l est aussi positive ou zéro, parce que le point O, qui répond aux coordonnées α, β, γ, est situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde, ou, tout au plus, à sa surface; par conséquent, il faudra prendre le radical avec le signe $+$, pour que le rayon r ne soit pas négatif. Je dis, de plus, qu'on pourra supprimer ce radical dans les formules (a). En effet, la partie correspondante de l'intégrale contenue dans A, par exemple, serait

$$\iint \frac{1}{p} \sqrt{q^2 + pl} \cos g \, d\omega;$$

mais pour chaque couple d'élémens $d\omega$ dont les rayons sont dans le prolongement l'un de l'autre, les élémens de cette intégrale double se détruisent; car en passant de l'un de ces élémens $d\omega$ à l'autre, chacun des trois cosinus $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$, change de signe, les quantités p, l, q^2, restent les mêmes, et le coefficient de $d\omega$ sous le signe f prend des valeurs égales et de signe contraire. Tous les élémens de l'intégrale précédente se détruisant ainsi deux à deux, la valeur de A devient d'abord

$$A = \mu f \rho \left(\frac{\alpha}{a^2} \iint \frac{\cos^2 g}{p} d\omega + \frac{\beta}{b^2} \iint \frac{\cos g \cos h}{p} d\omega + \frac{\gamma}{c^2} \iint \frac{\cos g \cos k}{p} d\omega \right),$$

en ayant égard à la valeur de q. Or, les deux dernières de ces trois intégrales se composeront de couples d'élémens qui répondront aux mêmes valeurs de h et de k, et à des valeurs de g supplémens l'une de l'autre. Chacun de ces couples d'élémens se réduira donc à zéro, et, par conséquent aussi, les intégrales entières. En supprimant ces intégrales et faisant subir des réductions semblables aux valeurs de B et de C, on aura simplement

$$A = \frac{\mu f \rho \alpha}{a^2} \iint \frac{\cos^2 g}{p} d\omega,$$

$$B = \frac{\mu f \rho \beta}{b^2} \iint \frac{\cos^2 h}{p} d\omega,$$

$$C = \frac{\mu f \rho \gamma}{c^2} \iint \frac{\cos^2 k}{p} d\omega.$$

Soient actuellement θ l'angle compris entre le rayon OM et la parallèle à l'axe Ox menée par le point D, et ψ l'angle que fait le plan de ces deux droites avec un plan passant par la seconde et parallèle à celui des x et y; nous aurons (n° 8)

$\cos g = \cos \theta$, $\cos h = \sin \theta \cos \psi$, $\cos k = \sin \theta \sin \psi$,

et, en même temps (n° 93),

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\psi;$$

d'où il résultera

$$a^2 b^2 c^2 p = b^2 c^2 \cos^2 \theta + (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) a^2 \sin^2 \theta,$$

$$A = \frac{\mu f \rho \alpha}{a^2} \iint \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\psi}{p}.$$

Pour comprendre les directions de tous les rayons OM, les intégrales devront s'étendre depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$, mais à cause que le coefficient de $d\theta$ a la même valeur pour θ et pour $\pi - \theta$, il suffira d'intégrer depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 1/2\pi$, et de doubler le résultat; et parce que le coefficient de ψ est le même pour ψ et pour $\pi \pm \psi$, il suffira aussi d'intégrer depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 1/2\pi$, et de quadrupler le résultat. Cela étant, je fais

$$\varphi = \tang \psi, \quad d\varphi = \frac{d\psi}{\cos^2 \psi};$$

et à cause de

$$\cos^2 \psi = \frac{1}{1 + \varphi^2}, \quad \sin^2 \psi = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2},$$

il en résulte

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{d\psi}{p} = a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)c^2 + (c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)b^2\varphi^2}$$

$$= \frac{\pi a^2 bc}{2\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}};$$

au moyen de quoi la valeur de A ne dépendra plus que de l'intégrale relative à θ. Sans nouveau calcul, on déduira B de A en y mettant ζ au lieu de α, et permutant les lettres a et b; et de même, on déduira C de A en y mettant γ au lieu de α, et permutant les lettres a et c. De cette manière, on aura finalement

$$\left.\begin{aligned}
A &= 4\pi\mu f\rho\alpha \int_0^{1/2\pi} \frac{bc\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}},\\
B &= 4\pi\mu f\rho\zeta \int_0^{1/2\pi} \frac{ac\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}},\\
C &= 4\pi\mu f\rho\gamma \int_0^{1/2\pi} \frac{ab\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)}}.
\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Ces valeurs de A, B, C, étant positives, il s'ensuit que chacune de ces trois composantes tend à rapprocher le point O du centre de l'ellipsoïde; le contraire aurait lieu dans le cas d'une répulsion où l'on devrait mettre, dans ces formules, $-f$ au lieu de f.

105. Désignons par δ une constante positive, et supposons qu'on substitue $(1+\delta)\,a$, $(1+\delta)\,b$, $(1+\delta)\,c$, au lieu de a, b, c, dans les formules (c). Le facteur $1+\delta$ disparaîtra, et les valeurs de A, B, C, resteront les mêmes. Or, par cette substitution, l'ellipsoïde se trouvera augmenté d'une partie comprise entre sa surface primitive et une surface semblable; les composantes A, B, C, ne changeant pas, il en faut donc conclure que l'action de cette partie additive sur le point intérieur O, se réduit à zéro.

Ainsi une couche homogène comprise entre deux surfaces elliptiques semblables, ayant le même centre et leurs axes dans les mêmes directions, n'exerce aucune action attractive ou répulsive sur un point O situé dans l'espace vide que termine sa surface intérieure; en sorte que ce point matériel restera en équilibre, quelque part qu'il soit placé dans cet espace; théorème qui comprend celui que nous avons précédemment trouvé pour le cas d'une couche sphérique.

Il en résulte que l'action d'un ellipsoïde plein et homogène sur un point O de sa masse, se réduit à celle qui est exercée par la partie de cette masse terminée par la surface elliptique, passant par ce point, semblable à celle du corps entier, et semblablement placée. D'après les formules (c), la composante de cette force, parallèle à chacun des trois axes de l'ellipsoïde, est proportionnelle à l'ordonnée du point O parallèle à cet axe, et ne dépend que de cette variable. Dans le cas général où les trois demi-axes a, b, c, sont inégaux, on transformera en fonctions elliptiques les intégrales relatives à θ que ces formules renferment; ce qui permettra d'en calculer les valeurs numériques, au moyen des tables de M. Legendre. Ces mêmes intégrales s'obtiennent sous forme finie, lorsque deux des constantes a, b, c, sont égales, et qu'il s'agit, par conséquent, d'un ellipsoïde de révolution.

106. Supposons, par exemple, qu'on ait $c = b$; la forme des intégrales relatives à θ sera différente, selon que l'ellipsoïde sera aplati ou alongé, c'est-à-dire, selon qu'on aura $b > a$ ou $b < a$. Supposons aussi que ce soit le premier cas qui ait lieu; et faisons, dans cette hypothèse,

$$b^2 - a^2 = a^2 e^2, \quad \frac{4\pi\rho a^3(1+e^2)}{3} = m;$$

en sorte que la fraction e soit l'aplatissement de l'ellipsoïde, et m sa masse. Il en résultera

$$A = \frac{3\mu f m\alpha}{a^3}\int_0^{1/2\pi} \frac{\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{1+e^2\cos^2\theta};$$

et, en effectuant l'intégration, on aura

$$A = \frac{3\mu f m\alpha}{a^3 e^3}\left[e - \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = e)\right],$$

pour la composante parallèle à l'axe de révolution.

On aura aussi

$$\frac{B}{\zeta} = \frac{C}{\gamma} = \frac{3\mu f m}{a^3(1+e^2)}\int_0^{1/2\pi} \frac{\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{\sqrt{1+e^2\sin^2\theta}}.$$

Les composantes B et C étant entre elles comme les coordonnées ζ et γ du point O, il s'ensuit que leur résultante sera dirigée suivant la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe de révolution. En appelant A' cette force, et α' la longueur de la perpendiculaire, de sorte qu'on ait

$$A' = \sqrt{B^2 + C^2}, \quad \alpha' = \sqrt{\zeta^2 + \gamma^2},$$

et effectuant l'intégration indiquée, il vient

$$A' = \frac{3f\mu m a'}{2a^3\, e^3}\left[\text{arc (tang} = e) - \frac{e}{1+e^2}\right].$$

La résultante des deux forces A et A' exprimera, en grandeur et en direction, l'action totale de l'ellipsoïde sur le point O.

Lorsque e sera une très petite fraction, on pourra développer ces valeurs de A et A' en séries très convergentes, ordonnées suivant les puissances de e. A cause de

$$\text{arc (tang} = e) = e - \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} - \text{etc.},$$

$$\frac{e}{1+e^2} = e - e^3 + e^5 - \text{etc.},$$

nous aurons

$$A = \frac{\mu f m a}{a^3}\left(1 - \frac{3e^2}{5} + \text{etc.}\right).$$

$$A' = \frac{\mu f m a'}{a^3}\left(1 - \frac{6e^3}{5} + \text{etc.}\right).$$

Dans le cas de la sphère, ou de $e = 0$, la résultante de A et A' sera dirigée vers le centre, et aura la même intensité que dans le n° 101.

107. Le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur présente encore beaucoup plus de difficulté; mais on doit à M. Yvori un théorème au moyen duquel ce cas peut être ramené à celui du point intérieur; ce qui permet d'exprimer les composantes de l'attraction par des intégrales simples, semblables aux formules (c). Voici une démonstration de cette importante proposition.

En faisant, dans la première équation (1) du n° 95,

$$dm = \rho dx dy dz,$$

et observant que ρ est un facteur constant, on a

$$A = \mu f \rho \iiint \frac{(\alpha - x)\, dx dy dz}{[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2]^{3/2}}$$

Je suppose que l'équation de la surface soit toujours l'équation (b), et j'y mets ax', by', cz', à la place de x, y, z, ce qui la change en celle-ci :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

En même temps la valeur de A devient

$$A = \mu f \rho abc \iiint \frac{(\alpha - ax')\, dx' dy' dz'}{[(\alpha - ax')^2 + (\beta - by')^2 + (\gamma - cz')^2]^{3/2}};$$

et si l'on désigne par $\pm x_1$, les valeurs de x', égales et de signe contraire, que l'on tire de l'équation précédente, l'intégrale relative à x' devra être prise depuis $x' = -x_1$ jusqu'à $x' = x_1$; ce qui donne

$$A = \mu f \rho bc \left(\iint \frac{dy' dz'}{[(\alpha - ax_1)^2 + (\beta - by')^2 + (\gamma - cz')^2]^{1/2}}\right.$$

$$\left. - \iint \frac{dy' dz'}{[(\alpha + ax_1)^2 + (\beta - by')^2 + (\gamma - cz')^2]^{1/2}}\right).$$

Chacune de ces deux intégrales doubles s'étendra à tous les élémens de la demi-surface sphérique dont le rayon est l'unité, et qui a son centre à l'origine des coordonnées; le produit $dy'\, dz'$ est la projection sur le plan des y et z, d'un élément quelconque. Si donc on désigne par θ l'angle que le rayon qui aboutit à cet élément fait avec l'axe des x, et par ψ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et le plan des x et y, l'aire de cet élément sera $\sin\theta d\theta d\psi$, son inclinaison sur le plan des y et z sera l'angle θ, et il en résultera

$$dy' dz' = \cos\theta \sin\theta d\theta d\psi,$$

pour sa projection sur ce plan. On aura en même temps

$$x_1 = \cos\theta, \quad y' = \sin\theta \cos\psi, \quad z' = \sin\theta \sin\psi.$$

Les limites des deux intégrales seront maintenant $\theta = 0$ et $\psi = 0$, $\theta = 1/2\pi$ et $\psi = 2\pi$; mais si l'on met, dans la seconde, $\pi - \theta$ à la place de π, il est aisé de voir que ces deux intégrales se réuniront en une seule, qui aura les mêmes limites par rapport à ψ, et dont les limites relatives à θ deviendront $\theta = 0$ et $\theta = \pi$; en sorte que l'on aura simplement

$$A = \mu f \rho bc \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta d\psi}{R},$$

en faisant, pour abréger,

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha a \cos\theta + \beta b \sin\theta \cos\psi + \gamma c \sin\theta \sin\psi)$$
$$+ a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + c^2 \sin^2\theta \sin^2\psi,$$

et regardant R comme une quantité positive. Les deux autres composantes B et C s'exprimeront pareillement par des intégrales doubles.

Maintenant, considérons l'attraction d'un autre ellipsoïde ayant la même densité ρ, le même centre, et ses axes dans les mêmes directions que le premier. Soient a_1, b_1, c_1, les trois demi-axes correspondans à a, b, c; appelons O_1 le point soumis à cette attraction, α_1, β_1, γ_1, ses coordonnées, et A_1, B_1, C_1, les composantes de cette force, parallèles aux trois axes de l'ellipsoïde. En supposant toujours que μ soit la masse du point attiré, nous aurons

$$A_1 = \mu\rho b_1 c_1 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta d\psi}{R_1}$$

R_1 étant ce que devient R quand on y change $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, en a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1. Les valeurs de B_1 et C_1 se déduiront de même de celles de B et C.

Supposons que les deux ellipsoïdes aient les mêmes foyers, et conséquemment des excentricités égales, on aura alors

$$b^2 = a^2 + k, c^2 = a^2 + k, b^2_1 = a^2_1 + h, c^2_1 = a^2_1 + k;$$

$k, k, h - k$, étant des quantités positives ou négatives qui exprimeront, abstraction faite du signe, les carrés des excentricités communes à ces deux corps. Supposons, de plus, que le point O_1, attiré par le second ellipsoïde, soit situé sur la surface du premier, et le point O attiré par le premier, sur la surface du second. D'après l'équation (*b*) et celle de la surface du second ellipsoïde, il faudra qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha^2_1}{a^2} + \frac{\beta^2_1}{b^2} + \frac{\gamma^2_1}{c^2} &= 1, \\ \frac{\alpha^2}{a^2_1} + \frac{\beta^2}{b^2_1} + \frac{\gamma^2}{c^2_1} &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Soient enfin p et q deux angles donnés; et prenons

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= a\cos p, \beta_1 = b\sin p\cos q, \gamma_1 = c\sin p\sin q, \\ \alpha &= a_1\cos p, \beta = b_1\sin p\cos q, \gamma = c_1\sin p\sin q, \end{aligned}\right\} (2)$$

valeurs qui satisferont aux deux équations précédentes et qui établissent une relation particulière entre les coordonnées des points O et O_1. En substituant ces valeurs de α, β, γ, dans l'expression de R^2, et y mettant aussi les valeurs précédentes de b^2, c^2, b^2_1, c^2_1, il vient

$$\begin{aligned} R^2 = {} & a^2_1 + a^2 + h(\sin^2 p\cos^2 q + \sin^2\theta\cos^2\psi) \\ & + k(\sin^2 p\sin^2 q + \sin^2\theta\sin^2\psi) \\ & - 2(a_1 a\cos p\cos\theta + b_1 b\sin p\cos q\sin\theta\cos\psi \\ & + c_1 c\sin p\sin q\sin\theta\sin\psi). \end{aligned}$$

Or, sans écrire la valeur de R^2_1, on voit qu'elle sera la même que celle de R^2; car elle s'en déduirait par les permutations de a et a_1, b et b_1, c et c_1, sans changer h et k, qui sont des quantités communes aux deux ellipsoïdes; et il est évident que cette dernière formule ne change pas par ces permutations. A cause de $R_1 = R$, les valeurs de A et A_1 renfermeront la même intégrale double; en l'éliminant, on aura donc

$$A_1 bc = Ab_1 c_1.$$

Relativement aux autres composantes, on obtiendra des résultats semblables; en sorte que, d'après les suppositions qu'on a faites sur les deux points attirés O et O_1, on aura finalement.

$$\frac{A_1}{A} = \frac{b_1 c_1}{bc}, \quad \frac{B_1}{B} = \frac{a_1 c_1}{ac}, \quad \frac{C_1}{C} = \frac{a_1 b_1}{ab}. \quad (3)$$

Pour énoncer le théorème que ces trois équations renferment, appelons *points correspondans*, sur les surfaces des deux ellipsoïdes, deux points dont les coordonnées sont entre elles dans le rapport des demi-axes auxquels elles sont parallèles. Le point O_1 de la surface du premier ellipsoïde, dont les coordonnées parallèles aux demi-axes a, b, c, sont α_1, β_1, γ_1, aura pour correspondant, sur la surface du second ellipsoïde, le point O, dont les coordonnées parallèles aux demi-axes a_1, b_1, c_1, sont α, β, γ, puisqu'on a, d'après les équations (2),

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{b}{b_1}, \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{c}{c_1}.$$

Cela posé, il résulte des équations (3) le théorème suivant :

Si l'on a deux ellipsoïdes homogènes qui aient le même centre et les mêmes foyers, l'attraction suivant chaque axe que l'un des deux corps exerce sur un point situé à la surface de l'autre, est à l'attraction de celui-ci sur le point correspondant de la surface du premier, comme le produit des deux autres axes du premier ellipsoïde est au produit des deux autres axes du second.

108. Lorsque deux ellipsoïdes différens ont, comme on le suppose, le même centre et les mêmes foyers, l'un des deux est entièrement compris dans l'autre; par conséquent, si le point O est extérieur par rapport au premier ellipsoïde, le point O_1 sera intérieur par rapport au second. Pour déterminer, au moyen du théorème précédent, l'attraction d'un ellipsoïde donné sur un point extérieur O aussi donné, on fera donc passer par ce point la surface d'un second ellipsoïde ayant le même centre et les mêmes foyers que le premier; par les formules relatives aux points intérieurs, on déterminera les trois composantes A_1, B_1, C_1, de l'attraction de ce second corps sur le point O_1 de la surface du premier, correspondant du point O; les équations (3) feront ensuite connaître les composantes A, B, C, de l'attraction de l'ellipsoïde donné sur le point donné. Ainsi tout se réduira à trouver les valeurs des trois demi-axes a_1, b_1, c_1, du second ellipsoïde, d'après ceux du premier qu'on a

représentés par a, b, c, et d'après les coordonnées α, β, γ, du point donné O.

Pour fixer les idées, je suppose que a soit la plus petite des trois quantités a, b, c; ce qui rendra positives les quantités h et k du numéro précédent. J'appelle u le carré de a_1; on aura

$$a_1 = \sqrt{u}, \quad b_1 = \sqrt{u+h}, \quad c_1 = \sqrt{u+k};$$

et il ne restera plus qu'à déterminer cette inconnue u, qui devra être réelle et positive. Or, en vertu de la seconde équation (1), nous aurons

$$\alpha^2 + \frac{\beta^2 u}{u+h} + \frac{\gamma^2 u}{u+k} = u; \qquad (4)$$

équation du troisième degré par rapport à u, qui a au moins une racine réelle et positive; car en faisant croître u depuis zéro jusqu'à l'infini, son premier membre est d'abord plus grand et ensuite plus petit que le second; en sorte qu'il y a au moins une valeur positive de u qui les rend égaux. Je dis de plus qu'il n'y en a qu'une; car en supposant qu'il y en ait deux, u et u', il faudrait qu'on eût à la fois

$$\frac{\alpha^2}{u} + \frac{\beta^2}{u+h} + \frac{\gamma^2}{u+k} = 1,$$

$$\frac{\alpha^2}{u'} + \frac{\beta^2}{u'+h} + \frac{\gamma^2}{u'+k} = 1;$$

et en retranchant ces équations l'une de l'autre, et supprimant le facteur $u'-u$, commun à tous les termes, il en résulterait

$$\frac{\alpha^2}{uu'} + \frac{\beta^2}{(u+h)(u'+h)} + \frac{\gamma^2}{(u+k)(u'+k)} = 0;$$

ce qui est évidemment impossible. Donc il n'existe qu'un seul ellipsoïde qui ait le même centre et les mêmes foyers qu'un ellipsoïde donné, et qui passe en outre par un point donné. La quantité u, d'où dépendent ses trois demi-axes a_1, b_1, c_1, est déterminée par l'équatation (4); ce qu'il s'agissait de trouver.

109. Nous ferons remarquer que le théorème du n° 107 convient également à toutes les lois d'attraction en fonction de la distance; car la démonstration qu'on vient d'en donner est fondée sur la forme que prend l'expression de R^2, qui se trouve identique pour les deux points O et O_1, et non sur la forme de la fonction de R, qui exprime la loi de l'attraction.

Si les deux ellipsoïdes sont des sphères concentriques, l'attraction de chacune d'elles sera la même sur tous les points de la surface de l'autre, et il ne sera plus nécessaire que les points O et O_1 soient correspondans. En appelant a et a_1 les rayons de ces deux sphères, D l'attraction de la sphère du rayon a sur un point de la surface sphérique du rayon a_1, et D_1 celle de la sphère du rayon a_1, sur un point de la surface sphérique du rayon a, lesquelles forces seront dirigées suivant les rayons des points attirés, on aura

$$D : D_1 :: a^2 : a_1^2,$$

quelle que soit la loi de l'attraction en fonction de la distance.

Cette proportion est facile à vérifier dans le cas ordinaire où l'attraction est en raison inverse du carré de la distance. En effet, d'après les résultats du n° 101, si l'on suppose $a > a_1$, l'attraction D de la sphère du rayon a sur un point intérieur, situé à une distance a_1 de son centre et dont μ est la masse, sera

$$D = \frac{4\pi\mu f a_1}{3};$$

l'attraction D_1 de la sphère du rayon a_1 sur un point extérieur, dont μ est aussi la masse et qui se trouve à la distance a de son centre, aura pour valeur.

$$D_1 = \frac{4\pi\mu f a_1^3}{3a^2};$$

et en comparant ces valeurs de D et D_1, on voit qu'elles sont entre elles comme les carrés des rayons a et a_1.

LIVRE DEUXIÈME.

DYNAMIQUE,

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT RECTILIGNE ET DE LA MESURE DES FORCES.

§ Ier. *Formules du mouvement rectiligne.*

110. Le mouvement le plus simple que puisse prendre un point matériel est celui qui a lieu en ligne droite, et dans lequel le mobile décrit des espaces égaux en temps égaux. C'est ce mouvement *rectiligne* que l'on appelle *uniforme*, et qui sert de terme de comparaison à tous les autres mouvemens.

Quand le rapport des espaces parcourus aux temps employés à les décrire, change continuellement, le mouvement est *varié*; si ce changement n'avait lieu qu'à des intervalles de temps finis, le mouvement ne serait qu'une succession de mouvemens uniformes.

Dans un mouvement quelconque, l'espace parcouru par le mobile, ou, plus généralement, sa distance à un point fixe pris sur la ligne qu'il décrit, est une fonction du temps écoulé depuis une époque convenue. Ainsi, en appelant t ce temps, et x cette distance, on aura, dans tous les cas,

$$x = \mathrm{F}t;$$

et les diverses sortes de mouvemens différeront entre elles par la forme de cette fonction $\mathrm{F}t$. La variable t pourra être positive ou négative : ses valeurs positives répondront à des époques postérieures à celle d'où l'on compte le temps, et ses valeurs négatives, à des époques antérieures.

Dans le mouvement uniforme, si l'on appelle a l'espace parcouru dans chaque unité de temps, et b la distance du mobile au point fixe, à l'origine du temps t, c'est-à-dire, la valeur de x qui répond à $t = 0$, on aura, à un instant quelconque,

$$x = b + at;$$

car, d'après la définition de ce mouvement, l'espace $x - b$ décrit dans le temps t doit être égal à l'espace constant a, répété autant de fois que t renferme d'unités.

111. On ne définit ni le temps ni l'espace; mais il suffit à la Géométrie et à la Dynamique que nous puissions mesurer les dimensions des corps et les durées de leurs mouvemens. La mesure des longueurs est fondée sur la superposition, et se conçoit sans aucune difficulté; celle du temps exige quelque explication.

On ferait un cercle vicieux si l'on disait, d'une part, que le mouvement uniforme est celui dans lequel les espaces parcourus sont proportionnels au temps, et, d'un autre côté, que le temps a pour mesure le mouvement uniforme, c'est-à-dire qu'il est proportionnel aux espaces parcourus dans ce mouvement. Mais la notion des temps égaux et la mesure du temps ne sont fondées nécessairement sur aucune loi particulière de mouvement, et l'on peut, en conséquence, les supposer dans la définition du mouvement uniforme et de toute autre sorte de mouvemens.

Concevons, en effet, que des corps parfaitement

identiques se meuvent successivement, et que, pendant toute la durée de son mouvement, chacun des mobiles se trouve exactement dans le même état que celui qui l'a précédé : il est évident que tous ces mouvemens, dont la loi n'est pas donnée, s'exécuteront en temps égaux, et que leur nombre pourra servir de mesure au temps. Ainsi, par exemple, si ces corps sont pesans et retenus par un axe fixe horizontal, qu'on les écarte tous également de leur position d'équilibre, et qu'on les abandonne ensuite à eux-mêmes, de sorte que le mouvement du second commence dès que le premier est revenu à cette position, celui du troisième aussitôt que le second y est revenu de même, et ainsi de suite, il n'y aura aucune différence possible entre tous ces mouvemens successifs qui s'achèveront en temps égaux. On prouvera par la suite qu'il n'est pas nécessaire pour cela que ce soient différens mobiles qui se succèdent, et que les oscillations successives d'un même corps, de part et d'autre de sa position d'équilibre, sont aussi *isochrones*, ou d'égale durée; mais la considération précédente, qui ne suppose la solution d'aucun problème de Mécanique, suffit à l'objet que nous nous sommes proposé.

Les astronomes ont reconnu, par les observations les plus précises et le plus souvent répétées, l'invariabilité de la révolution apparente de la sphère céleste autour de la terre; et, effectivement, la théorie n'indique aucune inégalité sensible dans le mouvement de rotation de la terre qui donne lieu à cette apparence. On appelle *jour sidéral* la durée constante de cette révolution, laquelle durée est moindre que celle de la révolution diurne du soleil. Celle-ci n'est pas exactement la même à toutes les époques de l'année; et c'est sa grandeur moyenne que l'on prend pour unité de temps dans les usages ordinaires, et que l'on appelle le *jour moyen*. Nous adopterons, dans cet ouvrage, la division du jour en 24 heures, de l'heure en 60 minutes, et de la minute en 60 secondes; en sorte que la seconde sera la 86400e partie du jour moyen. Le jour sidéral ne contient que 86164,09 secondes; d'où il résulte que pour exprimer en jours sidéraux un temps donné en jours moyens, il faudra le multiplier par le rapport de 86400 à 86164,09, ou par le nombre constant 1,0027379.

112. Un mouvement uniforme diffère d'un autre par la grandeur de l'espace parcouru dans l'unité de temps. Dans chaque mouvement uniforme, cet espace constant est ce qu'on appelle la *vitesse* du mobile; mais, pour parler exactement, cet espace n'est que la mesure de la vitesse, et non pas la vitesse elle-même. La vitesse d'un point matériel en mouvement est une chose qui réside dans ce point, dont il est animé, qui le distingue actuellement d'un point matériel en repos, et n'est pas susceptible d'une autre définition. La vitesse exprimée, dans le mouvement uniforme, par l'espace que le mobile décrit dans chaque unité de temps, suppose qu'on prend pour unité de vitesse celle du mobile qui parcourt l'unité linéaire dans l'unité de temps.

Dans un mouvement varié quelconque, la vitesse du mobile varie par degrés infiniment petits, et elle est une fonction du temps qui se déduit, ainsi qu'on le verra tout à l'heure, de celle qui exprime l'espace parcouru : mais, auparavant, il est nécessaire de connaître le genre de mouvement que prendra un point matériel en vertu de sa vitesse acquise, si la force qui lui a imprimé cette vitesse, par son action continuée pendant un certain temps, vient à cesser d'agir, et que ce mobile soit abandonné à lui-même.

113. Il est d'abord évident que si le mobile s'est mu jusque là en ligne droite, il continuera à se mouvoir suivant le prolongement de la ligne qu'il décrivait; car il n'y aurait aucune raison pour que ce point matériel s'écartât de la direction qu'il a reçue plutôt d'un côté que de l'autre. Mais nous ne pouvons pas affirmer, *à priori*, que la vitesse qui lui a été imprimée ne se ralentira pas d'elle-même, et ne finira pas par s'éteindre entièrement; ce n'est que par l'expérience et l'induction que cette question peut être décidée.

Or, à mesure que les obstacles à l'état de mouvement des corps, tels que les frottemens et les résistances des milieux qu'ils traversent, diminuent d'intensité, nous les voyons persévérer de plus en plus dans cet état; et, toutes les fois que nous apercevons une altération dans leur vitesse, nous reconnaissons que cet effet peut être attribué à une cause étrangère. Nous sommes donc conduits à conclure que s'il était possible qu'un point matériel, après avoir été mis en mouvement, ne fût plus sollicité par aucune force, et ne rencontrât aucun obstacle, son mouvement serait rectiligne et uniforme, c'est-à-dire, le plus simple de tous les mouvemens.

Ainsi, par exemple, si une parcelle de fer est mise en mouvement dans le vide, sur un plan horizontal et sans frottement, par la seule action du pôle d'un aimant, et que tout à coup on détruise le pouvoir attractif de ce pôle, en y juxtaposant un pôle égal et contraire, cette parcelle continuera de se diriger vers ce point; mais son mouvement deviendra uniforme, et sa vitesse sera plus ou moins considérable, selon qu'on aura laissé agir la force attractive plus ou moins long-temps.

L'impossibilité où sont tous les points matériels de se mettre en mouvement ou de changer le mouvement qui leur a été communiqué, sans le secours d'une force, est ce qu'on entend par l'*inertie* de la matière. Ce mot ne signifie pas que la matière soit incapable d'agir; car, au contraire, chaque point matériel trouve toujours dans l'action d'autres points matériels, mais jamais en lui-même, le principe de son mouvement.

114. Au bout du temps t, et quand le mobile se trouve à la distance x d'un point fixe pris sur la

droite qu'il décrit, soit v sa vitesse acquise, c'est-à-dire, la vitesse du mouvement uniforme qui aurait lieu, si, à cet instant, la force qui agit sur le mobile venait à cesser d'agir. L'action de cette force continuant, l'espace dx que le mobile parcourra dans l'instant dt sera décrit en vertu de cette action et de la vitesse v; la partie de dx correspondante à cette vitesse, qui serait décrite d'un mouvement uniforme, aura vdt pour valeur. En appelant donc ϵ la partie de cet espace qui répond à l'action de la force pendant l'instant dt, nous aurons.

$$dx = vdt + \epsilon.$$

Or, la vitesse variant par degrés infiniment petits, et ses variations étant uniquement dues à l'action de la force appliquée au mobile, il s'ensuit que dans le temps dt, cette action ne peut produire qu'une vitesse infiniment petite; par conséquent, cette même action ne peut faire décrire qu'un espace infiniment petit du second ordre, moindre que celui qui serait décrit uniformément par le mobile, s'il recevait au commencement de dt toute la vitesse qui sera produite pendant la durée de cet instant. On peut donc négliger ϵ par rapport à vdt dans l'équation précédente; et alors on aura

$$v = \frac{dx}{dt},$$

pour l'expression de la vitesse dans un mouvement quelconque.

Si l'on voulait connaître la partie ϵ de l'espace parcouru par le mobile dans le temps dt, en vertu de l'action de la force qui le sollicite, il faudrait conserver les puissances de dt supérieures à la première. Or, en appelant x' la distance du mobile au point fixe, au bout du temps $t + dt$, on aura, par le théorème de Taylor,

$$x' - x = \frac{dx}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}dt^2 + \text{etc.},$$

pour l'expression complète de l'espace parcouru dans cet instant dt. Le premier terme, égal à vdt, est l'espace dû à la vitesse acquise au bout du temps t; si donc on néglige les termes du troisième et des ordres supérieurs par rapport à ceux du second, on aura

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}dt^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\epsilon = 1/2\, dvdt,$$

pour la partie de l'espace $x' - x$ que l'action de la force a fait parcourir. La vitesse produite en même temps par cette action étant dv, on voit que l'espace que le mobile décrirait uniformément, pendant ce temps dt, s'il recevait au commencement toute cette augmentation de vitesse, serait égal au produit de dv et dt, ou double de l'espace ϵ qu'il décrit réellement.

115. Lorsque l'espace parcouru sera donné en fonction du temps, on en déduira immédiatement la vitesse correspondante, au moyen de l'équation $v = \frac{ds}{dt}$. Par exemple, les mobiles, dans la machine d'*Athood*, décrivant des espaces qui croissent comme les carrés du temps, on en peut conclure que leurs vitesses acquises doivent être proportionnelles aux temps pendant lesquels ces espaces sont parcourus; ce que cette machine fournit, en effet, le moyen de vérifier.

Réciproquement, si la vitesse est donnée en fonction du temps par la définition du mouvement, on en déduira, par l'intégration, l'expression de l'espace parcouru. Ainsi, après le mouvement uniforme, le plus simple est celui dans lequel la vitesse augmente ou diminue de quantités égales, en temps égaux, et qu'on appelle, pour cette raison, *uniformément* accéléré ou retardé. Si donc on appelle g l'accroissement constant, positif ou négatif, de la vitesse dans chaque unité de temps, et a la vitesse du mobile quand $t = 0$, la vitesse v à un instant quelconque sera, dans ce mouvement.

$$v = a + gt;$$

et en multipliant par dt et intégrant, on aura

$$x = b + at + 1/2\, gt^2,$$

pour la distance du mobile à un point fixe de la droite qu'il décrit; b étant cette distance à l'origine du temps t.

Lorsque les deux constantes a et b seront nulles, on aura simplement

$$v = gt, \quad x = 1/2\, gt^2.$$

L'espace parcouru est donc alors proportionnel au carré du temps; et la vitesse acquise au bout d'un temps quelconque t est telle qu'en vertu de cette seule vitesse le mobile décrirait, en un temps égal à t, un espace vt double de celui qu'il a parcouru. Il s'ensuit que si l'on connaît l'espace parcouru dans la première unité de temps, on aura, en le doublant, la valeur de la vitesse constante g, par laquelle un mouvement uniformément accéléré diffère d'un autre mouvement de la même nature.

Ce mouvement est celui des corps pesans qui tombent dans le vide. En un même lieu, la vitesse g est égale pour tous leurs points; en sorte qu'ils décrivent tous, d'un même mouvement de cette espèce, des droites verticales. Cette vitesse varie d'un lieu à un autre; en prenant la seconde pour unité de temps, et le mètre pour unité linéaire, on a conclu de l'expérience

$$g = 9^m,80896,$$

à l'Observatoire de Paris.

La force qui produit des vitesses égales en temps

égaux est pour nous une *force constante*. Ainsi, la pesanteur est une force constante; ce qui signifie ici qu'elle agit avec la même intensité sur les corps déjà animés de vitesses quelconques, et non pas seulement, comme dans le n° 59, que son intensité est la même dans toute l'étendue d'un corps de dimensions ordinaires.

116. Les lois de l'équilibre ne supposent aucune relation particulière entre les forces et les vitesses correspondantes; et, pour résoudre les problèmes de Statique, il suffit de connaître les rapports numériques des forces, tels qu'ils ont été définis dans le n° 5. Les lois du mouvement, au contraire, dépendent du rapport qui doit exister entre les grandeurs des vitesses produites par des forces données; et ce rapport, dont la connaissance est indispensable pour la solution des problèmes de Dynamique, est le même que celui des forces, ainsi qu'on va le démontrer.

Soient toujours x et v l'espace parcouru et la vitesse acquise par un point matériel au bout du temps t. Supposons qu'à cette époque deux forces données f et f' agissent simultanément sur le mobile, suivant la direction de son mouvement; désignons par u la vitesse infiniment petite que la force f imprimerait au mobile, si elle agissait seule pendant un temps τ infiniment petit, et par u' celle qui serait produite par la force f', dans le même temps, si la force f n'existait pas. Je dis que la simultanéité de ces deux forces ne modifiera pas les vitesses dont elles sont capables séparément, et que la vitesse produite par la force $f+f'$ sera $u+u'$, c'est-à-dire qu'au bout du temps $t+\tau$, la vitesse du mobile sera devenue $v+u+u'$.

En effet, l'augmentation de vitesse du mobile ne pourra dépendre que du temps τ auquel elle sera proportionnelle, et de l'état de ce point matériel, ou, autrement dit, de sa position et de sa vitesse pendant ce même temps τ; ce ne serait donc qu'en influant sur cet état que l'action de la force f' pourrait modifier la vitesse qui sera produite par la force f. Or, pendant le temps τ, la distance du mobile à un point fixe et sa vitesse ne peuvent varier que de quantités infiniment petites, négligeables par rapport à x et v; ses variations de distances à d'autres points fixes ou mobiles, d'où peuvent émaner les forces f et f', sont également négligeables; par conséquent, la vitesse que produira la force f, pendant cet intervalle de temps τ, ne saurait être modifiée en aucune manière par l'action simultanée de la force f'; et il en sera de même à l'égard de la vitesse due à la force f', qui ne sera pas non plus changée par l'action de f. Donc la vitesse totale imprimée au mobile pendant le temps τ, par la force $f+f'$, sera égale à $u+u'$.

On verra de même que si la force f agit dans le sens de la vitesse v, et la force f' en sens contraire, l'augmentation de vitesse produite par la force $f-f'$, sera égale à $u-u'$.

Quelle que soit la nature de chacune des forces f et f', si elles sont capables d'une même vitesse u dans un même temps infiniment petit, ce sont pour nous des *forces égales*. Appliquées en sens contraire l'une de l'autre, elles ne changeront pas la vitesse du mobile, s'il est déjà en mouvement; il y aura équilibre, si ce point matériel est en repos; ce qui rentre dans la définition des forces égales du n° 5.

Lorsque la force qui agit sur le mobile dans le sens de la vitesse acquise, deviendra double, triple, quadruple,.... la vitesse qu'elle produira dans le temps τ croîtra suivant la même proportion. Réciproquement, quand cette force se réduira à moitié, au tiers, au quart..... la vitesse qui sera produite diminuera de la même manière; et, généralement, les vitesses infiniment petites produites pendant des instans égaux, dans le sens ou en sens contraire de la vitesse acquise, ou imprimées à un point matériel en repos, seront entre elles comme les intensités des forces correspondantes.

C'est sur ce principe général qu'est fondée la mesure des forces dans la Dynamique. On a coutume de le présenter comme une hypothèse; nous le donnons ici comme une conséquence nécessaire de ce que les vitesses imprimées par des forces quelconques, dans des intervalles de temps infiniment petits, sont toujours infiniment petites, et de ce qu'en même temps les déplacemens des mobiles sont aussi infiniment petits.

117. Si les forces que l'on veut comparer l'une à l'autre sont des forces constantes, de sorte que chacune d'elles produise, pendant toute la durée du mouvement, des vitesses égales en temps égaux (n° 115), leurs intensités seront entre elles comme les vitesses qu'elles impriment en un même temps quelconque à un même point matériel. Lors donc que ces vitesses seront données par l'observation, on en conclura le rapport des forces; et, réciproquement, quand ce rapport sera donné *à priori*, on pourra le prendre pour celui des vitesses.

Désignons, par exemple, par ϖ et ϖ' les intensités de la pesanteur à deux latitudes différentes, et supposons qu'on ait déterminé, en ces deux lieux de la terre, les vitesses g et g', acquises en une seconde par les corps qui tombent verticalement dans le vide; on aura

$$\varpi : \varpi' :: g : g'.$$

Le rapport de ces forces ϖ et ϖ' sera aussi celui des poids d'un même corps, ou de deux corps homogènes et d'un même volume, à ces deux latitudes. L'observation a fait connaître que les vitesses dues à la pesanteur, augmentent en allant de l'équateur au pôle, et que l'accroissement total est à peu près 1/200 de la plus petite. Il s'ensuit donc que le poids d'un même corps, transporté de l'équateur au pôle, augmentera de 1/200, et que, pour mettre en équilibre les poids de deux corps homogènes placés en ces deux lieux de la terre, il faudra que

le volume du corps situé à l'équateur, excède de 1/200 celui du corps situé au pôle.

Soient encore ϖ l'intensité de la pesanteur dans le sens vertical, et ϖ_1 sa composante suivant une droite qui fait avec sa direction un angle α. D'après la règle du parallélogramme des forces, nous aurons

$$\varpi_1 = \varpi \cos \alpha;$$

et si l'on appelle g et g_1 les vitesses qui seront produites dans l'unité de temps par ces deux forces constantes, agissant séparément sur un même point matériel, la proportion

$$g : g_1 :: \varpi : \varpi_1,$$

donnera aussi

$$g_1 = g \cos \alpha.$$

Si ce point matériel pesant est posé sur un plan incliné, qui fasse avec le plan horizontal un angle égal à $90^\circ - \alpha$, la force ϖ se décomposera en deux autres, l'une perpendiculaire au plan donné et qui sera détruite par sa résistance, l'autre dirigée suivant ce même plan et qui sera la force ϖ_1. C'est cette dernière force qui produira le mouvement dans le vide, abstraction faite du frottement du mobile contre le plan incliné. Ce mouvement, dû à une force constante, sera donc uniformément accéléré; et si l'on appelle x_1, et v_1, l'espace parcouru et la vitesse acquise au bout du temps t, on aura

$$v_1 = g_1 t, \quad x_1 = 1/2\, g_1 t^2;$$

équations dans lesquelles on devra mettre la valeur précédente de g_1.

Cet exemple est très propre à montrer la nécessité de connaître *à priori* le rapport des vitesses dues à des forces dont le rapport est connu; car si l'on ne savait pas déduire g_1 de la vitesse g donnée par l'observation, et qu'il fallût, pour faire usage de ces dernières équations, déterminer aussi par l'expérience la valeur de g_1 qui répond à chaque valeur de l'angle α, la Dynamique se trouverait à peu près réduite à une science expérimentale.

118. Pour mesurer une force variable, il faut en considérer l'effet pendant un temps infiniment petit, durant lequel on peut la considérer comme constante. Soit donc φ, dans un mouvement rectiligne quelconque, la force qui agit sur le mobile au bout du temps t, et que nous regarderons comme une quantité positive ou négative, selon que cette force agira dans le sens de la vitesse acquise ou en sens opposé. Cette vitesse étant v au même instant, elle sera $v + dv$ au bout du temps $t + dt$; en sorte que la force φ aura imprimé une vitesse dv au mobile dans l'instant dt. Si donc on désigne par ϖ une force constante et connue, capable d'une vitesse g dans l'unité de temps, et qui puisse, conséquemment, imprimer au mobile une vitesse gdt dans le temps dt, on aura

$$\varphi : \varpi :: dv : gdt;$$

d'où l'on tire

$$\varphi = \frac{\varpi dv}{gdt}.$$

Après avoir choisi arbitrairement une unité linéaire et une unité de temps, on exprimera en nombres la constante g et la valeur de $\frac{dv}{dt}$ qui a lieu au bout d'un temps donné. Cette formule fera ensuite connaître, au même instant, le rapport numérique de la force φ à la force connue ϖ; et si celle-ci est la pesanteur, ce rapport sera celui de la force φ au poids du mobile sur lequel elle agit, en sorte que ce point matériel étant pesant et sollicité par la force φ en sens contraire de la pesanteur, demeurerait en équilibre, si l'on trouvait, par exemple, $\frac{1}{g}\frac{dv}{dt} = 1$.

On simplifiera la formule précédente, en prenant ϖ et g pour unités; ce qui la réduira à

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

L'unité de force sera alors la force constante qui imprimerait au mobile, dans l'unité de temps, une vitesse représentée par l'unité linéaire, de manière que si ces deux dernières unités sont la seconde et le mètre, l'unité de force sera à peu près le dixième du poids du mobile, d'après la valeur de g du n° 115.

On peut remarquer que cette mesure $\frac{dv}{dt}$ de la force variable φ est la vitesse que produirait, dans l'unité de temps, une force constante qui conserverait pendant ce temps la même intensité que la force φ pendant l'instant dt. Ainsi, dans le mouvement d'une parcelle de fer vers le pôle d'un aimant, que nous avons déjà pris pour exemple (n° 113), la force φ dépend de la distance au pôle, et est par conséquent variable; mais si l'on suppose qu'à un instant donné le pôle recule devant le mobile, de manière que la distance de l'un à l'autre devienne constante, la force φ le deviendra aussi, le mouvement se changera en un mouvement uniformément accéléré, et l'augmentation de vitesse qui aura lieu dans l'unité de temps sera la mesure de cette force à l'instant où elle est devenue constante.

En ayant égard à la valeur de v trouvée dans le n° 114, on peut aussi écrire

$$\varphi = \frac{2x}{dt^2}.$$

Il suit donc de cette formule et de la précédente qu'une force a également pour mesure la vitesse qu'elle produit dans un temps infiniment petit, divisée par ce temps, ou bien le double de l'espace

qu'elle fait parcourir, divisé par le carré de ce même temps. Dans le mouvement uniformément accéléré, ces deux manières équivalentes de mesurer la force ont encore lieu, sans qu'il soit nécessaire que le temps soit infiniment petit.

119. Nous avons maintenant

$$x = Ft, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt},$$

pour les formules générales du mouvement rectiligne. Elles montrent les rapports qui existent, dans un mouvement quelconque, entre l'espace parcouru, la vitesse acquise et la force qui agit sur le mobile, et comment ces trois fonctions du temps peuvent se déduire l'une de l'autre, soit par la différentiation, soit par l'intégration.

En éliminant v entre les deux dernières, on a

$$\varphi = \frac{d^2 x}{dt^2};$$

ce qui suppose qu'on prenne le temps t pour la variable indépendante, et que sa différentielle dt soit constante; hypothèse que nous ferons de même, dans toute la suite de cet ouvrage, sans que nous ayons besoin de le répéter.

Par l'élimination de dt, on aura aussi

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{d.v^2}{dx};$$

ce qui servira à déterminer v quand la force φ sera donnée en fonction de x, et, réciproquement, cette force lorsque la vitesse sera connue en fonction de l'espace parcouru.

Nous donnerons, dans le chapitre suivant, diverses applications de ces formules générales.

§ II. *Mesure des forces en ayant égard aux masses.*

120. Avant de montrer comment on devra tenir compte des masses dans la comparaison des forces qui agissent sur des mobiles différens, il importe de rectifier une expression inexacte que l'on emploie souvent, et qui tient à une confusion d'idées.

Concevons qu'un corps soit posé sur un plan horizontal, et qu'il n'y soit retenu par aucun frottement. Si je veux le faire glisser sur ce plan, il faudra néanmoins, à cause de l'inertie de la matière, que j'exerce un effort quelconque; si à ce corps on en joint un second, puis un troisième, etc., il faudra que je déploie, pour produire le même mouvement, une force de plus en plus considérable. J'aurai, dans chaque cas, le sentiment de l'effort que je serai obligé de faire; mais je ne devrai pas en conclure que la matière oppose aucune résistance à cet effort, et qu'il existe dans les corps ce qu'on appelle très improprement une *force d'inertie*. Quand on s'exprime ainsi, on confond la sensation que l'on a éprouvée, et qui résulte de l'effort qu'on a exercé, avec la sensation d'une résistance qui n'existe réellement pas.

Lorsque le corps frotte contre le plan, il y a effectivement une résistance au mouvement horizontal, et je ne peux pas déplacer le mobile sur ce plan sans exercer un effort supérieur à cette résistance. De même, quand je veux soulever le mobile verticalement, il y a aussi une résistance à ce mouvement, que je dois vaincre par un effort qui la surpasse. Dans les deux cas, je ne produirai aucun mouvement tant que je ne ferai pas un effort plus grand que le poids du corps, ou que son adhésion au plan horizontal; mais si l'on ne suppose ni pesanteur ni frottement, je mettrai le corps en mouvement, quelque faible que soit l'effort que j'exercerai, et quelque grande que soit la masse du mobile : alors, si j'éprouve qu'il faut faire un plus grand effort pour communiquer le même mouvement à un corps qu'à un autre, j'en conclurai que le premier se compose d'une plus grande quantité de matière que le second; et si je pouvais comparer avec précision les grandeurs des efforts que j'aurai exercés, leur rapport serait celui des masses de ces deux mobiles. C'est sur une semblable considération qu'est fondée, ainsi que nous allons l'expliquer, la mesure des masses d'après les grandeurs des forces qui les mettent en mouvement, et, réciproquement, la mesure des forces en ayant égard aux masses et aux vitesses.

121. Deux points matériels, appartenant à des corps qui peuvent être de nature différente, ont des masses égales ou inégales, selon que des forces qu'on suppose égales leur impriment, dans un même temps, la même vitesse ou des vitesses différentes. Supposons, pour fixer les idées, que les forces appliquées à ces deux points soient verticales, et qu'après les avoir placées dans les deux plateaux d'une balance, il y ait équilibre. Ces forces seront égales dans cette hypothèse; et cela étant, si les deux points sont rendus entièrement libres, et que les mêmes forces les mettent en mouvement, leurs masses seront égales ou inégales, selon qu'ils prendront, dans le premier instant, des vitesses infiniment petites, égales ou inégales.

Lorsque, de cette manière, les masses de différens points matériels auront été reconnues égales, en les réunissant on formera d'autres points dont les masses auront entre elles des rapports quelconques. Ainsi, en appelant μ la masse de chacun des points égaux, m et m' les masses de deux autres points formés de n et n' des premiers, m et m' seront entre elles comme ces nombres n et n', et l'on aura

$$m = n\mu, \quad m' = n'\mu.$$

Maintenant, soient u, v, v', des vitesses infiniment petites, i et i' des nombres entiers, et

$$v = iu, \quad v' = i'u.$$

Si deux forces f et f' impriment aux masses m et m' les vitesses v et v' dans un même instant, je dis qu'on aura

$$f : f' :: mv : m'v'.$$

En effet, on peut regarder la force f comme la somme d'un nombre n de forces égales qui impriment la même vitesse v à chacun des n points égaux dont m se compose; de sorte qu'en appelant k l'une de ces forces égales, on aura

$$f = nk.$$

Soit, en outre, h la force qui imprimerait la vitesse u à chacun de ces points égaux, pendant le même instant que la force k lui imprime la vitesse v. Ces forces agissant sur un même point matériel, seront entre elles comme les vitesses u et v (n° 116); et, à cause de $v = iu$, il en résultera

$$k = ih.$$

Nous aurons de même

$$f' = n'k', \quad k' = i'h',$$

en regardant f' comme la somme de n' forces k' capables d'imprimer la vitesse v' à chacun des points égaux dont se compose m', et appelant h' la force qui imprimerait à chacun de ces mêmes points la vitesse u. Or, h et h' étant des forces capables d'imprimer dans un même instant une même vitesse u à deux points égaux en masse, savoir, à deux des points dont la masse commune a été représentée par μ, il suit de ce qui précède qu'on doit avoir $h' = h$. D'après les équations précédentes, on aura alors

$$f = inh, \quad f' = i'n'h;$$

et, en ayant égard aux valeurs de m, m', v, v', il en résultera la proportion qu'il s'agissait de démontrer.

122. Cela posé, considérons un corps de grandeur et de forme quelconques, dont tous les points décrivent des droites parallèles, avec une vitesse commune qui peut d'ailleurs varier avec le temps. Partageons ce corps en une infinité de points matériels égaux en masse, tels qu'on vient de les définir. On pourra attribuer le mouvement de tous ces points à des forces qui seront égales et parallèles dans toute l'étendue du mobile; leur résultante, pour une partie quelconque de ce corps, sera égale à leur somme, et appliquée au centre de gravité de cette même partie. Les forces correspondantes à deux parties quelconques seront donc entre elles comme leurs masses; par conséquent, si l'on appelle f la force totale qui agit sur le mobile, m sa masse, et φ la force qui répond à une partie de cette masse prise pour unité, on aura

$$f = m\varphi.$$

Quant à la force φ, elle sera proportionnelle à l'accroissement de la vitesse des points du mobile pendant un temps infiniment petit; et si l'on appelle v cette vitesse au bout du temps t, on pourra prendre pour sa mesure, comme dans le n° 118,

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Il en résultera donc

$$f = m\frac{dv}{dt},$$

pour l'expression de la force dans un mouvement quelconque, en ayant égard à la masse du mobile, et supposant tous ses points animés d'une même vitesse.

Cette forme f, qui est la résultante ou la somme des forces infiniment petites qu'on peut supposer appliquées à tous les points dont le corps est composé, se nomme *force motrice*; le facteur φ de sa valeur $m\varphi$, s'appelle *force accélératrice*, et n'est autre chose que la force motrice rapportée à l'unité de masse.

La force motrice se change en une *pression* lorsque la masse sur laquelle elle agit est appuyée contre un plan fixe, perpendiculaire à sa direction. Une pression et une force motrice ne diffèrent donc l'une de l'autre qu'en ce que les vitesses infiniment petites qu'une pression tend à produire sont incessamment détruites par la résistance du plan fixe qui la supporte, tandis que celles qui sont effectivement produites pendant chaque instant par la force motrice s'accumulent dans le mobile, et qu'il en résulte une vitesse finie après un temps fini. Deux pressions sont entre elles comme les masses multipliées par les vitesses infiniment petites qu'elles tendent à leur imprimer dans un même instant, et qu'elles leur imprimeraient, en effet, si ces masses étaient libres.

123. Si le mouvement commun à tous les points d'un mobile est uniformément accéléré, et qu'on appelle g l'augmentation de vitesse qui a lieu dans chaque unité de temps, on a

$$\varphi = g, \quad f = mg.$$

Pour une autre force constante f' agissant sur une masse m', et produisant une vitesse g' dans l'unité de temps, on aura de même

$$f' = m'g'.$$

Or, l'observation a prouvé que deux corps pesans, quelle que soit la différence des matières, acquièrent la même vitesse en tombant dans le vide pendant un même intervalle de temps. Dans le cas de la pesanteur, on a donc $g = g'$; et, conséquemment, les poids f et f' de deux corps quelconques sont entre eux comme leurs masses m et m', ainsi que nous l'avons supposé dans le n° 60. Le seul fait, constaté par une expérience journalière, que des corps hétérogènes ont des poids égaux sous des volumes différens, ne suffisait pas pour décider si leurs masses sont égales ou inégales; il

fallait savoir, de plus, que la pesanteur leur imprime le même mouvement, pour pouvoir conclure, de l'égalité des poids, l'égalité des quantités de matière.

Le poids d'un corps pesant qui tombe dans le vide est sa force motrice, et la pesanteur est sa force accélératrice. Pour abréger, on appelle souvent *pesanteur* ou *gravité* la vitesse g, qui n'est que la mesure de cette force.

124. Si des forces données agissent à la surface ou sur d'autres parties d'un corps solide, et qu'il en résulte pour tous ses points des vitesses égales et parallèles, il faudra que ces forces aient une résultante unique, qui coïncidera, en grandeur et en direction, avec la force motrice, telle qu'on vient de la définir, et dont on déduira la force accélératrice en la divisant par la masse entière du mobile.

Supposons, par exemple, qu'un corps pesant tombe dans l'air, dans l'eau, ou dans tout autre fluide, et que sa forme et sa densité, s'il n'est pas homogène, soient symétriques autour d'un axe vertical. Il est évident que tout étant semblable autour de cet axe, tous les points du mobile décriront des droites verticales; ce qui exige, puisqu'il s'agit d'un corps solide, qu'ils aient tous la même vitesse à chaque instant. La résistance du milieu, qui s'exerce à la surface de ce corps, se réduira donc à une force dirigée suivant son axe de figure. Je désignerai par R son intensité à un instant quelconque, par $\downarrow$ la partie correspondante de la force accélératrice du mobile, et par m sa masse; on aura alors

$$\downarrow = \frac{R}{m}$$

Comme cette force agit en sens contraire de la gravité pendant la chute du corps, la force accélératrice totale sera $g - \downarrow$. Si le mobile était lancé verticalement de bas en haut, les deux forces agiraient dans le même sens, et la force accélératrice totale serait négative et égale à $-g - \downarrow$.

La théorie de la résistance des fluides est encore trop peu avancée pour qu'on puisse déterminer, *à priori*, la valeur de R, laquelle peut dépendre de la vitesse v dont le mobile est animé, de sa forme, de la densité et de la nature du fluide. Le plus communément, on la suppose proportionnelle au carré de v et à la densité du fluide, que je représenterai par ρ, de sorte que l'on a

$$R = \sigma \rho v^2 ;$$

σ étant un coefficient qui ne peut plus dépendre que de la forme et des dimensions du corps, de la nature du fluide, liquide ou aériforme, et de sa température.

Dans le cas d'une sphère, on regarde le coefficient σ comme proportionnel à sa surface ou au carré de son diamètre. En désignant donc par r son rayon, et par D sa densité, de sorte que sa masse soit

$$m = \frac{4\pi}{3} Dr^3 ,$$

il en résultera

$$\downarrow = \frac{\gamma \rho v^2}{Dr} ;$$

γ désignant un coefficient numérique qui sera le même pour toutes les sphères, et dont la valeur devra être déterminée par l'expérience pour chaque nature de fluide. A cause que cette quantité $\downarrow$ est de la même nature que g, il s'ensuit que si l'on désigne par k une vitesse donnée, il faudra qu'on ait

$$\frac{Dr}{\gamma \rho} = \frac{k^2}{g} ,$$

afin que l'expression de $\downarrow$ prenne la forme

$$\downarrow = \frac{gv^2}{k^2} ,$$

conformément au principe de l'homogénéité des quantités (n° 23).

125. Une même force constante, agissant successivement sur des masses différentes, produira des mouvemens uniformément accélérés, dans lesquels la force accélératrice, ou l'accroissement constant de la vitesse dans chaque unité de temps, sera en raison inverse de la masse.

Ainsi, par exemple, f étant le poids mg d'une masse m, si l'on suspend cette masse à l'extrémité d'un fil qui soit attaché par son autre bout à une autre masse m' posée sur un plan horizontal, il est évident que ces deux masses prendront un même mouvement uniformément accéléré, et dû à la force motrice f, abstraction faite du frottement et du poids de la partie verticale du fil. Si donc on appelle g' la force accélératrice de ce mouvement, on aura

$$g' = \frac{f}{m + m'} ,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$g' = g \cos \alpha ,$$

en désignant par α un angle tel que l'on ait

$$m = (m + m') \cos \alpha .$$

Par conséquent, le mouvement dont il s'agit sera le même que celui d'un corps pesant sur un plan incliné, qui fait l'angle α avec la verticale (n° 117).

Tous les corps étant mobiles et susceptibles de prendre des vitesses en raison inverse de leurs masses, lorsqu'ils sont soumis, pendant un même temps, à l'action d'une même force, il s'ensuit qu'il n'existe pas de corps réellement *fixes;* ceux qu'on appelle ainsi sont des corps qui ont de très

grandes masses par rapport à celles dont dépendent les forces motrices qu'on leur applique, et qui ne reçoivent, conséquemment, de l'action de ces forces que des vitesses extrêmement petites. A la surface de la terre, ce sont les corps attachés à cette surface qui ne font qu'une seule masse avec celle du globe terrestre; et, en effet, en prenant cette masse pour m' dans l'exemple précédent, on voit que la vitesse g' qui lui sera imprimée dans l'unité de temps, par un poids mg correspondant à une masse m de grandeur ordinaire, pourra être regardée comme tout-à-fait insensible.

126. On a coutume d'appeler *quantité de mouvement d'un corps* le produit de sa masse par sa vitesse. Pour me conformer à l'usage, j'emploierai cette expression, à laquelle il serait toutefois plus correct de substituer celle de *quantité de vitesse*, puisque c'est la vitesse qui réside dans le mobile, et que le mouvement n'en est qu'un effet subséquent.

Il n'y a aucune force qui produise instantanément une quantité finie de mouvement. Le choc d'un corps solide en mouvement contre un corps solide en repos imprime à celui-ci, dans un temps très court, mais non pas infiniment petit, une vitesse qui peut être quelquefois très grande; et, pendant cet intervalle de temps, les deux corps ne se déplacent pas sensiblement. Quelque durs qu'on les suppose, ils se compriment toujours un tant soit peu; la vitesse passe de l'un à l'autre par degrés infiniment petits; et si l'on fait abstraction de l'élasticité de ces deux corps, leur action mutuelle cesse dès qu'ils ont des vitesses égales. Cette communication rapide de la vitesse, sans déplacement sensible des masses, est ce qu'on appelle une *percussion* ou une *impulsion;* elle équivaut, comme on voit, à une force motrice agissant, pendant un temps très court, avec une très grande intensité.

En considérant ainsi la percussion comme la somme des actions infiniment petites d'une force motrice, on en conclut qu'elle se décompose en deux autres percussions, suivant des directions données, par la règle du parallélogramme des forces, comme chacune de ces actions successives. Si, par exemple, on exerce sur la *tête d'un coin* une percussion normale que j'appellerai P, elle se décomposera en deux autres percussions perpendiculaires à ses deux *faces;* et si l'on représente par Q et Q' les deux composantes, par K et K' les longueurs des faces auxquelles elles répondent, et par H celle de la tête du coin, il est aisé de voir qu'on aura, d'après la règle citée.

$$Q : P :: K : H,$$
$$Q' : P :: K' : H;$$

d'où l'on tire

$$Q = \frac{PK}{H}, \quad Q' = \frac{PK'}{H}.$$

Ainsi, en supposant que cette percussion P provienne d'une masse m qui vient frapper la tête du coin avec une vitesse a, ses deux faces, ou plutôt les obstacles fixes contre lesquels elles s'appuient, seront dans le même cas que s'ils étaient frappés normalement par la même masse m, animée de vitesses proportionnelles à leurs longueurs, et exprimées par $\frac{Ka}{H}$ et $\frac{K'a}{H}$.

127. Si un corps solide en repos est frappé à la fois, en sens opposés, par deux autres corps dont les masses sont m et m', et les vitesses v et v'; que ces trois corps soient symétriques autour d'un même axe quant à leur forme et quant à leur densité, et que tous les points des deux derniers se meuvent parallèlement à cette droite, leurs percussions sur le corps intermédiaire se feront équilibre, lorsque les quantités de mouvement mv et $m'v'$ seront égales, c'est-à-dire que ces quantités de mouvement passeront, pendant un temps très court, dans le corps intermédiaire, et s'y détruiront sans que ce corps soit déplacé d'une manière sensible.

L'équilibre aura lieu également si l'on supprime le corps intermédiaire, et que la communication de la vitesse se fasse immédiatement entre les deux autres corps. Ainsi, deux corps solides qui vont au devant l'un de l'autre se réduisent au repos, abstraction faite de l'élasticité, lorsqu'ils viennent à se choquer, et que leurs masses sont en raison inverse de leurs vitesses; et, réciproquement, les produits des masses et des vitesses sont égaux quand il y a équilibre dans le choc de deux corps solides. On suppose ici, comme on vient de le dire, les deux mobiles symétriques autour d'une même droite, et les vitesses de tous leurs points parallèles à cette droite, laquelle est celle qui passe par le centre de gravité des deux masses. La condition d'équilibre dans le choc de ces corps est donc l'égalité de leurs quantités de mouvement, ou l'équation

$$mv = m'v',$$

m et m' étant leurs masses, et v et v' leurs vitesses. Nous déterminerons par la suite les mouvemens qui auront lieu après le choc, quand ces conditions relatives aux grandeurs et à la direction des vitesses, et à la forme des mobiles, ne seront pas remplies, ou bien quand on aura égard à leur élasticité.

Il résulte de cette loi de l'équilibre dans le choc que la percussion fournirait le moyen le plus direct de mesurer la masse des corps. On imprimerait une vitesse connue a à tous les points d'un corps dont la masse serait prise pour unité; et si l'on pouvait déterminer exactement la vitesse v dont tous les points d'un autre corps devraient être animés, pour qu'il fît équilibre au premier, en le choquant en sens contraire de son mouve-

ment, la masse de ce second corps aurait alors pour valeur numérique le rapport $\frac{a}{v}$; mais il est inutile de dire que ce moyen est impraticable, et que c'est toujours aux poids des corps qu'il faut recourir pour mesurer leurs masses.

Il s'ensuit aussi que deux percussions exercées sur un corps solide, devront être regardées comme équivalentes, lorsqu'elles répondront à des quantités égales de mouvement; en sorte que, dans l'exemple du numéro précédent, la tête et les deux faces du coin éprouveront les mêmes effets, ou seront frappées avec la même énergie, si la masse m et la vitesse a sont remplacées par une masse m' et une vitesse a', telles que l'on ait $ma = m'a'$.

128. Lorsque deux percussions, provenant de vitesse en raison inverse des masses, seront exercées simultanément sur les deux plateaux d'une balance, il y aura équilibre; la balance remplaçant ici le corps intermédiaire que nous avons considéré dans le numéro précédent. Ce cas sera, par exemple, celui de deux corps pesans, dont les masses sont m et m', et qui tombent au même instant sur ces deux plateaux, après avoir acquis des vitesses v et v', telles que l'on ait $mv = m'v'$.

Si la masse m est en repos dans l'un des deux plateaux, son poids y exercera une pression qui sera généralement vaincue par la percussion de l'autre masse; mais il n'est point exact de dire, comme on le fait ordinairement, que cela aura toujours lieu, quelque grande que soit la pression dans son espèce, et quelque petite que soit la percussion dans la sienne.

En effet, on peut remplacer la percussion de m' par une force motrice agissant sur l'un des deux plateaux sans le déplacer sensiblement, pendant un temps très court que je représenterai par τ. En désignant par $m'udt$ la quantité infiniment petite de vitesse dont cette force variable est capable pendant l'instant dt, le produit $m'\int_0^\tau udt$ sera la quantité de vitesse qu'elle communiquera à la balance pendant le temps τ. Pendant ce même temps, le poids de m produira une quantité de mouvement exprimée par $mg\tau$, en représentant par g la gravité. Pour qu'il y ait équilibre dans le système, il faudra donc que l'intégrale $\int_0^\tau udt$ soit toute la vitesse v' dont la masse m' est animée à l'instant où la percussion commence, de sorte qu'il ne lui reste plus aucun degré de vitesse quand le choc est fini; et, cela étant, il suffira que les quantités de mouvement $mg\tau$ et $m'\int_0^\tau udt$, imprimées en sens contraire à la balance pendant la durée du choc, soient égales entre elles. La condition de cet équilibre sera exprimée par l'équation

$$m'v' = mg\tau;$$

et selon qu'on aura, au contraire, $m'v' > mg\tau$ ou $m'v' < mg\tau$, ce sera la percussion qui l'emportera sur la pression, ou la pression sur la percussion. Or, quoique le temps τ soit extrêmement petit, ce dernier cas est possible, en supposant la masse m suffisamment grande à l'égard de m' : pour qu'il fût impossible, il faudrait que la durée de la percussion fût infiniment petite; ce qui n'a pas lieu dans la nature.

La Dynamique sera une application continuelle des principes que nous avons exposés en détail dans ce chapitre, et dont il est nécessaire de se former une idée précise, avant d'essayer de résoudre les différens problèmes relatifs au mouvement des corps.

CHAPITRE II.

EXEMPLES DU MOUVEMENT RECTILIGNE.

129. D'après ce qu'on a vu dans le n° 119, les équations du mouvement rectiligne d'un point matériel sont celles-ci :

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt}, \quad \varphi = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1)$$

dont la dernière est une suite des deux autres, et dans lesquelles on a désigné, au bout d'un temps quelconque t, par x la distance du mobile à un point fixe de la droite qu'il décrit, par v sa vitesse acquise, et par φ la force qui le sollicite; φ étant une quantité positive ou négative, selon que cette

force agira dans le sens ou en sens contraire de la vitesse v. Ces équations s'appliqueront non seulement à un point matériel isolé, mais aussi à un corps solide de grandeur quelconque, dont tous les points décriront des droites parallèles, et auront, par conséquent, un mouvement commun : φ sera alors la force accélératrice, égale à la force motrice divisée par la masse du mobile.

La valeur de φ sera donnée dans chaque problème ; et la question consistera à en déduire, par l'intégration, les expressions de v et x en fonctions de t. Elles contiendront deux constantes arbitraires, dont on déterminera les valeurs d'après celles de x et v à l'origine du mouvement, qui devront être données dans chaque exemple. Dorénavant, nous supposerons toujours que l'on compte le temps t à partir de cette origine ; en sorte que les valeurs données de x et v répondront à $t = 0$.

L'intégration ne sera généralement possible sous forme finie, que quand φ ne dépendra, comme nous le supposerons dans les exemples suivans, que d'une seule des quantités t, v, x. Lorsque la valeur donnée de φ les contiendra toutes trois, ou deux seulement, les valeurs de x et v ne pourront s'exprimer que par les séries.

130. Supposons d'abord que la force φ soit constante, et qu'il s'agisse, par exemple, du mouvement vertical d'un corps qui tombe dans le vide en vertu de la pesanteur.

En désignant cette force par g, nous aurons

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g ;$$

d'où l'on tire

$$v = gt, \quad x = 1/2 gt^2 ,$$

et, par conséquent,

$$v^2 = 2gx ,$$

en supposant que la distance x soit comptée du point de départ du mobile, et que la vitesse initiale soit nulle, de sorte qu'on ait $x = 0$ et $v = 0$, quand $t = 0$.

Si on appelle a la vitesse acquise en tombant d'une hauteur h, on aura

$$a = \sqrt{2gh} ;$$

ce qui fournit une expression commode d'une vitesse quelconque, au moyen de la hauteur d'où un corps pesant devrait tomber pour l'acquérir, et de la vitesse constante g. Le temps de la chute de cette hauteur h étant représenté par θ, on aura aussi

$$\theta = \frac{a}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad h = 1/2 g\theta^2 = \frac{a^2}{2g}.$$

Si le corps est lancé verticalement de bas en haut, l'équation de son mouvement dans le vide sera

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g$$

g étant la même vitesse constante que dans le cas précédent, parce que l'on suppose l'action de la pesanteur sur les corps en mouvement, indépendante du sens dans lequel ils se meuvent, aussi bien que de la grandeur de leur vitesse. En supposant que a soit la vitesse initiale, on en déduira

$$v = a - gt, \quad x = at - 1/2 gt^2 ,$$

pour la vitesse et l'espace parcouru à un instant quelconque. Il est évident que le mobile s'élèvera jusqu'à ce que cette vitesse soit nulle. Si donc on appelle θ' le temps de son élévation, et h' la hauteur à laquelle il parviendra, on aura

$$\theta' = \frac{a}{g}, \quad h' = \frac{a^2}{2g} ;$$

et comme ces valeurs coïncident avec celles de θ et h du cas précédent, on en conclut qu'un corps pesant, lancé de bas en haut avec une vitesse a, s'élève dans le vide à la hauteur d'où il devrait tomber pour acquérir cette même vitesse, et que le temps de son élévation est le même que celui de sa chute.

Communément on appelle h la hauteur due à la vitesse a, et, réciproquement, a la vitesse due à la hauteur h.

131. Soit que le mobile monte ou descende, il suffira, pour former les équations de son mouvement sur un plan incliné, de mettre dans les précédentes $g \cos \alpha$ à la place de g, en désignant, comme dans le n° 117, par α le complément de l'inclinaison du plan donné sur un plan horizontal.

Dans le cas de la chute, on aura donc

$$v = gt \cos \alpha, \quad x = 1/2 gt^2 \cos \alpha, \quad v^2 = 2gx \cos \alpha ;$$

mais en appelant l la longueur du plan incliné, et h sa hauteur, on a

$$h = l \cos \alpha ;$$

si donc on indique par k la vitesse acquise par le mobile, quand il aura parcouru toute cette longueur, on aura

$$k^2 = 2gl \cos \alpha = 2gh ;$$

ce qui montre que cette vitesse k est la même que si le mobile fût tombé par la verticale h.

Soit ABC (fig. 34) la circonférence d'un cercle dont le plan est vertical. Supposons que AB représente son diamètre vertical, et cherchons, d'après les équations précédentes, le temps qu'un point matériel pesant emploiera à parcourir la corde AC, aboutissant à l'extrémité supérieure de ce diamètre. En abaissant du point C la perpendiculaire CD sur AB, on aura, dans ce cas,

$$AC = l, \quad AD = h ;$$

mais si l'on désigne par θ le temps demandé, on aura

$$l = 1/2\, g\theta^2 \cos\alpha = \frac{g\theta^2 k}{2l};$$

d'après une propriété connue du cercle; on a d'ailleurs

$$t^2 = kb,$$

en appelant b le diamètre AB; d'où l'on conclut

$$\theta = \sqrt{\frac{2l^2}{gk}} = \sqrt{\frac{2b}{g}}.$$

Or, ce temps est le même que celui de la chute par une hauteur verticale b; il en résulte donc que la corde AC sera parcourue dans le même temps que le diamètre AB.

On trouvera le même résultat, en considérant le mouvement sur la corde CB qui aboutit à l'extrémité inférieure de AB, et sera aussi parcourue dans le même temps que ce diamètre vertical.

Ce théorème, indépendant de la longueur de la corde parcourue, subsistera encore lorsqu'elle deviendra infiniment petite; ce qui tient à ce qu'en même temps la composante de la gravité, qui agit suivant cette longueur, ne sera plus une quantité finie.

132. Considérons actuellement le mouvement d'un corps solide pesant qui tombe ou qui est lancé de bas en haut dans un milieu résistant, et dont tous les points décrivent des droites verticales. Pour que la force accélératrice ne dépende que de la vitesse, nous supposerons que le milieu ait partout la même densité.

Dans le cas de la chute, on aura

$$\varphi = g - \frac{gv^2}{k^2},$$

en supposant la résistance proportionnelle au carré de la vitesse (n° 124), et désignant par k une vitesse constante et donnée. Cette valeur de φ étant une fonction de v, il faudra faire usage de la seconde équation (1), et l'on en déduira

$$gdt = \frac{k^2\, dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2}\left(\frac{dv}{k+v} + \frac{dv}{k-v}\right).$$

En intégrant et supposant nulle la vitesse initiale, de sorte qu'on ait $v = 0$ quand $t = 0$, il en résulte

$$gt = \frac{1}{2} k \log \frac{k+v}{k-v};$$

et, réciproquement,

$$\frac{k-v}{k+v} = e^{-\frac{2gt}{k}};$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{k\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right)}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}. \quad (2)$$

Je désigne ici par e la base des logarithmes népériens, et par *log* un logarithme de cette espèce. Il en sera de même dans toute la suite de cet ouvrage; ce qui n'empêchera pas d'employer quelquefois la lettre e à représenter d'autres quantités, dans des formules où la base de ces logarithmes n'entrera pas. Elle a pour valeur approchée

$$e = 2{,}7182818;$$

et celle du module constant par lequel il faut multiplier le logarithme népérien d'un nombre quelconque, pour en déduire le logarithme ordinaire de ce nombre, est

$$0{,}4342945$$

A cause de $dx = vdt$, on aura

$$x = \frac{k^2}{g} \log \frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right), \quad (3)$$

en intégrant et supposant $x = 0$ quand $t = 0$. On a aussi

$$gdx = \frac{vdv}{k^2 - v^2},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{k^2}{2g} \log. \frac{k^2}{k^2 - v^2}, \quad (4)$$

pour la valeur de x en fonction de v.

133. Ces formules renferment la solution complète du problème. On en déduit cette conséquence, que le temps augmentant sans cesse, le mouvement approche de plus en plus de l'uniformité, et qu'il est sensiblement uniforme quand la vitesse gt, produite par la pesanteur, est devenue très grande par rapport à k. En effet, en négligeant alors l'exponentielle $e^{-\frac{gt}{k}}$, qui est une très petite fraction, on a

$$v = k, \quad \varphi = 0, \quad x = kt - \frac{k^2}{g} \log 2.$$

La résistance du fluide étant une force qui s'exerce à la surface du mobile, la force motrice qui en résulte est indépendante de la masse, et serait la même, soit que le mobile fût formé d'une matière très dense, soit qu'on enlevât la matière intérieure, et qu'on le réduisît à une enveloppe

rès mince. Or, la force accélératrice se déduisant de la force motrice, en la divisant par la masse du corps, il s'ensuit que la première de ces deux forces sera, toutes choses d'ailleurs égales, en raison inverse de cette masse, et, par conséquent, k en raison directe de sa racine carrée. C'est pour cela que le mouvement final, dans un milieu résistant, est le plus rapide pour le corps pesant dont la densité est la plus grande; la forme et l'étendue de la surface restant les mêmes.

Quand la densité du milieu est très faible par rapport à celle du mobile, la quantité k est très grande; et ce n'est qu'après un temps très long que le mouvement peut approcher de l'uniformité. Tant que la vitesse gt n'est pas devenue très considérable, on a, en séries convergentes,

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right) = \frac{gt}{k} + \frac{g^3 t^3}{6k^3} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) = 1 + \frac{g^2 t^2}{2k^2} + \frac{g^4 t^4}{24k^4} + \text{etc.},$$

$$\log\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) = \frac{g^2 t^2}{2k^2} - \frac{g^4 t^4}{12k^4} + \text{etc.},$$

et les formules (2) et (3) deviennent

$$v = gt - \frac{g^3 t^3}{3k^2} + \text{etc.},$$

$$x = 1/2 gt^2 - \frac{g^3 t^4}{12k^2} + \text{etc.}$$

Elles se réduisent, comme cela doit être, à celles du mouvement uniformément accéléré, lorsque la densité du milieu est tout-à-fait nulle, ce qui rend la quantité k infinie.

134. Dans le cas où le mobile est lancé de bas en haut, on a

$$\varphi = -g - \frac{gv^2}{k^2}.$$

Si sa surface supérieure est la même que sa surface inférieure, la constante k sera aussi la même que dans le cas de la chute; mais si ces deux portions de surface sont différentes, les valeurs de k le seront également; et, par exemple, s'il s'agit d'un cône dont la base soit horizontale, la quantité k sera beaucoup plus grande ou beaucoup plus petite dans son mouvement ascensionnel que dans sa chute, selon que son sommet sera situé au-dessus ou au-dessous de sa base. Pour fixer les idées, je supposerai que le mobile soit une sphère homogène; en appelant r son rayon, D sa densité et ρ celle du milieu, on aura alors (n° 124)

$$k^2 = \frac{Dr}{\gamma\rho};$$

γ étant une constante qui ne peut plus dépendre que de la nature du milieu, liquide ou fluide aériforme, et de sa température.

En substituant cette valeur de φ dans la seconde équation (1), on aura

$$\frac{kdv}{k^2 + v^2} = -\frac{gdt}{k};$$

et en intégrant et désignant par a la vitesse initiale du mobile, il en résulte

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{v}{k}\right) = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{k}\right) - \frac{gt}{k}.$$

La valeur de v qu'on en déduit peut facilement s'écrire sous la forme :

$$v = \frac{k\left(a\cos\frac{gt}{k} - k\sin\frac{gt}{k}\right)}{a\sin\frac{gt}{k} + k\cos\frac{gt}{k}}.$$

En multipliant par dt et intégrant de nouveau, de manière qu'on ait $x = 0$ quand $t = 0$, on en conclut

$$x = \frac{k^2}{g}\log\left(\frac{a}{k}\sin\frac{gt}{k} + \cos\frac{gt}{k}\right).$$

On aura aussi

$$gdx = -\frac{k^2 vdv}{k^2 + v^2},$$

et par conséquent,

$$x = \frac{k^2}{2g}\log\frac{k^2 + a^2}{k^2 + v^2}.$$

Si l'on fait $\frac{1}{k} = \alpha$, et que l'on suppose ensuite $\alpha = 0$, pour appliquer ces formules au cas du vide, elles se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; et par la règle ordinaire, on trouve, comme cela doit être,

$$v = a - gt, \qquad x = at - 1/2 gt^2;$$

résultat qu'on obtient aussi par le développement en série, comme dans le numéro précédent.

135. Appelons h la plus grande hauteur à laquelle le mobile parviendra, et qui répond à $v = 0$; nous aurons

$$h = \frac{k^2}{2g}\log\frac{k^2 + a^2}{k^2}.$$

Soit aussi θ_1 le temps qu'il emploiera pour y parvenir; sa valeur sera

$$\theta_1 = \frac{k}{g}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{k}\right).$$

Parvenu à cette hauteur, le mobile retombera, et son mouvement sera exprimé par les formules du n° 132. Si l'on représente par a' sa vitesse, lorsqu'il sera retombé de toute cette hauteur h, on aura, d'après l'équation (4),

$$h = \frac{k^2}{2g} \log \frac{k^2}{k^2 - a'^2};$$

en égalant cette valeur de h à la précédente, on a

$$\frac{k^2}{k^2 - a'^2} = \frac{k^2 + a^2}{k^2},$$

et, par conséquent,

$$a'^2 = \frac{a^2 k^2}{a^2 + k^2};$$

d'où l'on conclut $a' < a$; en sorte que la vitesse du mobile, quand il sera revenu à son point de départ, se trouve moindre que sa vitesse initiale.

Soit aussi θ' le temps de la chute totale, lequel répondra à $v = a'$. On aura

$$\theta' = \frac{k}{2g} \log \frac{k + a'}{k - a'},$$

ou bien, en mettant pour a' sa valeur,

$$\theta' = \frac{k}{2g} \log \frac{\sqrt{a^2 + k^2} + a}{\sqrt{a^2 + k^2} - a};$$

valeur différente de celle du temps θ_1 de l'élévation.

En multipliant par $\sqrt{a^2 + k^2} - a$, le numérateur et le dénominateur de la fraction comprise sous le logarithme, on aura, plus simplement,

$$\theta' = \frac{k}{g} \log \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2} - a};$$

et si l'on appelle θ le temps total $\theta' + \theta_1$ de l'allée et du retour du projectile, on en conclura

$$\frac{g\theta}{k} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{k}\right) + \log \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2} - a}.$$

Si le mobile est un boulet lancé dans l'air par un canon vertical, on pourra, malgré la rapidité de ce mouvement, mesurer le temps θ avec quelque précision; et si l'on connaît, en outre, la vitesse de projection a, l'équation précédente servira à déterminer la valeur de k, relative au rayon r du boulet. En désignant par k' ce que devient k par rapport à un autre boulet de la même matière et d'un rayon r', on aura

$$k' = k\sqrt{\frac{r'}{r}},$$

d'après l'expression de k^2 du numéro précédent.

136. Dans le cas où l'on fait abstraction de la pesanteur, et où l'on suppose la résistance du milieu proportionnelle à une puissance de la vitesse dont l'exposant est moindre que l'unité, la solution du problème présente une singularité qui mérite d'être remarquée.

Supposons qu'on ait, par exemple,

$$\varphi = -2g\sqrt{\frac{v}{k}};$$

g et k étant toujours la gravité et une vitesse constante et donnée. L'équation du mouvement sera

$$\frac{dv}{dt} = -2g\sqrt{\frac{v}{k}};$$

en en tirant la valeur de gdt, intégrant et désignant par a la vitesse initiale, il vient

$$g = \sqrt{k}\left(\sqrt{a} - \sqrt{v}\right),$$

et, par conséquent,

$$v = \left(\sqrt{a} - \frac{gt}{\sqrt{k}}\right)^2.$$

En multipliant par dt, et intégrant de nouveau, de sorte qu'on ait $x = 0$ quand $t = 0$, on trouve

$$x = \frac{a\sqrt{ak}}{3g} + \frac{1}{3gk}\left(gt - \sqrt{ak}\right)^3,$$

pour l'espace parcouru à un instant quelconque.

D'après la valeur de v, la vitesse diminue depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant qui répond à $t = \frac{\sqrt{ak}}{g}$; à cet instant, la vitesse est nulle; au delà, le mouvement continue dans le même sens qu'auparavant, et la vitesse augmente indéfiniment. Mais la vitesse étant nulle à un certain instant, la force accélératrice est nulle en même temps; par conséquent, le mobile doit s'arrêter à cet instant et demeurer en repos. Or, il faut remarquer que l'équation du mouvement admet une solution particulière $v = 0$; en sorte que sa solution complète est l'ensemble de son intégrale et de cette équation $v = 0$; il s'ensuit donc que le problème est résolu depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{\sqrt{ak}}{g}$, par l'intégrale de l'équation du mouvement, et au delà de cette valeur de t par la solution particulière. Pendant le premier intervalle de temps, le mobile décrit, d'un mouvement continuellement retardé, une ligne égale à $\frac{a\sqrt{ak}}{3g}$,

à l'extrémité de laquelle il s'arrête et demeure en repos.

Cet exemple, purement hypothétique, suffit pour montrer la nécessité d'avoir égard aux solutions particulières des équations différentielles du mouvement, s'il en existait; ce qui n'arrive pas réellement, d'après les expressions des forces en fonctions de la vitesse acquise et de l'espace parcouru, qui ont lieu dans la nature.

137. Donnons maintenant des exemples de mouvemens dans lesquels la force accélératrice variera avec l'espace parcouru.

Le cas le plus simple a lieu, lorsqu'il s'agit d'un point matériel attiré vers un centre fixe, en raison directe de la distance à ce point, que l'on suppose situé sur la droite que ce mobile décrit. Au bout du temps t, soit z cette distance; à une distance donnée a, supposons que la force accélératrice soit égale à la gravité g; on aura, d'après la loi donnée,

$$\varphi = \frac{gz}{a},$$

pour sa valeur à un instant quelconque. Si z est l'espace parcouru au même instant, et que le mobile soit parti du point situé à une distance c du centre d'attraction, en se dirigeant vers ce centre, on aura aussi

$$z = c - z, \quad v = -\frac{dz}{dt},$$

et la troisième équation (1) deviendra

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{g}{a} z.$$

Son intégrale complète est

$$z = A \cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + B \sin t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

A et B désignant les deux constantes arbitraires. En supposant nulle la vitesse initiale du mobile, on aura à la fois

$$t = 0, \quad z = c, \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$

d'où l'on conclut

$$A = c, \quad B = 0,$$

et, par conséquent,

$$z = c \cos t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Cette formule montre que la distance z sera nulle ou que le mobile atteindra le centre d'attraction, au bout d'un temps indépendant de la distance c de son point de départ, et égal à $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$: il fera ensuite, de part et d'autre de ce centre, des oscillations dont l'amplitude et la durée constantes seront cette distance c et ce temps $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

138. Pour un autre exemple, considérons le mouvement d'un corps pesant dans le vide; nous supposons qu'il tombe d'une assez grande hauteur pour qu'on doive avoir égard, pendant sa chute, à la variation de la pesanteur.

Soient BAE (fig. 35) un grand cercle vertical de la terre, D le point de départ du mobile dans ce plan, M sa position au bout du temps t, sur la droite DC qui aboutit au centre C de la terre, et rencontre en A sa surface. Appelons r son rayon CA, h la hauteur AD, z l'espace DM parcouru par le mobile, s sa distance CM au centre C, en sorte qu'on ait

$$s = r + h - z.$$

La force accélératrice φ sera la pesanteur au point M; en la désignant toujours par g à la surface de la terre, c'est-à-dire, au point A, et supposant que son intensité varie en raison inverse du carré de la distance au centre C, on aura donc

$$\varphi : g :: r^2 : s^2;$$

d'où l'on tire

$$\varphi = \frac{gr^2}{s^2};$$

au moyen de quoi la troisième équation (1) deviendra

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{gr^2}{(r+h-z)^2}.$$

Je multiplie ces deux membres par $2dz$; j'intègre ensuite; puis je détermine la constante arbitraire de manière qu'on ait $\frac{dz}{dt} = 0$, quand $t = 0$; il vient

$$\frac{dz^2}{dt^2} = 2gr^2\left(\frac{1}{r+h-z} - \frac{1}{r+h}\right);$$

ce qui fera connaître la vitesse acquise par le mobile, à une distance quelconque z de son point de départ. Au point A, où l'on a $z = h$, cette vitesse sera

$$\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{r}{r+h}},$$

et, par conséquent moindre, comme cela devait être, que si la gravité avait, dans toute la hauteur h, la même intensité qu'à la surface.

L'équation précédente donne

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{r+h}}\, dt = \frac{(r+h-z)\,dz}{\sqrt{(r+h)z - z^2}}.$$

Or, en comparant cette équation différentielle à l'équation (a) du n° 73, on voit que si l'on construit une demi-cycloïde DOC, qui ait son sommet au point D et son origine au point O, situé sur la perpendiculaire CO à la droite CD, et dont le cercle générateur ait pour diamètre cette droite CD égale à $r+h$; que l'on mène ensuite par le point M une perpendiculaire MN à la droite DC, qui rencontre la cycloïde au point N, on aura

$$MN = t\sqrt{\frac{2gr^2}{r+h}};$$

en sorte que l'ordonnée MN du point N fera connaître le temps t employé à parcourir l'abscisse DM, et réciproquement. Sous forme finie, on aura

$$t\sqrt{\frac{2gr^2}{r+h^2}} = \sqrt{(r+h)\,x - x^2} + \frac{1}{2}(r+h)\,\text{arc}\left(\cos = \frac{r+h-2x}{r+h}\right),$$

en intégrant, et en observant que $x=0$ quand $t=0$.

Lorsque la hauteur h et, conséquemment, la distance x, seront très petites par rapport à r, cette formule devra différer très peu de celle qui répond à la pesanteur constante. En effet, on a

$$\text{arc}\left(\cos = \frac{r+h-2x}{r+h}\right) = \text{arc}\left(\sin = \frac{2\sqrt{(r+h)\,x - x^2}}{r+h}\right);$$

le sinus étant très petit, on peut le prendre à la place de l'arc; ce qui rend d'abord le second terme de la formule précédente égal au premier. On peut aussi mettre le rayon r au lieu de $r+h-x$, et réduire, par conséquent, leur somme à $2\sqrt{rx}$; et, de cette manière, la formule dont il s'agit deviendra

$$t\sqrt{\frac{2gr^2}{r+h}} = 2\sqrt{rx},$$

ou simplement

$$x = 1/2gt^2,$$

en négligeant h par rapport à r;

Je me contenterai d'indiquer, comme exemple de calcul, le cas où le mobile soumis à une pesanteur variable est lancé de bas en haut; et, pour dernier exemple du mouvement rectiligne, je vais considérer le mouvement d'un point matériel attiré vers deux centres fixes, situés sur la droite qu'il décrit.

139. Soient A et B (fig. 36), les deux centres d'attraction, M la position du mobile au bout du temps t, et D son point de départ. On suppose, pour fixer les idées, que le mouvement a lieu entre les deux centres d'attraction, et de A vers B; faisons

$$DM = x, \quad AM = z, \quad AD = a, \quad BM = c - z,$$

en sorte que x soit l'espace parcouru, z la distance du mobile au point A, a la distance initiale, et c la longueur de la droite AB. En supposant toujours les attractions en raison inverse du carré des distances, et désignant, à l'unité de distance, par a^2 et b^2 les intensités des forces qui émanent des centres A et B, nous aurons $\frac{a^2}{z^2}$ et $\frac{b^2}{(c-z)^2}$ pour leurs intensités quand le mobile est en M. La force accélératrice φ sera l'excès de la seconde force qui tend à augmenter l'espace x, sur la première qui tend à le diminuer; donc, à cause de $dx = dz$, on aura

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{b^2}{(c-z)^2} - \frac{a^2}{z^2}, \qquad (a)$$

pour ce que devient la troisième équation (1), et $\frac{dz}{dt}$ pour la vitesse v du mobile au point M.

En multipliant l'équation (a) par $2dz$ et intégrant, on a

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{2b^2}{c-z} + \frac{2a^2}{z} - \gamma; \qquad (b)$$

γ étant la constance arbitraire. Pour la déterminer, je désigne par k la vitesse initiale qui répond à $z=a$; on aura

$$\gamma = \frac{2b^2}{c-a} + \frac{2a^2}{a} - k^2.$$

En retranchant cette équation de la précédente, il en résultera

$$\frac{dz^2}{dt^2} = k^2 + 2b^2\left(\frac{1}{c-z} - \frac{1}{c-a}\right) - 2a^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right); \qquad (c)$$

ce qui fera connaître la vitesse du mobile, dans une position quelconque entre les deux points A et B.

140. Il y a, sur la droite AB, un certain point C, dans lequel les deux forces d'attraction sont égales; en sorte que si l'on y plaçait le mobile, ou qu'il y parvînt sans aucune vitesse acquise, il y demeurerait en équilibre. En appelant h la distance AC, on a

$$\frac{b^2}{(c-h)^2} = \frac{a^2}{h^2}.$$

On tire de là deux valeurs de h, dont l'une appar-

ment sur cette même courbe, s sera une fonction de t; en sorte que l'on aura, dans un mouvement curviligne quelconque,

$$s = Ft.$$

Si l'on désigne, au même instant, par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires du mobile, ces variables seront aussi des fonctions de t, et l'on aura également

$$x = ft, \quad y = f't, \quad z = f''t.$$

Lorsque ces trois dernières équations seront connues, on en déduira, par l'élimination de t, les deux équations en x, y, z, de la trajectoire. Au moyen des équations de cette courbe, on déterminera s en fonction de l'une des trois coordonnées, et, par suite, en fonction de t; ce qui fera connaître la loi du mouvement sur la trajectoire. Chacune des trois équations précédentes est celle du mouvement rectiligne de la projection du mobile sur l'un des axes des coordonnées; il s'ensuit donc que la détermination complète du mouvement curviligne d'un point matériel dans l'espace, se réduira à celle de trois mouvemens rectilignes, qui seront les mouvemens de ses projections sur les trois axes Ox, Oy, Oz, des coordonnées. Quand ces trois mouvemens seront uniformes, celui du mobile sera aussi rectiligne et uniforme, et réciproquement.

145. Pendant l'instant dt, le mobile décrira l'élément ds de sa trajectoire; en négligeant, dans cet intervalle de temps infiniment petit, l'action des forces qui le sollicitent, on pourra considérer son mouvement comme rectiligne et uniforme. Si donc on appelle v la vitesse acquise au bout du temps t, on aura

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Si ces forces cessaient réellement d'agir à l'instant que l'on considère, le mobile continuerait de se mouvoir avec cette vitesse v, et suivant le prolongement MT de l'élément ds, c'est-à-dire, suivant la tangente à la trajectoire, puisque en vertu de l'inertie de la matière il ne pourrait alors changer ni la direction de son mouvement ni la grandeur de sa vitesse (n° 113). On peut donc considérer un point matériel qui décrit une ligne courbe quelconque comme étant animé, à chaque instant, d'une vitesse dirigée suivant la tangente à cette courbe, et exprimée par le rapport de son élément différentiel à l'élément du temps.

En représentant, au bout du même temps t, par p, q, r, les vitesses des projections du mobile sur les trois axes des x, y, z, on aura aussi, dans ces trois mouvemens rectilignes,

$$p = \frac{dx}{dt}, \quad q = \frac{dy}{dt}, \quad r = \frac{dz}{dt}.$$

Mais si l'on désigne par α, β, γ, les angles que fait la tangente à la trajectoire, ou la direction de la vitesse v, avec des parallèles aux axes des x, y, z, on a (n° 17)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

d'où l'on conclut

$$p = v\cos\alpha, \quad q = v\cos\beta, \quad r = v\cos\gamma, \qquad (1)$$

et en même temps

$$v^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Le temps t croissant continuellement, sa différentielle est toujours positive. Les vitesses p, q, r, sont positives ou négatives, selon que les coordonnées x, y, z, croissent ou décroissent. Dans les équations (1), on peut regarder la vitesse v comme une quantité positive; le sens de cette vitesse, ou la partie MT de la tangente à la trajectoire, suivant laquelle elle sera dirigée, se déterminera alors par les signes de p, q, r, qui feront connaître si les angles α, β, γ, sont aigus ou obtus. Dans l'équation $v = \frac{ds}{dt}$, on considérera la vitesse v comme positive ou comme négative, selon que l'arc s croîtra ou décroîtra.

On appelle *composantes* de la vitesse v d'un point matériel les vitesses p, q, r, de ses trois projections sur des axes rectangulaires; et chacune de ces trois composantes est ce que l'on entend par la *vitesse du mobile*, parallèlement à l'axe auquel elle répond. En comparant les équations (1) à celles du n° 31, on voit que cette composition des vitesses se fera suivant les mêmes règles que celle des forces. D'après cette analogie, si l'on mène par le point M une droite quelconque MA, qui fasse avec les parallèles aux axes des x, y, z, menées par le même point, des angles a, b, c, aigus ou obtus, la composante de la vitesse v suivant cette droite MA aura pour expression générale

$$p\cos a + q\cos b + r\cos c.$$

La quantité de mouvement (n° 126) d'un point matériel isolé, et celle d'un corps dont tous les points sont animés de vitesses égales et parallèles, se décomposeront en d'autres quantités de cette nature, et celles-ci se réduiront à une seule, suivant les mêmes règles que les vitesses qu'elles ont pour facteur.

146. Au bout du temps $t + dt$, soient $p + p'$, $q + q'$, $r + r'$, ce que deviennent les trois composantes de la vitesse du mobile, parallèles aux axes des x, y, z; en sorte que p', q', r', représentent les augmentations infiniment petites de vitesses qui ont lieu suivant ces directions pendant l'instant dt. L'accroissement de vitesse suivant la droite MA, sera

$$p'\cos a + q'\cos b + r'\cos c.$$

Or, quelles que soient les quantités p', q', r', si l'on fait

$$u^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2,$$

et qu'on regarde u comme une quantité positive, on pourra toujours trouver trois angles α', β', γ', aigus ou obtus, tels que l'on ait

$$p' = u \cos \alpha', \quad q' = u \cos \beta', \quad r' = u \cos \gamma';$$

au moyen de quoi l'accroissement de vitesse suivant MA, deviendra

$$u (\cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \gamma').$$

De plus, la quantité comprise entre les parenthèses est le cosinus d'un certain angle que j'appelle σ. L'accroissement dont il s'agit est donc égal à $u \cos \sigma$; par conséquent, u est sa plus grande valeur, et elle répond à la direction de la droite MA, pour laquelle les angles a, b, c, sont les mêmes que α', β', γ', ce qui rend le coefficient de u égal à l'unité. Dans toute autre direction, l'accroissement de vitesse sera égal au *maximum* u, multiplié par le cosinus de l'angle σ que fait cette direction quelconque avec celle du *maximum*; d'où il résulte qu'il sera nul par rapport à toutes les directions perpendiculaires à celles de sa plus grande valeur.

Quelle que soit la variation de vitesse du mobile, en grandeur et en direction, pendant l'instant dt, il y a donc toujours une certaine direction pour laquelle l'augmentation de vitesse est la plus grande, et qui jouit de cette propriété, que, suivant toutes les directions perpendiculaires à celle-là, la vitesse n'est ni augmentée ni diminuée.

147. La direction d'une force qui agit sur un point matériel en mouvement, est la droite suivant laquelle elle augmente ou diminue la vitesse acquise, et perpendiculairement à laquelle elle n'y produit aucune altération. Ainsi, quand nous disons que la pesanteur d'un corps en mouvement dans un sens quelconque est verticale, comme celle d'un corps en repos, nous entendons par là que cette force augmente la vitesse verticale, et n'altère aucunement la vitesse horizontale.

Cela étant, désignons, au bout du temps t, par U, U', U'', etc., les intensités des différentes forces qui agissent sur le point matériel dont nous considérons le mouvement curviligne; par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', etc., les angles que font leurs directions données avec des parallèles aux axes des x, y, z; et par X, Y, Z, les sommes de leurs composantes suivant ces axes; nous aurons d'abord (n° 32)

$$X = U \cos a + U' \cos a' + U'' \cos a'' + \text{etc.},$$
$$Y = U \cos b + U' \cos b' + U'' \cos b'' + \text{etc.},$$
$$Z = U \cos c + U' \cos c' + U'' \cos c'' + \text{etc.}$$

Soient ensuite u, u', u'', etc., les vitesses infiniment petites que ces forces U, U', U'', etc., produiraient, pendant l'instant dt, suivant leurs directions respectives, si chacune d'elles agissait seule sur le mobile animé de la vitesse v. On verra, comme dans le n° 116, que la simultanéité de ces forces n'influera nullement sur les grandeurs et les directions des vitesses qui seront réellement produites; par conséquent, si l'on continue d'appeler p', q', r', les quantités infiniment petites dont les vitesses p, q, r, des projections du mobile sur les axes des x, y, z, s'accroîtront dans l'instant dt, ces quantités seront les sommes des composantes de u, u', u'', etc., suivant ces trois axes; en sorte que nous aurons

$$p' = u \cos a + u' \cos a' + u'' \cos a'' + \text{etc.},$$
$$q' = u \cos b + u' \cos b' + u'' \cos b'' + \text{etc.},$$
$$r' = u \cos c + u' \cos c' + u'' \cos c'' + \text{etc.}$$

Mais en appliquant à chacune des forces u, u', u'', etc., ce qu'on a trouvé (n° 118) pour la mesure d'une force d'après la vitesse dont elle est capable, on a aussi

$$u = U dt, \quad u' = U' dt, \quad u'' = U'' dt, \quad \text{etc};$$

en comparant les valeurs de p', q', r', à celles de X, Y, Z, il en résulte donc

$$p' = X dt, \quad q' = Y dt, \quad r' = Z dt;$$

ce qui montre que l'accroissement de la composante de la vitesse du mobile suivant chaque axe, dans l'instant dt, est la vitesse produite, pendant cet instant, par la composante totale suivant ce même axe, des forces données qui agissent sur ce point matériel.

Ce résultat tient à ce que les forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles impriment au mobile dans un même temps infiniment petit, lesquelles vitesses infiniment petites ne changent pas, soit que ces forces agissent isolément, soit que leurs actions aient lieu simultanément. Il s'ensuit aussi que si les forces appliquées au mobile sont, par exemple, au nombre de trois, non comprises dans un même plan; que l'on prenne sur les directions de ces trois forces U, U', U'', à partir de leur point d'application, des droites de grandeurs finies qui soient entre elles comme les vitesses correspondantes u, u', u''; et que l'on achève le parallélépipède dont ces trois droites seront les côtés adjacens, la résultante de ces forces sera dirigée suivant la diagonale, et sa grandeur sera à celle de chacune de ces forces comme la diagonale est au côté correspondant.

148. Si les forces qui agissent sur le mobile sont indépendantes de sa vitesse et de sa position dans l'espace, les mouvemens de ses trois projections sur les axes des coordonnées seront indépendans entre eux; en sorte que sa projection sur chaque axe se trouvera, au bout d'un temps quelconque, au même point, et aura la même vitesse que si les forces et les vitesses étaient nulles parallèlement aux deux autres axes. Il n'en sera plus de même, en général, quand les forces données va-

tient au point C situé entre A et B, et l'autre à un point situé sur le prolongement de AB, du côté du centre de la moindre attraction. La première de ces deux valeurs est

$$h = \frac{ac}{a+b}.$$

Appelons f la plus petite vitesse initiale qu'il faut imprimer au mobile pour qu'il arrive au point C, de sorte que, parvenu à ce point, sa vitesse soit nulle; on aura à la fois

$$k = f, \quad s = h, \quad \frac{ds}{dt} = 0;$$

et, en vertu de l'équation (c) et de la valeur de k, il en résultera

$$f^2 = \frac{2b^2}{c-a} + \frac{2a^2}{a} - \frac{2(a+b)^2}{c}. \quad (d)$$

Si la vitesse initiale k est moindre que f, le mobile retombera sur A; si elle est plus grande, il dépassera le point C, et ira tomber sur B. Dans le cas de $k = f$, le mobile emploierait un temps infini à atteindre le point C, à cause qu'à une distance infiniment petite de ce point, il ne serait plus animé que d'une vitesse infiniment petite, et sollicité par une force qui le serait également.

141. Si A et B sont les centres de deux sphères homogènes, ou composées de couches concentriques, on pourra supposer que les attractions que l'on considère sont celles de ces deux sphères; et alors leurs intensités a^2 et b^2, à l'unité de distance, seront entre elles comme leurs masses (n° 101). En supposant, par exemple, que A soit le centre de la lune et B celui de la terre, et négligeant la non-sphéricité de ces deux corps, on aura

$$a^2 = \frac{b^2}{75};$$

car la masse de la lune, conclue de son action pour soulever les eaux de la mer, est $\frac{1}{75}$ de celle de la terre. On aura donc

$$h = \frac{c}{1+\sqrt{75}} = (0,10352)\, c;$$

en sorte que le point également attiré par la terre et par son satellite se trouve, à peu près, au dixième de leur distance mutuelle à partir de la lune.

Soit r le rayon de la terre; on pourra prendre $60\,r$ pour la distance c de la lune à la terre; et si le mobile est la partie de la surface de la lune, on aura en même temps $a = \frac{3r}{11}$, d'après le rapport connu du rayon de la lune à celui de la terre. Au moyen de ces valeurs r et a, et de $a = \frac{b}{\sqrt{75}}$, l'équation (d) devient

$$f^2 = (0,044894)\,\frac{2b^2}{r}.$$

En désignant par g l'attraction de la terre à sa surface, on aura

$$b^2 = gr^2,$$

pour cette force à l'unité de distance. Si donc on fait

$$(0,044894)\, r = r',$$

il en résultera

$$f^2 = 2gr'.$$

Or, l'attraction g peut être prise pour la pesanteur dont elle est la partie principale; par conséquent, f est la vitesse due à une hauteur r'; et à cause de

$$g = 9^m,80896, \quad \pi r = 20000000^m,$$

sa valeur est

$$f = 2368^m.$$

La lune n'ayant pas d'atmosphère dont la résistance puisse diminuer la vitesse des corps partis de sa surface, il s'ensuit que si la terre et la lune étaient en repos, un corps lancé de la surface de la lune vers la terre, avec une vitesse plus grande que 2361 mètres par seconde, dépasserait le point d'égale attraction, et viendrait tomber sur la surface de la terre. Dans le mouvement de la lune autour de la terre, la droite AB qui va d'un centre à l'autre rencontre constamment la surface de la lune en un même point, qui devrait être le point D, d'où le mobile serait lancé suivant la direction DB; mais, pendant une seconde, le point D parcourt sur le cercle décrit du centre de la terre, une longueur d'environ 1000^m par seconde; par conséquent, la vitesse absolue du mobile serait, en grandeur et en direction, la résultante d'une vitesse dirigée suivant DB, et d'une vitesse de 1000^m perpendiculaire à DB. Cela étant, le corps ne restera pas sur la droite mobile AB; il décrira une courbe dans l'espace, les formules précédentes ne s'appliqueront plus à son mouvement, et il ne viendra plus tomber sur la surface de la terre, comme dans le cas de l'immobilité de la lune.

142. En résolvant l'équation (b) par rapport à dt, on a

$$dt = \frac{\sqrt{cz - z^2}\, dz}{\sqrt{2a^2c - (2a^2 - 2b^2 + c\gamma)z + \gamma z^2}}.$$

L'intégrale de cette formule s'exprimera toujours au moyen des fonctions elliptiques; en sorte que l'on pourra calculer, au moyen des tables de ces fonctions, le temps qui répond à une distance donnée z, et réciproquement. Mais indépendamment des cas où l'une des deux attractions est nulle, il

en est d'autres pour lesquels l'intégrale de la formule précédente peut encore s'obtenir sous forme finie. Ces cas ont lieu lorsque la quantité comprise sous le radical est un carré parfait; ce qui exige qu'on ait

$$(2a^2 - 2b^2 + c\gamma)^2 = 8a^2 c\gamma ;$$

équation d'où l'on tire

$$\gamma = \frac{2}{c}(a \pm b)^2 .$$

En égalant cette valeur à celle de γ du n° 139, il vient

$$k^2 = \frac{2b^2}{c-a} + \frac{2a^2}{a} - \frac{2(a \pm b)^2}{c}.$$

L'une de ces deux valeurs de k^2 est celle de f^2; l'autre est évidemment plus grande. Il s'ensuit donc que quand aucune des deux quantités a et b n'est zéro, on peut exprimer le temps sous forme finie en fonction de z, lorsque le mobile a reçu la plus petite vitesse f avec laquelle il peut atteindre le point C, et lorsqu'on lui a imprimé une certaine vitesse plus grande que celle-là.

Je substitue la double valeur de γ dans l'expression de dt; il vient

$$\sqrt{\frac{2}{c}}\, dt = \frac{\sqrt{cz - z^2}\, dz}{ac - (a \pm b)\, z};$$

formule que l'on rendra rationnelle et qu'on intégrera, sans difficulté, par les règles ordinaires. La différentielle dt doit toujours être positive; la différentielle dz est positive pendant que le mobile s'avance de D vers B, et négative lorsqu'il revient vers A. Dans le premier cas, on prendra donc le radical $\sqrt{cz - z^2}$, avec le même signe que le dénominateur $ac - (a \pm b)\, z$, et, dans le second cas, avec un signe contraire.

143. Soit que l'on suppose $b = 0$ ou $c = \infty$, le mobile ne sera plus soumis qu'à l'attraction du centre A. L'équation (c) se réduira à

$$\frac{dz^2}{dt^2} = k^2 - 2a^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right) \qquad (e)$$

la valeur de dt qu'on en déduit s'intégrera sous forme finie, et fera connaître t en fonction de z.

Si l'on fait $\frac{dz}{dt} = 0$, on aura l'équation

$$\frac{2a^2}{a} - k^2 = \frac{2a^2}{z},$$

pour déterminer la distance z à laquelle le mobile s'arrêtera. Dans le cas de $2a^2 = k^2 a$, cette distance sera infinie; ce qui signifie que le mobile ne s'arrêtera pas. Il en sera de même dans le cas de $2a^2 < k^2 a$, d'où il résulterait pour z une valeur négative qui ne peut appartenir à aucun point de la droite indéfinie DB, suivant laquelle le mobile a été lancé. Dans ces deux cas le mouvement approchera de plus en plus de l'uniformité, à mesure que le mobile s'éloignera de A.

Quand la distance z sera devenue très grande et le mouvement sensiblement uniforme, sa vitesse, d'après l'équation (e), sera à peu près égale à $\sqrt{k^2 - \frac{2a^2}{a}}$, ou à $\sqrt{k^2 - 2ga}$, en supposant qu'on ait $a^2 = ga^2$, c'est-à-dire, en supposant que le corps soit parti de la surface d'une sphère, d'un rayon a, et où l'attraction était égale à g. Ce qui montre que la diminution de la vitesse initiale k sera d'autant plus grande que cette force et ce rayon seront plus considérables.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT CURVILIGNE.

§ Ier. *Formules générales de ce mouvement.*

144. Dans le mouvement curviligne, la courbe décrite par le mobile est ce qu'on appelle la *trajectoire* de ce point matériel. Au bout d'un temps quelconque t, soit M (fig. 37) la position du mobile. Si l'on appelle s l'arc CM de la trajectoire compris entre le mobile et un point fixe C, pris arbitraire-

ment sur cette même courbe, s sera une fonction de t; en sorte que l'on aura, dans un mouvement curviligne quelconque,

$$s = \mathrm{F}t.$$

Si l'on désigne, au même instant, par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires du mobile, ces variables seront aussi des fonctions de t, et l'on aura également

$$x = ft, \quad y = f't, \quad z = f''t.$$

Lorsque ces trois dernières équations seront connues, on en déduira, par l'élimination de t, les deux équations en x, y, z, de la trajectoire. Au moyen des équations de cette courbe, on déterminera s en fonction de l'une des trois coordonnées, et, par suite, en fonction de t; ce qui fera connaître la loi du mouvement sur la trajectoire. Chacune des trois équations précédentes est celle du mouvement rectiligne de la projection du mobile sur l'un des axes des coordonnées; il s'ensuit donc que la détermination complète du mouvement curviligne d'un point matériel dans l'espace, se réduira à celle de trois mouvemens rectilignes, qui seront les mouvemens de ses projections sur les trois axes Ox, Oy, Oz, des coordonnées. Quand ces trois mouvemens seront uniformes, celui du mobile sera aussi rectiligne et uniforme, et réciproquement.

145. Pendant l'instant dt, le mobile décrira l'élément ds de sa trajectoire; en négligeant, dans cet intervalle de temps infiniment petit, l'action des forces qui le sollicitent, on pourra considérer son mouvement comme rectiligne et uniforme. Si donc on appelle v la vitesse acquise au bout du temps t, on aura

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Si ces forces cessaient réellement d'agir à l'instant que l'on considère, le mobile continuerait de se mouvoir avec cette vitesse v, et suivant le prolongement MT de l'élément ds, c'est-à-dire, suivant la tangente à la trajectoire, puisque en vertu de l'inertie de la matière il ne pourrait alors changer ni la direction de son mouvement ni la grandeur de sa vitesse (n° 113). On peut donc considérer un point matériel qui décrit une ligne courbe quelconque comme étant animé, à chaque instant, d'une vitesse dirigée suivant la tangente à cette courbe, et exprimée par le rapport de son élément différentiel à l'élément du temps.

En représentant, au bout du même temps t, par p, q, r, les vitesses des projections du mobile sur les trois axes des x, y, z, on aura aussi, dans ces trois mouvemens rectilignes,

$$p = \frac{dx}{dt}, \quad q = \frac{dy}{dt}, \quad r = \frac{dz}{dt}.$$

Mais si l'on désigne par α, β, γ, les angles que fait la tangente à la trajectoire, ou la direction de la vitesse v, avec des parallèles aux axes des x, y, z, on a (n° 17)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

d'où l'on conclut

$$p = v\cos\alpha, \quad q = v\cos\beta, \quad r = v\cos\gamma, \quad (1)$$

et en même temps

$$v^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Le temps t croissant continuellement, sa différentielle est toujours positive. Les vitesses p, q, r, sont positives ou négatives, selon que les coordonnées x, y, z, croissent ou décroissent. Dans les équations (1), on peut regarder la vitesse v comme une quantité positive; le sens de cette vitesse, ou la partie MT de la tangente à la trajectoire, suivant laquelle elle sera dirigée, se déterminera alors par les signes de p, q, r, qui feront connaître si les angles α, β, γ, sont aigus ou obtus. Dans l'équation $v = \frac{ds}{dt}$, on considérera la vitesse v comme positive ou comme négative, selon que l'arc s croîtra ou décroîtra.

On appelle *composantes* de la vitesse v d'un point matériel les vitesses p, q, r, de ses trois projections sur des axes rectangulaires; et chacune de ces trois composantes est ce que l'on entend par la *vitesse du mobile*, parallèlement à l'axe auquel elle répond. En comparant les équations (1) à celles du n° 31, on voit que cette composition des vitesses se fera suivant les mêmes règles que celle des forces. D'après cette analogie, si l'on mène par le point M une droite quelconque MA, qui fasse avec les parallèles aux axes des x, y, z, menées par le même point, des angles a, b, c, aigus ou obtus, la composante de la vitesse v suivant cette droite MA aura pour expression générale

$$p\cos a + q\cos b + r\cos c.$$

La quantité de mouvement (n° 126) d'un point matériel isolé, et celle d'un corps dont tous les points sont animés de vitesses égales et parallèles, se décomposeront en d'autres quantités de cette nature, et celles-ci se réduiront à une seule, suivant les mêmes règles que les vitesses qu'elles ont pour facteur.

146. Au bout du temps $t + dt$, soient $p + p'$, $q + q'$, $r + r'$, ce que deviennent les trois composantes de la vitesse du mobile, parallèles aux axes des x, y, z; en sorte que p', q', r', représentent les augmentations infiniment petites de vitesses qui ont lieu suivant ces directions pendant l'instant dt. L'accroissement de vitesse suivant la droite MA, sera

$$p'\cos a + q'\cos b + r'\cos c.$$

Or, quelles que soient les quantités p', q', r', si l'on fait

$$u^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2,$$

et qu'on regarde u comme une quantité positive, on pourra toujours trouver trois angles α', β', γ', aigus ou obtus, tels que l'on ait

$$p' = u \cos \alpha', \quad q' = u \cos \beta', \quad r' = u \cos \gamma';$$

au moyen de quoi l'accroissement de vitesse suivant MA, deviendra

$$u\,(\cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \gamma').$$

De plus, la quantité comprise entre les parenthèses est le cosinus d'un certain angle que j'appelle σ. L'accroissement dont il s'agit est donc égal à $u \cos \sigma$; par conséquent, u est sa plus grande valeur, et elle répond à la direction de la droite MA, pour laquelle les angles a, b, c, sont les mêmes que α', β', γ', ce qui rend le coefficient de u égal à l'unité. Dans toute autre direction, l'accroissement de vitesse sera égal au *maximum* u, multiplié par le cosinus de l'angle σ que fait cette direction quelconque avec celle du *maximum*; d'où il résulte qu'il sera nul par rapport à toutes les directions perpendiculaires à celles de sa plus grande valeur.

Quelle que soit la variation de vitesse du mobile, en grandeur et en direction, pendant l'instant dt, il y a donc toujours une certaine direction pour laquelle l'augmentation de vitesse est la plus grande, et qui jouit de cette propriété, que, suivant toutes les directions perpendiculaires à celle-là, la vitesse n'est ni augmentée ni diminuée.

147. La direction d'une force qui agit sur un point matériel en mouvement, est la droite suivant laquelle elle augmente ou diminue la vitesse acquise, et perpendiculairement à laquelle elle n'y produit aucune altération. Ainsi, quand nous disons que la pesanteur d'un corps en mouvement dans un sens quelconque est verticale, comme celle d'un corps en repos, nous entendons par là que cette force augmente la vitesse verticale, et n'altère aucunement la vitesse horizontale.

Cela étant, désignons, au bout du temps t, par U, U', U'', etc., les intensités des différentes forces qui agissent sur le point matériel dont nous considérons le mouvement curviligne; par a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', etc., les angles que font leurs directions données avec des parallèles aux axes des x, y, z; et par X, Y, Z, les sommes de leurs composantes suivant ces axes; nous aurons d'abord (nº 32)

$$\begin{aligned} X &= U \cos a + U' \cos a' + U'' \cos a'' + \text{etc.}, \\ Y &= U \cos b + U' \cos b' + U'' \cos b'' + \text{etc.}, \\ Z &= U \cos c + U' \cos c' + U'' \cos c'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Soient ensuite u, u', u'', etc., les vitesses infiniment petites que ces forces U, U', U'', etc., produiraient, pendant l'instant dt, suivant leurs directions respectives, si chacune d'elles agissait seule sur le mobile animé de la vitesse v. On verra, comme dans le nº 116, que la simultanéité de ces forces n'influera nullement sur les grandeurs et les directions des vitesses qui seront réellement produites; par conséquent, si l'on continue d'appeler p', q', r', les quantités infiniment petites dont les vitesses p, q, r, des projections du mobile sur les axes des x, y, z, s'accroîtront dans l'instant dt, ces quantités seront les sommes des composantes de u, u', u'', etc., suivant ces trois axes; en sorte que nous aurons

$$\begin{aligned} p' &= u \cos a + u' \cos a' + u'' \cos a'' + \text{etc.}, \\ q' &= u \cos b + u' \cos b' + u'' \cos b'' + \text{etc.}, \\ r' &= u \cos c + u' \cos c' + u'' \cos c'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Mais en appliquant à chacune des forces u, u', u'', etc., ce qu'on a trouvé (nº 118) pour la mesure d'une force d'après la vitesse dont elle est capable, on a aussi

$$u = U dt, \quad u' = U' dt, \quad u'' = U'' dt, \quad \text{etc;}$$

en comparant les valeurs de p', q', r', à celles de X, Y, Z, il en résulte donc

$$p' = X dt, \quad q' = Y dt, \quad r' = Z dt;$$

ce qui montre que l'accroissement de la composante de la vitesse du mobile suivant chaque axe, dans l'instant dt, est la vitesse produite, pendant cet instant, par la composante totale suivant ce même axe, des forces données qui agissent sur ce point matériel.

Ce résultat tient à ce que les forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles impriment au mobile dans un même temps infiniment petit, lesquelles vitesses infiniment petites ne changent pas, soit que ces forces agissent isolément, soit que leurs actions aient lieu simultanément. Il s'ensuit aussi que si les forces appliquées au mobile sont, par exemple, au nombre de trois, non comprises dans un même plan; que l'on prenne sur les directions de ces trois forces U, U', U'', à partir de leur point d'application, des droites de grandeurs finies qui soient entre elles comme les vitesses correspondantes u, u', u''; et que l'on achève le parallélépipède dont ces trois droites seront les côtés adjacens, la résultante de ces forces sera dirigée suivant la diagonale, et sa grandeur sera à celle de chacune de ces forces comme la diagonale est au côté correspondant.

148. Si les forces qui agissent sur le mobile sont indépendantes de sa vitesse et de sa position dans l'espace, les mouvemens de ses trois projections sur les axes des coordonnées seront indépendans entre eux; en sorte que sa projection sur chaque axe se trouvera, au bout d'un temps quelconque, au même point, et aura la même vitesse que si les forces et les vitesses étaient nulles parallèlement aux deux autres axes. Il n'en sera plus de même, en général, quand les forces données va-

rieront, en grandeur ou en direction, soit avec la position du mobile, soit avec sa vitesse acquise; mais on pourra toujours déterminer sa vitesse et sa position, à chaque instant, de la manière suivante.

Puisque toutes les forces qui agissent sur le mobile peuvent toujours être réduites à une seule, supposons que U, capable de la vitesse u, soit cette force unique, et désignons par ε l'espace qu'elle fera parcourir au mobile pendant l'instant dt, suivant sa direction, indépendamment de la vitesse v de ce point matériel au bout du temps t. D'après ce qu'on a vu dans le n° 114, nous aurons

$$\varepsilon = 1/2udt.$$

Mais, en vertu de cette vitesse acquise v et de l'action de la force U ou de ses composantes, les espaces parcourus par les projections du mobile sur les axes des x, y, z, pendant l'instant dt, seront

$$pdt + 1/2p'dt, \quad qdt + 1/2q'dt, \quad rdt + 1/2r'dt;$$

donc, à cause de

$$p' = u \cos a, \quad q' = u \cos b, \quad r' = u \cos c,$$

et en ayant égard aux équations (1) et à la valeur de ε, on aura

$$x' - x = \omega \cos \alpha + \varepsilon \cos a,$$
$$y' - y = \omega \cos \beta + \varepsilon \cos b,$$
$$z' - z = \omega \cos \gamma + \varepsilon \cos c;$$

ω étant l'espace vdt qui serait décrit par le mobile dans l'instant dt, en vertu seulement de la vitesse v, et x', y', z', ses trois coordonnées au bout du temps $t + dt$, qui étaient x, y, z, au bout du temps t.

Cela posé, soient toujours M (fig. 37), le point de la trajectoire dont x, y, z, sont les trois coordonnées, et MT la direction de la vitesse v. Soit aussi MA celle de la force U. Prenons sur MA et MT des droites MH et MK, égales à ε et ω, et achevons le parallélogramme MHM'K, dont ces droites sont les deux côtés adjacens. L'extrémité M' de sa diagonale sera, en vertu des équations précédentes, le point dont les coordonnées sont x', y', z', ou la position du mobile au bout du temps $t + dt$.

Appelons v' la vitesse du mobile au point M', laquelle vitesse sera dirigée suivant le prolongement M'T' de la droite MM', et aura pour valeur la composante de v suivant MM', augmentée de la vitesse produite suivant cette direction par l'action de la force U pendant l'instant dt. L'espace ε étant infiniment petit par rapport à ω, il s'ensuit que l'angle TMM' est aussi infiniment petit; la composante de v est donc cette vitesse même, en négligeant les infiniment petits du second ordre. De plus, si l'on désigne par δ l'angle AMM' que fait la direction de la force U avec le côté MM' de la trajectoire, on aura $u \cos \delta$ pour l'augmentation de vitesse qui sera produite par l'action de cette force; il en résultera donc

$$v' = v + u \cos \delta.$$

Je fais $v'\,dt = \omega'$, et je prends sur M'T' une partie M'K' égale à ω'; je désigne par M'A' la direction de la force qui agit sur le mobile quand il est parvenu en M'; sur cette droite, je prends une partie M'H', égale à l'espace que cette force peut faire parcourir au mobile dans un instant dt; j'achève le parallélogramme M'H'M''K'; et l'extrémité M'' de la diagonale sera un troisième point de la trajectoire.

En commençant cette suite de constructions au point de départ du mobile, où l'on doit connaître sa vitesse en grandeur et en direction, il est évident que l'on déterminera successivement tous les points de sa trajectoire plane ou à double courbure, et, en même temps, la vitesse dont il sera animé en chacun de ces points. Si les intervalles de temps, qu'on a supposés infiniment petits et désignés par dt, sont seulement très petits, on obtiendra une suite de points qui seront les sommets d'un polygone, d'autant moins différent de la trajectoire, que ses côtés seront plus petits. En regardant la vitesse comme constante sur chaque côté, et prenant pour sa valeur la demi-somme des vitesses qu'on aura trouvées aux deux extrémités, on pourra calculer le temps employé à parcourir une portion quelconque du polygone; par conséquent, on connaîtra de cette manière la courbe décrite par le mobile, ainsi que sa vitesse et sa position à un instant donné sur cette courbe, à tel degré d'approximation qu'on voudra; mais il vaut mieux faire dépendre les valeurs des coordonnées du mobile en fonctions du temps, d'équations différentielles que l'on intégrera ensuite s'il est possible.

149. Ces équations différentielles du mouvement curviligne sont une suite immédiate du principe établi dans le n° 147.

En effet, les composantes de la vitesse du mobile, parallèles aux axes de ses coordonnées x, y, z, étant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, au bout du temps quelconque t, leurs accroissemens, pendant l'instant dt, seront $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$; et comme chacun d'eux est dû uniquement à la composante suivant l'axe correspondant, de la force qui agit à cet instant sur le mobile, il s'ensuit qu'en appelant toujours X, Y, Z, les composantes de cette force, parallèles aux axes des coordonnées x, y, z, nous aurons

$$d.\frac{dx}{dt} = Xdt, \quad d.\frac{dy}{dt} = Ydt, \quad d.\frac{dz}{dt} = Zdt,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z. \qquad (2)$$

Le problème consistera, dans chaque cas, à intégrer ces trois équations du mouvement; et l'on peut considérer, pour cette intégration, le procédé du n° précédent comme une méthode générale d'approximation. Leurs intégrales contiendront six constantes arbitraires, que l'on déterminera au moyen des trois coordonnées du mobile à l'origine du mouvement, et des trois composantes de la vitesse initiale, c'est-à-dire, au moyen des valeurs des six quantités $x, y, z, \frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, qui seront données pour $t = 0$. Ces intégrales et leurs différentielles premières feront ensuite connaître la position du mobile à un instant quelconque, et sa vitesse en grandeur et en direction. En éliminant entre elles le temps t, on aura les deux équations de la trajectoire. Quand on saura d'avance que cette courbe est plane, on pourra prendre son plan pour celui des x et y, par exemple; ce qui réduira les trois équations précédentes aux deux premières.

150. Au bout du temps t, soient a, b, c, les trois coordonnées d'un second point matériel, à la position duquel on veut comparer celle du premier. Les axes de ces coordonnées étant ceux des x, y, z, je fais

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z';$$

les variables x', y', z', feront connaître à chaque instant la position du premier point par rapport au second; et d'après les équations (2), on aura

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = X - \frac{d^2 a}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = Y - \frac{d^2 b}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} = Z - \frac{d^2 c}{dt^2};$$

pour les déterminer en fonctions du temps.

Quand le mouvement du second point ne sera pas connu, mais que l'on donnera seulement les composantes A, B, C, parallèles aux axes des coordonnées, de la force qui le sollicite, on aura

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = A, \quad \frac{d^2 b}{dt^2} = B, \quad \frac{d^2 c}{dt^2} = C,$$

et il en résultera

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = X - A, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = Y - B, \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} = Z - C,$$

pour les équations du mouvement relatif du premier point.

Si la force dont A, B, C, sont les composantes agit à la fois sur les deux mobiles, ces composantes entreront aussi dans les valeurs de X, Y, Z, et disparaîtront de ces dernières équations. C'est ce qui arrivera, par exemple, à l'égard des corps qui se meuvent à la surface de la terre, et dont on rapporte les positions à des points déterminés de cette surface : les forces relatives à ces points et provenant du mouvement diurne de la terre, n'entrent pas dans les équations des divers mouvemens que l'on considère à sa superficie; et l'on en fait complètement abstraction, en formant ces équations.

Toutefois, cela ne veut pas dire que les mouvemens que nous observons soient tous indépendans de la vitesse de rotation de la terre. Elle influe pour une petite partie sur l'intensité de la pesanteur, et, conséquemment, sur les mouvemens verticaux. De plus, quand un corps tombe d'une hauteur considérable, la vitesse de rotation dont il est animé à son point de départ est un peu plus grande que celle qui a lieu au pied de la verticale menée par ce point; d'où il est aisé de conclure que le mobile doit s'écarter un peu de cette droite, et venir rencontrer la terre à une petite distance de son extrémité inférieure. Cette déviation, qui a été effectivement observée, rend sensible, par une expérience directe, le mouvement de la terre autour de son axe.

Les mouvemens indépendans de cette rotation sont ceux que produit le choc des corps, et aussi ceux qui sont dus à l'action musculaire des hommes et des animaux.

151. Les équations (2) sont celles du mouvement d'un point matériel entièrement libre; mais il est facile de les étendre à un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface donnée. Il suffira pour cela, comme dans le cas de l'équilibre (n° 36), de joindre aux forces données qui agissent sur le mobile, une force de grandeur inconnue, qui représentera la résistance de la surface. Cette force sera normale à la surface donnée; je la représenterai par N, et par λ, μ, ν, les angles qu'elle fait avec les prolongemens des coordonnées x, y, z, du mobile; les équations du mouvement seront alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + N \cos \lambda, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + N \cos \mu, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + N \cos \nu, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

En représentant par $L = 0$ l'équation de la surface donnée, et faisant, pour abréger,

$$V = \pm \left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2}\right)^{-1/2},$$

on aura (n° 21), en même temps,

$$\cos \lambda = V \frac{dL}{dx}, \quad \cos \mu = V \frac{dL}{dy}, \quad \cos \nu = V \frac{dL}{dz}.$$

Après avoir substitué ces valeurs dans les équations (3), on éliminera entre elles le produit NV;

les deux équations qui en résulteront, jointes à $L=0$, serviront à déterminer x, y, z, en fonctions de t. On tirera ensuite de l'une des équations (3), ou d'une combinaison quelconque de ces équations, la valeur de NV; et comme N doit toujours être une quantité positive, le signe de cette valeur fera connaître celui de V; au moyen de quoi la force normale N et le sens dans lequel elle agit, seront complètement déterminés.

Si le mobile est assujetti à se mouvoir sur deux surfaces données, ou sur leur courbe d'intersection, on le considérera encore comme entièrement libre, après avoir joint aux forces données deux forces inconnues N et N', normales à ces surfaces; et en désignant par λ, μ, ν, les angles qui détermineront les directions de la première par rapport aux axes des x, y, z, et par λ', μ' ν', les angles qui répondront à la seconde, il en résultera

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos\lambda + N'\cos\lambda',\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos\mu + N'\cos\mu',\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos\nu + N'\cos\nu',\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

pour les équations du mouvement. Si $L=0$ est l'équation de la surface dont N est la résistance, et qu'on représente par $L'=0$ celle de la surface à laquelle N' correspond, les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, seront les mêmes que précédemment, et celles de $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, s'en déduiront par le changement de V et L en V' et L'. Après avoir substitué les unes et les autres dans les équations (4), on éliminera les produits NV et N'V'. L'équation qui en résultera, et les équations données $L=0$ et $L'=0$, serviront à déterminer les valeurs de x, y, z, en fonctions de t. Cela fait, on tirera de deux des équations (4), les valeurs de NV et N'V', dont les signes seront ceux de V et V'; et, de cette manière, on connaîtra les forces normales N et N', et le sens dans lequel elles agissent : leur résultante sera, en grandeur et en direction, la résistance de la courbe sur laquelle le mobile est astreint à se mouvoir.

152. Pour donner une forme plus simple aux équations (4), soient m la masse du mobile et mP la pression qu'il exercera, dans son état de mouvement, sur la courbe qu'il est forcé de décrire. Désignons par α, α', α'', les angles que fait la direction de cette force avec les prolongemens, dans le sens positif, des coordonnées x, y, z, de ce point; la résistance que la courbe oppose au mouvement du mobile, considérée comme une force accélératrice, sera égale et contraire à P; en la joignant aux forces données X, Y, Z, qui agissent sur le mobile, nous aurons, au lieu des équations (4),

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X - P\cos\alpha,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - P\cos\alpha',\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z - P\cos\alpha''.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

La direction de la force P n'est pas connue *à priori* : on sait seulement qu'elle est normale à la courbe donnée; d'où il résulte que le cosinus de l'angle compris entre cette direction et la tangente à la trajectoire doit être égal à zéro; ce qui donne

$$\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\alpha' + \frac{dz}{ds}\cos\alpha'' = 0.\quad(6)$$

Les angles α, α', α'', seront, en outre, liés entre eux par l'équation ordinaire

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1.$$

On éliminera P, α, α', α'', entre ces équations, en ajoutant les équations (5), après les avoir multipliées par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; en ayant égard à l'équation (6), et en faisant, pour abréger,

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \varphi,$$

on a alors

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds\,dt^2} = \varphi.$$

En différentiant l'équation identique

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2},$$

et divisant par $2ds$, on voit que le premier membre de l'équation précédente est la même chose que $\frac{d^2s}{dt^2}$; on aura donc simplement

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi.\quad(7)$$

La force φ est la somme des composantes des forces données, suivant la tangente à la trajectoire, lesquelles composantes seront regardées comme positives ou comme négatives, selon qu'elles tendront à augmenter ou à diminuer l'arc s décrit par le mobile. L'équation (7) signifie donc que dans le mouvement curviligne, comme dans le mouvement rectiligne, la force qui agit sur le mobile dans le sens de son mouvement est égale au second coefficient différentiel de l'espace parcouru : à cause de $v = \frac{ds}{dt}$, on peut aussi dire qu'elle est égale au

premier coéfficient différentiel de la vitesse acquise v.

Cette équation étant indépendante de la résistance de la courbe, convient aussi au mouvement d'un point matériel entièrement libre et à celui d'un point matériel assujetti à demeurer sur une surface courbe; mais c'est principalement dans le cas d'un point matériel qui se meut sur une courbe donnée, que cette équation pourra être utile. On tirera des équations de cette courbe les valeurs de x, y, z, en fonctions de s; et après les avoir substituées dans l'équation (7), il ne restera plus qu'à intégrer cette équation du second ordre entre s et t. Les deux constantes arbitraires que renfermera son intégrale se détermineront au moyen des valeurs de s et $\frac{ds}{dt}$ qui répondent à $t=0$, c'est-à-dire, au moyen de la position et de la vitesse initiales du mobile. Quand les trois coordonnées x, y, z, auront été déterminées en fonctions de t, d'après l'intégrale de l'équation (7), jointe aux deux équations données de la trajectoire, les équations (5) feront connaître, à un instant quelconque, les trois composantes de la pression P qu'éprouvera la courbe sur laquelle le mobile est obligé de se mouvoir. On trouvera, dans le chapitre suivant, une détermination plus simple de cette force en grandeur et en direction.

§ II. *Conséquences principales des formules précédentes.*

153. Lorsque le mobile est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, on obtient immédiatement trois intégrales premières des équations (2).

Pour cela, plaçons l'origine des coordonnées x, y, z, en ce point; représentons, en grandeur et en direction, la force qui sollicite le mobile, par son rayon vecteur; et construisons le parallélépipède dont ce rayon est la diagonale, et qui a ses trois côtés adjacens sur les axes des x, y, z. Les trois coordonnées x, y, z, du mobile seront les grandeurs de ces trois côtés, et représenteront les trois composantes de la force donnée; en sorte que l'on aura

$$X : Y : Z :: x : y : z;$$

d'où l'on tire

$$Xy = Yx, \quad Zx = Xz, \quad Yz = Zy.$$

D'un autre côté, les équations (2) peuvent être remplacées par celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} yd^2z - zd^2y &= (Xy - Yx)\,dt^2, \\ zd^2x - xd^2z &= (Zx - Xz)\,dt^2, \\ xd^2y - yd^2x &= (Yz - Zy)\,dt^2. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Or, leurs seconds membres sont nuls en vertu des équations précédentes; et comme leurs premiers membres sont les différentielles de $ydx - xdy$, $zdz - zdx$, $zdy - ydz$, on aura, en intégrant,

$$\left.\begin{aligned} ydx - xdy &= cdt, \\ zdz - zdx &= c'dt, \\ zdy - ydz &= c''dt; \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

c, c', c'', étant des constantes arbitraires.

154. Pour énoncer le théorème contenu dans ces intégrales premières des équations du mouvement, considérons la projection AMB (fig. 38) de la trajectoire du mobile sur le plan des coordonnées x et y, dont les axes sont Ox et Oy. Au bout du temps t, soient M la projection du mobile, OP et MP son abscisse x et son ordonnée y; et C étant le point où cette courbe coupe l'axe Oy, appelons u le secteur COM, p l'aire COPM, q le triangle OPM; nous aurons

$$u = p - q, \qquad q = 1/2xy.$$

Si M' est la projection du mobile au bout du temps $t + dt$, MOM' sera l'aire décrite par le rayon vecteur de cette projection pendant l'instant dt; ce sera aussi la différentielle de u ou de $p - q$; et à cause de

$$dp = ydx, \qquad dq = 1/2xdy + 1/2ydx,$$

on aura

$$du = 1/2\,(ydx - xdy);$$

par conséquent, la première équation (b) signifie que l'aire décrite pendant chaque instant dt par le rayon vecteur de la projection M du mobile est constante et égale à $1/2\,cdt$; donc aussi l'aire décrite pendant un temps t quelconque, est proportionnelle à cette variable et égale à $1/2\,ct$. Les aires décrites dans ce même temps par les rayons vecteurs des projections du mobile sur les plans des x et z, et des y et z, seront de même égales à $1/2\,c't$ et $1/2\,c''t$.

Concluons donc que quand un point matériel est soumis à une force constamment dirigée vers un centre fixe, les aires décrites autour de ce point par le rayon vecteur de sa projection sur un plan quelconque passant par ce même point, sont proportionnelles au temps employé à les décrire.

Réciproquement, lorsque cette propriété a lieu par rapport à trois plans rectangulaires menés par le centre des aires, on en peut conclure que la force ou la résultante des forces qui sollicitent le mobile est constamment dirigée vers ce centre fixe.

En effet, si les équations (b) sont données, on aura, en les différentiant,

$$yd^2x - xd^2y = 0, \quad zd^2z - zd^2x = 0, \quad zd^2y - yd^2z = 0;$$

en vertu des équations (a), qui sont celles d'un mouvement quelconque, on aura donc aussi

$$Xy = Yx, \quad Zx = Xz, \quad Yz = Zy;$$

par conséquent, les forces X, Y, Z, seront entre elles comme les coordonnées x, y, z, du mobile;

ce qui suffit pour que leur résultante soit constamment dirigée vers l'origine des coordonnées. Au reste, cette force peut être attractive ou répulsive, c'est-à-dire qu'elle peut agir suivant le rayon vecteur du mobile, ou suivant son prolongement.

155. Lorsqu'un point matériel est soumis à une force dirigée vers un centre fixe, il est évident que sa trajectoire est une courbe plane, puisqu'il n'y aurait aucune raison pour qu'il sortît, plutôt d'un côté que de l'autre, du plan passant par la direction de sa vitesse initiale et par le centre fixe. C'est aussi ce que l'on déduit des équations (*b*); car en les ajoutant, après les avoir multipliées par z, y, x, et divisée par dt, il vient

$$cz + c'y + c''x = 0.$$

On peut prendre ce plan pour celui des x et y; l'aire décrite par le rayon vecteur même du mobile, dans le plan de sa trajectoire, sera donc proportionnelle au temps; et, de plus, le théorème précédent se réduira à cette proportionnalité. En effet, si elle a lieu pour l'aire décrite sur le plan de la trajectoire, elle aura lieu également pour l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection du mobile sur tout autre plan; car cette autre aire n'est autre chose que la projection de la première sur ce plan; et nous savons (n° 10) que la projection d'une aire plane a un rapport constant avec l'aire projetée.

156. L'aire infiniment petite MOM' peut aussi s'exprimer en coordonnées polaires. Pour cela, désignons par r le rayon vecteur OM, et par θ l'angle MOx qu'il fait avec l'axe des x. Décrivons du point O, comme centre, l'arc de cercle MN qui coupe au point N le rayon vecteur OM', correspondant à l'angle $\theta - d\theta$, et qui aura pour longueur $rd\theta$. Le secteur circulaire MON sera égal à $1/2\, r^2\, d\theta$, et pourra être pris pour l'aire MOM', en négligeant l'aire MNM', infiniment petite du second ordre. On devra donc avoir

$$ydx - xdy = r^2\, d\theta;$$

équation que l'on vérifie effectivement au moyen des valeurs

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

et de leurs différentielles, qui sont

$$dx = \cos\theta\, dr + r\sin\theta\, d\theta,\ dy = \sin\theta\, dr - r\cos\theta\, d\theta,$$

à cause que celle de l'angle θ est ici $-d\theta$. De cette manière, la première équation (*b*) prendra la forme

$$r^2\, d\theta = cdt,$$

sous laquelle on l'emploie ordinairement.

On exprime de même en coordonnées polaires l'élément de la courbe. En désignant l'arc CM par σ et cet élément par $d\sigma$, on aura à la fois

$$MM' = d\sigma, \quad MN = rd\theta, \quad NM' = dr;$$

en considérant MNM' comme un triangle rectiligne rectangle en N, on en conclura donc

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2;$$

ce qu'on peut aussi déduire de la formule

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2,$$

au moyen des valeurs précédentes de dx et dy.

A cette occasion, nous ferons remarquer que, dans une trajectoire plane, les composantes de la vitesse du mobile suivant le prolongement MO' de son rayon vecteur MO, et suivant la perpendiculaire à ce rayon, sont exprimées par

$$\frac{dr}{dt}, \quad \frac{rd\theta}{dt};$$

car l'angle O'MT que fait ce prolongement avec la tangente MT est complément de l'angle M du triangle M'MN; d'après ce triangle, on a donc

$$\cos O'MT = \frac{dr}{d\sigma}, \quad \sin O'MT = \frac{rd\theta}{d\sigma};$$

et en multipliant ce cosinus et ce sinus par la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$, dirigée suivant MT, on aura les composantes dont il s'agit. Il est souvent utile d'en faire usage. Elles diffèrent des composantes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ de la même vitesse en ce que les directions de celles-ci sont fixes, et que celles des précédentes varient avec la position du mobile.

La vitesse $\frac{d\theta}{dt}$, avec laquelle le rayon vecteur OM décrit l'angle COM compté à partir d'une droite fixe, est ce qu'on appelle la vitesse *angulaire* du mobile. Elle se déduit, comme on voit, de sa vitesse $\frac{rd\theta}{dt}$, perpendiculaire à OM, en la divisant par la longueur de ce rayon.

157. Revenons maintenant aux équations différentielles du mouvement.

Ajoutons les équations (5) du n° 152, après les avoir multipliées par dx, dy, dz; en ayant égard à l'équation (6) du même numéro, et observant que

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = \frac{1}{2}d.\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}d.v^2,$$

il en résultera

$$1/2d.v^2 = Xdx + Ydy + Zdz. \qquad (c)$$

Supposons que les expressions des forces données X, Y, Z, ne renferment explicitement ni le temps t, ni la vitesse v, et qu'en considérant x, y, z, comme des variables indépendantes, cette formule (*c*) soit une différentielle exacte; faisons, en conséquence,

$$Xdx + Ydy + Zdz = d.F(x, y, z);$$

F indiquant une fonction donnée : en intégrant l'équation (c) et désignant par C la constante arbitraire, nous aurons

$$v^2 = 2F(x, y, z) + C.$$

Pour éliminer cette constante, soient a, b, c, k, les valeurs initiales de x, y, z, v; on aura

$$k^2 = 2F(a, b, c) + C,$$

et, en retranchant cette équation de la précédente,

$$v^2 = k^2 + 2F(x, y, z) - 2F(a, b, c). \quad (d)$$

Ce résultat étant indépendant de la résistance N de la courbe, égale et contraire à la force P qui entrait dans les équations dont on l'a déduit, il s'ensuit qu'il a également lieu dans le mouvement d'un point matériel entièrement libre, et dans le mouvement sur une surface ou sur une courbe donnée.

La conséquence immédiate de cette équation (d), c'est que la vitesse est constante et le mouvement uniforme toutes les fois que le mobile n'est sollicité par aucune force donnée; car alors la fonction F est nulle, et l'on a $v = k$, soit que le mouvement ait lieu sur une surface ou sur une courbe donnée, ou que le mobile soit entièrement libre.

Cette équation nous montre, de plus, que dans la supposition qu'on a faite sur la nature des forces X, Y, Z, l'accroissement du carré de la vitesse du mobile, en passant d'une position à une autre, est toujours le même, quelle que soit la courbe qu'il a décrite, et ne dépend que des coordonnées a, b, c, x, y, z, des deux points extrêmes. Lorsque cette courbe sera donnée, ou seulement lorsque le mobile sera assujetti à se mouvoir sur une surface donnée, on prendra pour k la vitesse du mobile tangente à cette courbe ou à cette surface. Si la percussion exercée sur le mobile à l'origine de son mouvement n'a pas cette direction, elle se décomposera en deux autres forces, l'une normale et l'autre tangentielle; la première sera détruite par la résistance de la courbe ou de la surface donnée; et c'est la seconde qui produira la vitesse k, et qui en déterminera le sens de la direction.

Si l'on désigne par C une constante arbitraire, l'équation

$$F(x, y, z) = C,$$

sera celle d'une surface qui sera atteinte avec des vitesses égales par tous les mobiles soumis aux mêmes forces, partis du point dont a, b, c, sont les coordonnées, suivant différentes directions et avec une même vitesse k. Lorsque, par exemple, ces mobiles ne sont sollicités que par la pesanteur, cette équation est celle d'un plan horizontal.

Dans le cas d'une courbe donnée, on déduira de ses équations les valeurs de x, y, z, en fonctions de l'arc s; en les substituant, dans l'équation (d), et y mettant $\frac{ds}{dt}$ à la place de v, on en tirera

$$dt = S\,ds,$$

où S est une fonction donnée de s; par conséquent dans ce cas, la détermination du temps en fonction de l'espace parcouru se trouvera réduite à l'intégration d'une différentielle donnée. Mais la supposition sur laquelle est fondée l'équation (d), et, conséquemment, cette équation, n'auront pas lieu quand le mobile éprouvera la résistance d'un milieu, qui est une force dépendante de la vitesse; il en sera de même lorsqu'il s'agira du mouvement d'un point matériel attiré ou repoussé par d'autres points qui seront eux-mêmes en mouvement; circonstance qui introduira le temps t explicitement dans les valeurs de X, Y, Z. Dans ces deux cas, si la trajectoire est une courbe donnée, on fera usage de l'équation (c), dans laquelle on mettra $\frac{ds}{dt}$ au lieu de v, et qui se changera dans l'équation (7) du n° 152.

158. La formule $Xdx + Ydy + Zdz$ sera une différentielle exacte, comme on vient de le supposer, toutes les fois que le mobile sera attiré ou repoussé par des centres fixes, et que les intensités de ces forces seront exprimées par des fonctions de la distance aux centres dont elles émanent.

En effet, soient e, f, g, les trois coordonnées d'un des centres fixes, rapportées aux mêmes axes que x, y, z. Désignons par r la distance du mobile à ce point; on aura

$$r^2 = (e - x)^2 + (f - y)^2 + (g - z)^2;$$

et les cosinus des angles que cette droite r fait avec des axes menés par le mobile, suivant les directions des x, y, z, positives, seront les rapports de $e - x$, $f - y$, $g - z$, à r. Si donc on représente par R la force attractive, dirigée du mobile vers ce centre fixe, ses trois composantes auront pour expressions

$$\frac{R(e - x)}{r}, \quad \frac{R(f - y)}{r}, \quad \frac{R(g - z)}{r};$$

et conséquemment, la partie de $Xdx + Ydy + Zdz$ qui proviendra de R, sera

$$\frac{R}{r}[(e - x)dx + (f - g)dy + (g - z)dz].$$

Mais en différentiant la valeur de r^2, on a

$$rdr = -(e - x)dx - (f - y)dy - (g - z)dz;$$

ce qui réduit à $-Rdr$ la quantité précédente. Si la force qui émane du centre fixe était répulsive, il suffirait de changer le signe de cette quantité,

qui deviendrait Rdr, en considérant, dans tous les cas, R comme une quantité positive.

On conclut de là que si le mobile est sollicité par un nombre quelconque de forces R, R', R'', etc., qui émanent de centres fixes, dont les distances à ce point matériel sont r, r', r'', etc., on aura

$$Xdx + Ydy + Zdz = \mp Rdr \mp R'dr' \mp R''dr'' \mp \text{etc.};$$

les signes supérieurs ayant lieu dans le cas des attractions, et les signes inférieurs dans le cas des répulsions. Or, en supposant que chacune de ces forces soit une fonction donnée de la distance correspondante, tous les termes de cette valeur de $Xdx + Ydy + Zdz$ seront des différentielles dépendantes d'une seule variable, et, par conséquent, cette formule sera une différentielle exacte; ce qu'il s'agissait de prouver.

On voit aussi par là, et d'après l'équation (d), que l'accroissement du carré de la vitesse provenant de chacune des forces R, R', R'', etc., sera le même que si elle existait seule : à l'égard de la force R, par exemple, cet accroissement sera exprimé par $\mp 2\int Rdr$, en prenant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse pour la valeur initiale de r.

159. Dans le cas d'un point matériel pesant qui se meut, sur une courbe donnée, dans le vide et sans frottement sur cette courbe, l'équation (d) se réduira à

$$v^2 = k^2 + 2g\,(z - c),$$

en désignant par g la gravité, et prenant l'axe des z positives vertical et dans le sens de cette force, de sorte qu'on ait

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = g.$$

Soient ADBC (fig. 39) la courbe donnée, B son point le plus bas, A son point le plus élevé, qui peut n'être pas dans la même verticale que B, et D le point de départ du mobile. Plaçons en ce dernier point l'origine des z, et supposons que la vitesse initiale k soit due à une hauteur h; nous aurons

$$c = 0, \qquad k^2 = 2gh,$$

et, par conséquent,

$$v^2 = 2g\,(h + z).$$

Il en résultera que quand le mobile arrivera au point B, la vitesse *maxima* sera la même que s'il fût tombé de la hauteur h, augmentée de celle du point D au-dessus du plan horizontal mené par le point B. En vertu de cette vitesse acquise, le mobile s'élèvera le long de BCA; sa vitesse diminuera continuellement; et si l'on a $h = 0$, elle sera nulle au point C situé dans le même plan horizontal que D. Parvenu au point C, le mobile redescendra le long de CB; et il oscillera ainsi indéfiniment de D vers C, et de C vers D. Lorsque la constante h ne sera pas nulle, le mobile s'élèvera au-dessus du point C. Si l'élévation du point A au-dessus du plan horizontal qui comprend D et C, est moindre que h, le mobile n'atteindra pas le point A; il s'arrêtera en un certain point C'; et si l'on mène par C' un plan horizontal qui coupe la courbe en un autre point D', le mobile oscillera indéfiniment de C' vers D', et de D' vers C'. Les oscillations seront toutes *isochrones* ou d'égale durée. Cela est évident à l'égard de celles qui auront lieu dans le même sens; et l'on voit aussi que la durée de chaque oscillation de C' vers D' sera la même que celle d'une oscillation de D' vers C', en observant qu'un élément quelconque de la courbe sera parcouru avec la même vitesse dans les deux cas. Cette durée commune de toutes les oscillations entières dépendra de la forme de la courbe et de la grandeur de h.

Lorsque l'élévation de A au-dessus du plan horizontal passant par le point de départ sera égale à h, le mobile approchera indéfiniment du point A, mais ne l'atteindra qu'après un temps infini. Quand cette élévation sera plus grande que h, le mobile dépassera le point A, et parcourra la circonférence entière de la courbe donnée. Revenu au point D, sa vitesse sera la même qu'à l'origine du mouvement; d'où l'on conclut qu'il fera une suite indéfinie de révolutions, qui auront toutes une égale durée, dépendante de la forme de la courbe et de la grandeur de h.

Si la courbe donnée est d'abord comprise dans un plan vertical, tangent à un cylindre à base quelconque, et qu'on enveloppe ce plan sur le cylindre, de sorte que la courbe donnée devienne une ligne à double courbure, le mouvement oscillatoire ou révolutif du mobile ne changera nullement, en supposant, toutefois, que son point de départ et sa vitsse initiale restent les mêmes; car alors la valeur de t en fonctions de s, déterminée comme il a été dit précédemment (n° 157), ne dépendra que de celle de s en fonction de s, qui ne changera pas, quelle que soit la base du cylindre vertical sur lequel la courbe donnée sera tracée.

160. Dans tous les cas où l'équation (d) a lieu, et où le mobile n'est pas astreint à se mouvoir sur une courbe donnée, celle qu'il décrit pour aller d'un point donné que j'appellerai A, à un autre point donné que je nommerai B, jouit d'une propriété remarquable. Si le mobile est entièrement libre, l'intégrale $\int vds$, prise depuis le point A jusqu'au point B, est plus petite que suivant toute autre courbe aboutissant à ces deux points; s'il est assujetti à se mouvoir sur une surface donnée, cette propriété de la trajectoire n'a plus lieu que relativement à toutes les courbes tracées sur cette surface, et qui aboutissent toujours aux points A et B. Dans ces deux cas, ds est l'élément différentiel d'une courbe quelconque, qui répond aux coordonnées x, y, z, et v une fonction de ces trois variables et d'une constante k, donnée par l'équation (d).

La démonstration de ce théorème revient à prouver qu'en vertu des équations du mouvement, la variation de $\int v ds$ est nulle, en supposant fixes les limites de cette intégrale : alors elle sera un *minimum* ou un *maximum*; et ce sera toujours le *minimum* qui aura lieu quand le mobile sera entièrement libre; car il est évident que l'intégrale $\int v ds$ pourra croître indéfiniment avec la longueur de la trajectoire, et ne sera pas susceptible de *maximum*.

Or, par les règles les plus simples du calcul des variations, on a

$$\delta.\int v ds = \int \delta.v ds, \quad \delta.v ds = \delta v ds + v \delta ds.$$

D'ailleurs dt étant l'élément du temps, on a $ds = v dt$; donc

$$\delta v ds = 1/2\, dt \delta.v^2.$$

Si l'on différentie l'équation (d) et que l'on remplace les différentielles dx, dy, dz, par les variations δx, δy, δz, on aura

$$1/2\, \delta.v^2 = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

En ayant égard aux valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, et observant que

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z = \delta L,$$

les équations (3) du n° 151 donnent

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - NV\delta L.$$

Le terme $NV\delta L$ n'entrerait pas dans cette équation, si le mobile était entièrement libre; quand il est assujetti à se mouvoir sur la surface dont l'équation est $L = 0$, ce terme est nul; car toutes les courbes que l'on compare à la trajectoire du mobile devant aussi être tracées sur cette surface, on a $\delta L = 0$; donc on doit supprimer ce terme dans tous les cas; et il en résulte

$$\delta v ds = \frac{1}{2} dt \delta.v^2 = \frac{d^2x}{dt}\delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}\delta z.$$

Quant au second terme $v\delta ds$ de la variation de vds, nous avons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et, par conséquent,

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz;$$

donc, à cause de $ds = v dt$, et en intervertissant, dans le second membre, l'ordre des caractéristiques d et δ, nous aurons

$$v\delta ds = \frac{dx}{dt}d\delta x + \frac{dy}{dt}d\delta y + \frac{dz}{dt}d\delta z.$$

En réunissant ces deux parties de la valeur de $\delta.vds$, il vient

$$\delta.vds = d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right);$$

d'où l'on conclut

$$\int \delta.vds = \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z + \text{constante},$$

pour l'intégrale indéfinie de $\delta.vds$. Mais les deux points extrêmes A et B étant supposés fixes, les variations δx, δy, δz, qui s'y rapportent, devront être nulles; par conséquent, l'intégrale définie $\int \delta.vds$, prise depuis le point A jusqu'au point B, laquelle est égale à la variation $\delta.\int vds$, se réduira à zéro; ce qu'il s'agissait de démontrer.

161. Quand le mobile, assujetti à se mouvoir sur une surface courbe, n'est sollicité par aucune force donnée, sa vitesse est constante (n° 157); l'intégrale $\int vds$ est donc le produit vs. Par conséquent l'arc s décrit par le mobile est, en général, la ligne la plus courte du point A au point B; et il suit de l'uniformité du mouvement, que, dans ce cas, le mobile va d'un point à l'autre, dans un temps plus court que s'il était forcé de décrire sur la surface donnée toute autre courbe que sa trajectoire. Toutefois, si cette surface est fermée de toute part, comme une sphère, par exemple, les points A et B seront les extrémités de deux arcs de grand cercle, dont l'un sera moindre et l'autre plus grand que tous les arcs de petits cercles aboutissant aux mêmes points; et le mobile pourra décrire l'une ou l'autre de ces deux portions d'un même grand cercle, selon le sens de sa vitesse initiale k tangente à la sphère.

On peut présenter l'équation différentielle de la trajectoire sous une forme qui mette en évidence la propriété de la ligne la plus courte sur une surface quelconque, laquelle consiste en ce que son plan osculateur en chaque point est normal à cette surface.

Les forces X, Y, Z, étant supposées nulles, les équations (3) du n° 151 se réduisent à

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = N\cos\nu.$$

A cause que v est une constante, et que $vt = s$, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v^2\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = v^2\frac{d^2z}{ds^2},$$

en prenant l'arc s pour la variable indépendante;

et cela étant, on pourra remplacer les équations précédentes par celles-ci :

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3} = \frac{N}{\varphi^2}\left(\frac{dz}{ds}\cos\mu - \frac{dy}{ds}\cos\lambda\right),$$

$$\frac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3} = \frac{N}{\varphi^2}\left(\frac{dx}{ds}\cos\lambda - \frac{dz}{ds}\cos\nu\right),$$

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3} = \frac{N}{\varphi^2}\left(\frac{dy}{dx}\cos\nu - \frac{dx}{ds}\cos\mu\right),$$

qui s'en déduisent aisément. Je les ajoute après les avoir multipliées par $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$; la quantité N disparaît, et l'on a simplement

$$\left.\begin{aligned}\frac{dxd^2y-dyd^2x}{ds^3}\cos\nu + \frac{dzd^2x-dxd^2z}{ds^3}\cos\mu \\ + \frac{dyd^2z-dzd^2y}{ds^3}\cos\lambda = 0.\end{aligned}\right\}(e)$$

D'après les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, citées dans le n° 151, on aura donc

$$\left.\begin{aligned}\frac{dxd^2y-dyd^2x}{ds^3}\frac{dL}{dz} + \frac{dzd^2x-dxd^2z}{ds^3}\frac{dL}{dy} \\ + \frac{dyd^2z-dzd^2y}{ds^3}\frac{dL}{dx} = 0.\end{aligned}\right\}(f)$$

pour l'équation différentielle seconde de la trajectoire. On y substituera la valeur de l'une des trois coordonnées x, y, z, en fonction des deux autres, tirée de l'équation $L = 0$ de la surface donnée, sur laquelle cette courbe doit être tracée; on intégrera ensuite l'équation à deux variables qui en résultera; puis on déterminera les deux constantes arbitraires que l'intégrale renfermera, en assujettissant la courbe à passer par les deux points A et B de la surface donnée. L'équation qu'on obtiendra de cette manière, et qui sera, comme on voit, indépendante de la grandeur et de la direction de la vitesse initiale k, devra être celle de la ligne la plus courte entre ces deux points.

Or, si l'on appelle α, β, γ, les angles que la normale au plan osculateur d'une courbe quelconque, au point dont les coordonnées sont x, y, z, fait avec leurs prolongemens dans le sens positif, et qu'on fasse, pour abréger,

$$[(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2]^{1/2} = k,$$

on trouvera

$$\cos\alpha = \frac{1}{k}(dyd^2z - dzd^2y),$$

$$\cos\beta = \frac{1}{k}(dzd^2x - dxd^2z),$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{k}(dxd^2y - dyd^2x),$$

d'après les formules (3) du n° 19, où ces mêmes angles sont représentés par λ, μ, ν. En vertu de l'équation (e), on aura donc

$$\cos\lambda\cos\alpha + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0;$$

ce qui montre que la normale au plan osculateur de la trajectoire, et la normale à la surface donnée, sont perpendiculaires l'une à l'autre; d'où l'on conclut que l'équation (f), qui appartient à la ligne la plus courte, est aussi celle de la courbe qui a partout son plan osculateur normal à la surface donnée; en sorte que ces deux lignes sont une seule et même courbe tracée sur cette surface, quand on les assujettit l'une et l'autre à passer par les mêmes points extrêmes A et B.

Il suit de là que, quand ces deux points appartiennent à une des lignes de courbure de la surface donnée, cette ligne est la plus courte d'un point à l'autre; car son plan osculateur en un point quelconque renferme deux normales consécutives à la surface donnée, et est, par conséquent, normal à cette surface.

§ III. *Digression sur le mouvement de la lumière.*

162. Le théorème du n° 160 est connu sous la dénomination de *principe de la moindre action*, qui lui vient du point de vue métaphysique sous lequel on l'a d'abord envisagé, et qu'on a depuis justement abandonné. Mais il peut encore être utile de donner ici une des premières applications qu'on a faites de ce principe, celle qui est relative à la réflexion et à la réfraction de la lumière dans le système de l'émission.

Tant qu'un rayon lumineux se meut dans un milieu d'une égale densité, sa vitesse et sa direction, restent les mêmes; mais quand il passe d'un milieu dans un autre, sa direction s'infléchit et sa vitesse change. Dans l'instant du passage, la lumière décrit une courbe d'une étendue inappréciable, dont on peut faire abstraction sans erreur sensible. La trajectoire de chaque particule lumineuse est donc alors l'assemblage de deux droites, dont chacune est décrite d'un mouvement uniforme. Ainsi, en appelant y et y' les longueurs de ces droites, n la vitesse de la lumière dans le premier milieu, n' sa vitesse dans le second, on aura ny pour la valeur de l'intégrale $\int vds$, prise depuis le point de départ de la particule jusqu'à son entrée dans le second milieu, et $n'y'$ pour la partie de cette intégrale relative au second milieu; par conséquent cette intégrale, prise dans toute l'étendue de la trajectoire, sera exprimée par $ny + n'y'$; et c'est cette somme qui doit être un *minimum*, d'après le principe de la moindre action.

Avant d'aller plus loin, observons que, si le se-

cond milieu est une substance diaphane et cristallisée, la vitesse de la lumière, dans cette substance dépendra, en général, de la direction du rayon lumineux ; en sorte qu'elle sera constante pour un même rayon, mais variable d'un rayon à un autre. Le phénomène de la *double réfraction* que présentent le *spath d'Islande* et la plupart des cristaux transparens, tient à la différence de vitesse des différens rayons lumineux qui les traversent. On doit alors regarder la vitesse n' comme une fonction des angles qui déterminent la direction de chaque rayon ; et la loi de la réfraction dépend de la forme que l'on suppose à cette fonction. En faisant une hypothèse convenable sur cette forme, Laplace est parvenu à déduire du principe de la moindre action *, la loi de la double réfraction, découverte par Huygens et confirmée par Malus ; mais ce n'est point ici le lieu d'exposer cette théorie : nous nous bornerons à considérer le cas où tous les rayons se meuvent avec la même vitesse, quelles que soient leurs directions. Dans le calcul suivant, les vitesses n et n' seront donc regardées comme des quantités données pour chaque milieu en particulier, et indépendantes de la direction des rayons lumineux.

163. Soient maintenant A et B (fig. 40) les deux points extrêmes de la trajectoire. Supposons que la surface de séparation des deux milieux soit plane et menons par ces deux points un plan qui la coupe suivant la droite CD. Soit encore AEB une ligne brisée au point E, qui représente la projection de la trajectoire sur ce plan. Menons par les points A, B, E, les perpendiculaires AF, BG, HEK, à la droite CD. Puisque la position des points A et B est donnée, les trois droites AF, BG, FG, sont connues ; mais la position du point E, et les angles AEH et BEK sont inconnus, et doivent être déterminés par la condition du *minimum*. Nous supposerons donc

$$AF = a,\ BG = b,\ FG = c,\ AEH = x,\ BEK = x';$$

les triangles rectangles AFE et BGE donneront

$$EF = a \tang x,\quad EG = b \tang x';$$

par conséquent, on aura

$$a \tang x + b \tang x' = c. \qquad (a)$$

Le rayon lumineux traverse la surface de séparation des deux milieux en un point dont E est la projection sur le plan de la figure. Si nous appelons z la distance de ce point inconnu au point E, y sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont z et AE seront les deux petits côtés, et y' l'hypoténuse d'un autre triangle qui aura z et BE pour ses deux petits côtés ; mais en considérant les triangles AEF et BEG, on a

$$AE = \frac{a}{\cos x},\quad BE = \frac{b}{\cos x'};$$

* Mémoire de la première classe de l'Institut, pour l'année 1809

on aura donc

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 x}},\quad y' = \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{\cos^2 x'}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la quantité $ny + n'y'$, il en résultera une fonction de z, x, x', qui devra être un *minimum* par rapport à ces trois variables, dont les deux dernières sont liées entre elles par l'équation (a). Il faudra donc d'abord que la différentielle de cette fonction, prise par rapport à z, soit égale à zéro ; d'ou l'on conclut

$$n\frac{dy}{dz} + n'\frac{dy'}{dz} = \frac{nz}{y} + \frac{n'z}{y'} = 0.$$

Or, on ne peut satisfaire à cette condition qu'en prenant $z = 0$; ce qui nous apprend que le rayon lumineux traverse au point E la surface de séparation des deux milieux, et, par conséquent, qu'il ne sort pas du plan perpendiculaire à cette surface, mené par les points A et B.

En faisant donc $z = 0$, on aura simplement

$$ny + ny' = \frac{na}{\cos x} + \frac{n'b}{\cos x'};$$

et en égalant à zéro la différentielle complète de cette quantité, il vient

$$\frac{na \sin x\, dx}{\cos^2 x} + \frac{n'b \sin x'\, dx'}{\cos^2 x'} = 0;$$

mais en différentiant aussi l'équation (a), on a, en même temps,

$$\frac{a\,dx}{\cos^2 x} + \frac{b\,dx'}{\cos^2 x'} = 0;$$

et si l'on élimine $\frac{dx'}{dx}$ entre ces deux équations, on trouve

$$n \sin x = n' \sin x'. \qquad (b)$$

Celle-ci et l'équation (a) détermineront les valeurs de x et x' qui répondent au *minimum* de $ny + n'y'$. Après avoir calculé la valeur de x, on construira le point E, en prenant $EF = a \tang x$; ensuite on tirera les droites AE et BE, et la ligne brisée AEB sera la route que suit le rayon lumineux pour aller du point A au point B.

L'angle AEH compris entre la normale EH à la surface de séparation des deux milieux, et le rayon incident AE, est ce qu'on appelle l'*angle d'incidence*; l'angle BEK, compris entre le prolongement EK de cette normale et le rayon réfracté BE, se nomme l'*angle de réfraction*. Ces deux angles ont été désignés par x et x'. Ainsi l'équation (b) fera connaître l'angle de réfraction quand l'angle d'incidence sera donné ; et l'on voit, d'après cette équation, que le sinus de l'angle de réfraction est au

sinus de l'angle d'incidence dans un rapport constant.

C'est, en effet, la loi connue de la réfraction ordinaire, dont la découverte est due à Descartes. Le rapport des deux sinus dépend de celui des vitesses v et v' relatives aux milieux que l'on considère, et, pour cette raison, il varie avec les différentes sortes de milieux transparens.

164. Si le rayon lumineux, au lieu de pénétrer dans le second milieu, est réfléchi à la surface de séparation, sa vitesse sera constante dans toute l'étendue de la trajectoire, qui est alors comprise en entier dans un même milieu. L'intégrale $\int v ds$ sera donc égale à la longueur totale de la trajectoire, multipliée par cette vitesse constante; par conséquent, cette longueur devra être un *minimum*, en vertu du principe de la moindre action.

Supposons donc, comme dans le numéro précédent, que la surface de séparation soit plane. Soient A et B (fig. 41) les deux points extrêmes de la trajectoire; menons par ces points un plan perpendiculaire à cette surface, qui la coupe suivant CD : chaque particule de lumière ira du point A au point B, en suivant une ligne brisée AEB, la plus courte de toutes celles qui se réfléchissent sur la surface de séparation. Or, il est d'abord évident que cette ligne sera comprise dans le plan perpendiculaire à cette surface; car toute autre trajectoire serait plus longue que sa projection sur ce plan. De plus, il est aisé de prouver, sans aucun calcul, que la plus courte ligne brisée est celle qui fait deux angles égaux avec la droite CD, c'est-à-dire que si l'on a

$$AEC = BED,$$

la ligne AEB sera plus courte que toute autre ligne brisée AE'B, dont le point E' appartient, ainsi que E, à la droite CD.

En effet, abaissons de A la perpendiculaire AF sur cette droite; prolongeons-la d'une quantité A'F égale à AF, et tirons ensuite les droites A'E et A'E'. Les deux angles AEC et A'EC seront égaux; donc les deux angles A'EC et BED le seront aussi, à cause de l'équation précédente; par conséquent, la ligne A'EB sera droite : on aura donc

$$A'E + BE < A'E' + BE';$$

et, à cause de $A'E = AE$ et $A'E' = AE'$, il en résultera

$$AE + BE < AE' + BE';$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Si l'on élève au point E la perpendiculaire EH sur la droite CD, AEH et BEH seront les angles d'incidence et de réflexion du rayon lumineux qui va du point A au point B. Ces angles seront égaux, puisqu'ils sont complémens des angles égaux AEC et BED; d'où il résulte la loi connue de la réflexion de la lumière, qui consiste en ce que l'angle de réflexion est toujours égal à l'angle d'incidence.

165. Lorsque l'on admet la théorie de l'émission de la lumière, les lois de la réflexion et de la réfraction se déduisent de l'expression du carré de la vitesse d'un point soumis à des forces d'attraction (n° 158), d'une manière plus directe qu'en faisant usage du principe de la moindre action. Cette question nous offrant un exemple du mouvement d'un point matériel, intéressant par la nature des forces que l'on y considère, et par son application à la Physique, nous allons en exposer la solution dans le cas ordinaire, où les deux milieux que traverse la lumière ne sont pas cristallisés.

Dans cette théorie, on suppose chaque particule lumineuse soumise à l'attraction de tous les points matériels du milieu qu'elle traverse, et l'on regarde cette force comme une fonction inconnue de la distance, dont on sait seulement qu'elle décroît avec une extrême rapidité quand la distance augmente, de sorte qu'elle devient tout-à-fait insensible dès que la distance a une grandeur sensible. Ainsi, par exemple, désignons par r la distance du point attiré au point attirant, par a une ligne de grandeur finie, mais insensible, et par e la base des logarithmes népériens. Une force de cette nature pourra être représentée par $Ae^{-\frac{r}{a}}$; A étant son intensité relative à une distance r infiniment petite. Dès que cette distance aura une grandeur sensible, et sera, par conséquemment, un très grand multiple de a, cette fonction n'aura plus aucune valeur sensible.

Tant qu'un rayon lumineux se meut dans un milieu homogène et d'une densité constante, les attractions qu'il éprouve se détruisent, et son mouvement est rectiligne et uniforme. Mais supposons qu'il soit parvenu en un point M (fig. 42) situé à une distance insensible de la surface CD, qui sépare deux milieux différens, et que nous supposerons horizontale pour fixer les idées; de ce point M, abaissons sur CD une perpendiculaire MP, et menons ensuite, dans le milieu supérieur, deux plans C'D' et C''D'' parallèles à CD, dont la distance mutuelle soit égale à MP, et dont le premier passe par le point M; il est évident que les attractions exercées sur le rayon lumineux au point M, par les deux couches du milieu supérieur, qui sont comprises, l'une entre CD et C'D', l'autre entre C'D' et C''D'', seront égales et contraires; elles se détruiront donc, et le mobile ne sera sollicité que par l'attraction de la partie du milieu qu'il traverse, supérieure à C''D'', et par l'attraction totale du milieu inférieur. Ces deux forces seront perpendiculaires à CD; elles varieront avec la distance MP suivant des lois inconnues, mais telles que chacune de ces forces sera insensible quand MP ne le sera pas, et qu'elles atteindront leurs *maxima* lorsque cette distance sera nulle, ou que le mobile sera parvenu à la surface de séparation des deux milieux.

Au bout du temps t, je représente par s la distance MP, et par Z et Z' des fonctions inconnues de

z, qui expriment les forces accélératrices provenant des attractions du milieu inférieur et de la partie de l'autre milieu, supérieure à C'D'. La force accélératrice totale, tendante à diminuer z, sera la différence $Z - Z'$; par conséquent, on aura, dans le milieu supérieur,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + Z - Z' = 0, \qquad (1)$$

pour l'équation du mouvement vertical d'une particule lumineuse.

Lorsque ce mobile aura traversé la surface CD en un point E, et qu'il aura pénétré dans le milieu inférieur jusqu'en un point M', tel que la perpendiculaire M'P' à CD soit aussi représentée par z, il est aisé de voir que la force accélératrice qui tendra à diminuer cette variable, sera alors la différence $Z' - Z$; en sorte que l'on aura

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + Z' - Z = 0, \qquad (2)$$

pour l'équation du mouvement vertical dans le milieu inférieur.

Quant au mouvement horizontal ou parallèle à CD, il sera uniforme, et la vitesse horizontale ne changera pas en passant d'un milieu dans l'autre; car les forces attractives de chaque milieu se détruisent parallèlement à CD, et, dans ce sens, un rayon lumineux n'est soumis à aucune force accélératrice. Ainsi, en appelant k la vitesse de la lumière en un point A du milieu supérieur, situé à une distance sensible de CD, et α l'angle aigu que la direction de cette vitesse fait avec la verticale, on aura, à un instant quelconque, $k \sin \alpha$ pour la vitesse parallèle à CD. Si le rayon lumineux pénètre, d'une quantité sensible, dans le milieu inférieur, et qu'on représente par k' et α' ce que deviennent k et α en un point A' de ce milieu, situé à une distance sensible de CD, on pourra également représenter la vitesse horizontale du mobile par $k' \sin \alpha'$; en sorte que l'on devra avoir

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha'. \qquad (3)$$

On voit aussi, *à priori*, que la trajectoire du mobile sera une courbe plane et verticale; il ne restera donc plus qu'à déterminer sa vitesse perpendiculaire à CD, soit dans le milieu supérieur, soit dans le milieu inférieur, à une distance quelconque z de cette surface CD.

166. Je désigne cette vitesse par u, de sorte qu'on ait $\frac{ds^2}{dt^2} = u^2$ pour les deux milieux. En multipliant l'équation (1) par $2dz$, intégrant et désignant par c la constante arbitraire, on aura, dans le milieu supérieur,

$$u^2 = c + 2\int Z'dz - 2\int Zdz.$$

Je supposerai que ces deux intégrales s'évanouissent avec z, et je représenterai par h et h' leurs valeurs à une distance sensible de CD. Il sera permis d'étendre ces intégrales h et h' depuis zéro jusqu'à l'infini; car, au delà d'une valeur sensible, les fonctions Z et Z', et par conséquent les parties correspondantes de $\int Zdz$ et $\int Z'dz'$, sont nulles ou insensibles par hypothèse. On pourra donc écrire, si l'on veut,

$$h = \int_0^\infty Zdz, \quad h' = \int_0^\infty Z'dz.$$

D'ailleurs, pour une valeur sensible de z, on a $u^2 = k^2 \cos^2 \alpha$; on aura donc alors

$$k^2 \cos^2 \alpha = c + 2h' - 2h;$$

et en éliminant c de la valeur générale de u^2, il en résultera

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h' + 2\int Z'dz - 2\int Zdz,$$

en un point quelconque M.

Je représente par k_1 la vitesse du mobile au point E de la surface CD, et par α_1 l'angle que fait sa direction avec la verticale. On aura en ce point $u^2 = k^2_1 \cos \alpha_1$; et comme il répond à $z = 0$, les deux derniers termes de la formule précédente s'évanouiront, et elle se réduira à

$$k^2_1 \cos^2 \alpha_1 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h'. \quad (4)$$

Pour que le rayon lumineux atteigne la surface de séparation des deux milieux, il faudra donc que le second membre de cette équation soit une quantité positive, ou qu'on ait

$$h' < h + 1/2k^2 \cos^2 \alpha.$$

Si cette conditon n'est pas remplie, ce qui exigera que l'attraction du milieu supérieur surpasse celle du milieu inférieur, la vitesse verticale du mobile s'épuisera avant qu'il ait atteint le plan CD. Il y aura donc un point de la trajectoire où la tangente sera horizontale. Parvenu en ce point, le mobile rétrogradera; les deux branches de cette courbe, aboutissantes en ce même point, seront semblables, puisqu'elles seront décrites en vertu de forces égales pour la même valeur de z; et, pour une grandeur sensible de cette distance z, ces deux branches se changeront en des lignes droites qui feront des angles égaux avec la verticale, ou, autrement dit, les angles de réflexion et d'incidence seront égaux.

Si, au contraire, l'attraction du milieu inférieur surpasse celle du milieu supérieur, et que la condition précédente soit remplie, le rayon lumineux pénétrera dans le second milieu avec une vitesse perpendiculaire à CD, qui sera déterminée par l'équation (4). Dans cette hypothèse, on aura, d'après l'équation (2) relative à ce milieu,

$$u^2 = k^2_1 \cos^2 \alpha_1 + 2\int Zdz - 2\int Z'dz,$$

en supposant toujours les intégrales nulles quand

$z = 0$. A une distance sensible de CD, on a $v^2 = k'^2 \cos^2 \alpha'$; on aura donc

$$k'^2 \cos^2 \alpha' = k^2{}_1 \cos^2 \alpha_1 + 2k - 2k';$$

et en éliminant $k^2{}_1 \cos^2 \alpha_1$ au moyen de l'équation (4), il en résultera

$$k'^2 \cos^2 \alpha' = k^2 \cos^2 \alpha + 4k - 4k'. \quad (5)$$

Pour que le rayon lumineux, après avoir traversé la surface CD, pénètre jusqu'à une profondeur sensible dans le milieu inférieur, il sera donc nécessaire et il suffira qu'on ait

$$k' < k + 1/4k^2 \cos^2 \alpha.$$

Lors donc que k', quoique $< k + 1/2\, k^2 \cos^2 \alpha$, surpassera néanmoins $k + 1/4\, k^2 \cos^2 \alpha$, le mobile ne pénétrera dans le milieu inférieur que jusqu'à une distance insensible au delà de CD; il rentrera ensuite dans le milieu supérieur; et les deux branches de sa trajectoire seront semblables de part et d'autre du point où il commencera à rétrograder. Par conséquent, la lumière sera réfléchie comme dans le cas précédent, en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; en sorte qu'il y a deux cas distincts de réflexion dans la théorie que nous considérons.

167. Supposons maintenant que ni l'un ni l'autre de ces deux cas n'ait lieu, de sorte que le rayon lumineux soit *réfracté*. D'après l'équation (3), on aura

$$k'^2 \sin^2 \alpha' = k^2 \sin^2 \alpha;$$

et en ajoutant membre à membre l'équation (5) et celle-ci, il en résultera

$$k'^2 = k^2 + 4k - 4k'; \quad (6)$$

ce qui montre que l'augmentation du carré de la vitesse du mobile, en allant du point A du milieu supérieur au point A' du milieu inférieur, sera indépendante, comme cela devait être (n° 157), du chemin qu'il aura suivi.

On tire aussi des équations (3) et (6)

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 4(k - k')}}; \quad (7)$$

formule qui renferme la loi du rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence, et qui donne la valeur de ce rapport en fonction de la vitesse k de la lumière dans l'un des deux milieux, et de la différence $k - k'$ de leurs *pouvoirs réfringens* k et k'.

Si le milieu inférieur est terminé par deux plans parallèles, et qu'il y ait au-dessous le même milieu qu'au-dessus, l'expérience prouve que la lumière, après avoir subi deux réfractions et traversé les deux faces du milieu intermédiaire, reprend une direction parallèle à celle qu'elle avait dans le milieu supérieur. C'est aussi ce qui résulte de l'équation (7); car si l'on désigne par α'' l'angle que le rayon lumineux fait avec la verticale, après être sorti du milieu intermédiaire, il faudra, pour déterminer $\sin \alpha''$, échanger entre elles, dans cette équation, les quantités k et k', et y mettre k', α', α'', au lieu de k, α, α'. On aura donc

$$\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + 4(k - k')}},$$

ou bien, en vertu des équations (6) et (7),

$$\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} = \frac{\sqrt{k^2 + 4(k - k')}}{k} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'};$$

ce qui donne, effectivement,

$$\alpha'' = \alpha.$$

Le phénomène de la *dispersion*, qui provient d'une valeur différente de l'angle de réfraction α', pour les rayons diversement colorés dont se compose un même rayon de lumière incidente, peut être attribué, d'après la formule (7), soit à une inégalité de leur vitesse k, soit à une action différente de chaque milieu sur ces différens rayons, d'où il résulterait des valeurs inégales de $k - k'$.

168. Toutes choses d'ailleurs égales, cette équation (7) montre que le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence doit changer avec la vitesse de la lumière. Or, si l'on considère une étoile située dans le plan de l'écliptique, il y a une époque dans l'année où la vitesse de la terre s'ajoute à celle de la lumière, et une autre époque où la première vitesse se retranche de la seconde; ce qui rend la vitesse de la lumière, relativement à un milieu qui se meut avec la terre, sensiblement plus grande dans le premier cas que dans le second. Le rapport dont il s'agit devrait donc aussi être différent à ces deux époques; mais des expériences très précises de M. Arago ont prouvé qu'au contraire ce rapport ne varie pas d'une manière sensible pendant toute l'année, et, de plus, que sa grandeur est la même pour le soleil et pour les diverses étoiles d'où la lumière est partie.

Quelle que soit la théorie de la lumière que l'on adopte, c'est toujours un fait très remarquable, que la composition de la vitesse propre de la lumière avec celle de la terre, qui se manifeste dans le mouvement apparent des étoiles, connu sous le nom d'*aberration*, n'ait cependant aucune influence appréciable sur la réfraction de la lumière qu'elles nous envoient à différens jours de l'année.

Dans le vide, le mouvement de la lumière directe ou réfléchie est uniforme, et sa vitesse indépendante de la source dont elle émane. La grandeur de cette vitesse est telle, que la lumière parcourt en 493,34 secondes la distance moyenne du soleil à la terre; ce qui donne 30950 myriamètres par seconde.

Un rayon lumineux, lancé du soleil ou d'une étoile, doit éprouver dans sa vitesse, comme tout

autre projectile, une diminution due à sa pesanteur vers cet astre, c'est-à-dire, à l'attraction en raison inverse du carré des distances à son centre, que la masse du corps exerce sur chaque particule matérielle de la lumière; mais cette diminution est une fraction très petite de la vitesse finale de la lumière. Ainsi, par exemple, l'intensité de la pesanteur à la surface du soleil étant vingt-sept fois et demi l'intensité de la pesanteur terrestre, comme on le verra par la suite, et le rayon du soleil étant égal à 110 rayons de la terre, on conclut de ce qu'on a vu dans le nº 143, que la vitesse de la lumière, pour être de 30950 myriamètres par seconde à une grande distance du soleil, a dû être plus grande d'un peu moins de deux millionièmes seulement, en partant de sa surface.

CHAPITRE IV.

DE LA FORCE CENTRIFUGE.

169. La pression qu'un point matériel exerce sur une courbe qu'il est forcé de décrire, n'est pas la même que quand il est en équilibre sur cette courbe. L'état de mouvement donne naissance à une pression particulière qu'on appelle *force centrifuge*, parce qu'on l'a d'abord considérée dans le cercle où elle est dirigée suivant le prolongement du rayon, et tend continuellement à éloigner du centre le mobile sur lequel elle agit. C'est cette force que nous allons considérer dans une courbe quelconque.

Soient $M_{,}M$ et $M'M$ (fig. 43) deux élémens consécutifs et égaux de la courbe donnée, H et H' leurs milieux, MT et M'T' leurs prolongemens. Leur plan et l'angle TMT' seront le plan osculateur et l'angle de contingence de la courbe au point M; et si l'on mène dans ce plan la droite MO, qui divise l'angle $M_{,}MM'$ en deux parties égales, elle représentera la direction du rayon de courbure en ce même point M; en sorte que le centre de courbure sera le point O de cette droite. Appelons ds l'élément $M_{,}M$ de la courbe, lequel sera aussi égal à HH'; soient, en outre, δ l'angle infiniment petit TMT', et ρ le rayon de courbure MO, nous aurons (nº 18)

$$\delta = \frac{ds}{\rho}.$$

Cela posé, faisons d'abord abstraction des forces données qui peuvent agir sur le mobile, et supposons qu'au bout du temps t, il arrive au point M avec une vitesse v. S'il était entièrement libre, il continuerait à se mouvoir sur MT avec la même vitesse; mais, par hypothèse, il est forcé de décrire une courbe donnée; ce qui change la direction de son mouvement, qui devient MT'. Or, si l'on élève sur MT' la perpendiculaire MK, comprise dans le plan osculateur et en dehors de la concavité de la courbe, on pourra substituer à la vitesse v, dirigée suivant MT, deux autres vitesses, l'une égale à $v \cos \delta$ et dirigée suivant MT', l'autre égale à $v \sin \delta$ et dirigée suivant MK, et alors l'effet de la courbe sera de détruire la dernière de ces deux vitesses, pour ne laisser subsister que la première, ou, autrement dit, cet effet se réduira à imprimer au mobile une vitesse égale et contraire à $v \sin \delta$. La courbe donnée étant donc remplacée par un polygone infinitésimal, sa résistance consiste à imprimer au mobile, à chaque sommet M de ce polygone, une vitesse infiniment petite $v \sin \delta$, dirigée en sens contraire de MK.

Pour assimiler complètement cette résistance à une force motrice f qui agit incessamment sur le mobile, nous pouvons supposer que la vitesse $v \sin \delta$ est produite pendant que ce point matériel va de H en H', et prendre dt pour la durée de cette action. Nous pouvons aussi négliger, dans cet intervalle de temps, le changement de direction de cette force, et la supposer, par exemple, parallèle à la droite MO. Alors la force accélératrice correspondante aura pour mesure, comme chacune des forces U, U', U'', etc., du nº 147, la vitesse $v \sin \delta$ qu'elle produit pendant l'instant dt, divisée par dt; et en appelant m la masse du mobile, il en résultera

$$f = \frac{mv \sin \delta}{dt},$$

pour la valeur de f. Donc, en remplaçant $\sin \delta$ par δ, mettant pour δ sa valeur précédente, et observant que $ds = vdt$, on aura

$$f = \frac{mv^2}{\rho}.$$

La pression que la courbe éprouve, et qui est uniquement due à l'état de mouvement du point matériel qui la décrit, ou la force centrifuge qui agit sur ce mobile, est égale et contraire à cette force f. Il s'ensuit donc qu'au point quelconque M de la courbe donnée, la force centrifuge est comprise dans le plan osculateur, et dirigée en dehors de la concavité de cette courbe, suivant le prolongement MN de son rayon de courbure, et que son intensité est en raison inverse de ce rayon, et en raison directe de la masse du mobile et du carré de sa vitesse.

170. Cette vitesse étant v sur le côté M_1M et devenant $v \cos \delta$ sur le côté suivant MM', il s'ensuit que sa grandeur n'est point altérée par la courbe; car on peut négliger la quantité $v(1 - \cos \delta)$, infinement petite du second ordre, de laquelle il ne pourrait résulter qu'une diminution infiniment petite de vitesse, sur une partie de la courbe de grandeur finie. Le mouvement sur une courbe quelconque est donc uniforme quand le mobile n'est sollicité par aucune force donnée. C'est ce qu'on a déjà vu dans le n° 157; mais nous voyons de plus que ce résultat tient à ce que l'angle de contingence est infiniment petit, et qu'en un point où deux courbes différentes se couperaient sous un angle fini, le mobile éprouverait une perte finie de vitesse, en passant d'une courbe à l'autre; laquelle perte serait égale à sa vitesse primitive, multipliée par le sinus verse de cet angle.

Lorsque le mobile est sollicité par une ou plusieurs forces données, sa vitesse varie à raison des composantes de ces forces tangentes à la trajectoire, et leurs composantes normales exercent, comme dans l'état de repos, une pression sur cette courbe qu'il faut joindre à la force centrifuge.

Soit, en général, mR la résultante des forces données qui agissent sur le mobile, quand il est parvenu au point M. Décomposons cette force motrice en deux autres, l'une tangente et l'autre normale à la trajectoire, que nous représenterons par mT et mQ; la première sera la force qui fera varier la vitesse, et la seconde produira la partie de la pression indépendante de l'état de mouvement du mobile. En prenant par la règle du parallélogramme des forces, la résultante de mQ et de la force centrifuge f ou $\frac{mv^2}{\rho}$, on aura, en grandeur et en direction, la pression totale qui aura lieu au point M de la courbe donnée. Cette force, divisée par la masse du mobile, ou la résultante des forces accélératrices Q et $\frac{v^2}{\rho}$, devra coïncider avec la force P du n° 152. C'est en effet ce que nous allons vérifier.

171. Je remplace les équations (5) de ce numéro par celles-ci, qui s'en déduisent immédiatement,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dsdt^2} &= Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} - P\left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha' - \frac{dy}{ds}\cos\alpha\right),\\
\frac{dzd^2x - dxd^2z}{dsdt^2} &= X\frac{dz}{ds} - Z\frac{dx}{ds} - P\left(\frac{dz}{ds}\cos\alpha - \frac{dx}{ds}\cos\alpha''\right),\\
\frac{dyd^2z - dzd^2y}{dsdt^2} &= Z\frac{dy}{ds} - Y\frac{dz}{ds} - P\left(\frac{dy}{ds}\cos\alpha'' - \frac{dz}{ds}\cos\alpha'\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Quelle que soit la variable indépendante, on a

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2}\,\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dt}\,dt;$$

on a, en même temps,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{ds^2}\,\frac{ds^2}{dt^2}, \qquad \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dt} = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{ds}\,\frac{ds}{dt};$$

à cause de $v = \frac{ds}{dt}$, il en résultera

$$\frac{dzd^2y - dyd^2z}{dsdt^2} = v^2\,\frac{dz^2}{ds^2}\,\frac{d.\frac{dy}{dx}}{ds} = \frac{v^2(dxd^2y - dyd^2x)}{ds^2};$$

et l'on trouvera de même,

$$\frac{dzd^2x - dxd^2z}{dzdt^2} = \frac{v^2(dzd^2x - dxd^2z)}{ds^3},$$

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{dzdt^2} = \frac{v^2(dyd^2z - dzd^2y)}{ds^3}.$$

En désignant par q, q', q'', les angles que la force Q fait avec des parallèles aux axes des x, y, z, et observant que X, Y, Z, sont les composantes suivant ces parallèles de Q et de la force tangentielle T, on aura aussi

$$X = T\frac{dx}{ds} + Q\cos q,\quad Y = T\frac{dy}{ds} + Q\cos q',\quad Z = T\frac{dz}{ds} + Q\cos q'';$$

et au moyen de ces valeurs et des précédentes, les équations (1) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v^2(dzd^2y - dyd^2z)}{ds^3} &= Q\left(\frac{dz}{ds}\cos q' - \frac{dy}{ds}\cos q\right) - P\left(\frac{dz}{ds}\cos \varpi' - \frac{dy}{ds}\cos \varpi\right),\\
\frac{v^2(dzd^2x - dxd^2z)}{ds^3} &= Q\left(\frac{dz}{ds}\cos q - \frac{dx}{ds}\cos q''\right) - P\left(\frac{dz}{ds}\cos \varpi - \frac{dx}{ds}\cos \varpi''\right),\\
\frac{v^2(dyd^2z - dzd^2y)}{ds^3} &= Q\left(\frac{dy}{ds}\cos q'' - \frac{dz}{ds}\cos q'\right) - P\left(\frac{dy}{ds}\cos \varpi'' - \frac{dz}{ds}\cos \varpi'\right).
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

Or, si l'on appelle γ, γ', γ'' les angles que la direction de la force centrifuge, c'est-à-dire le prolongement MN du rayon de courbure MO, fait avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point M, et x', y', z', les coordonnées du centre de courbure O, on aura

$$x - x' = \rho\cos\gamma,\quad y - y' = \rho\cos\gamma',\quad z - z' = \rho\cos\gamma'',$$

et en combinant les équations (2) avec les formules du n° 20, on en déduira sans difficulté,

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{\rho}\cos\gamma &= Q\left[\frac{dy}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos q' - \frac{dy}{ds}\cos q\right) - \frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos q - \frac{dx}{ds}\cos q''\right)\right]\\
&\quad - P\left[\frac{dy}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos \varpi' - \frac{dy}{ds}\cos \varpi\right) - \frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos \varpi - \frac{dx}{ds}\cos \varpi''\right)\right],\\
\frac{v^2}{\rho}\cos\gamma' &= Q\left[\frac{dz}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos q'' - \frac{dz}{ds}\cos q'\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\cos q' - \frac{dy}{ds}\cos q\right)\right]\\
&\quad - P\left[\frac{dz}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos \varpi'' - \frac{dz}{ds}\cos \varpi'\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\cos \varpi' - \frac{dy}{ds}\cos \varpi\right)\right],\\
\frac{v^2}{\rho}\cos\gamma'' &= Q\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos q - \frac{dx}{ds}\cos q''\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos q'' - \frac{dz}{ds}\cos q'\right)\right]\\
&\quad - P\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos \varpi - \frac{dx}{ds}\cos \varpi''\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos \varpi'' - \frac{dz}{ds}\cos \varpi'\right)\right].
\end{aligned}$$

Mais à cause que les forces P et Q sont perpendiculaires à la tangente de la trajectoire, on a

$$\frac{dx}{ds}\cos q + \frac{dy}{ds}\cos q' + \frac{dz}{ds}\cos q'' = 0,$$

$$\frac{dx}{ds}\cos \varpi + \frac{dy}{ds}\cos \varpi' + \frac{dz}{ds}\cos \varpi'' = 0;$$

ce qui réduit les coefficiens de Q, dans les trois équations précédentes, à $-\cos q$, $-\cos q'$, $-\cos q''$, et ceux de $-P$ à $-\cos \varpi$, $-\cos \varpi'$, $-\cos \varpi''$; on aura donc enfin

$$\frac{v^2}{\rho}\cos\gamma + Q\cos q = P\cos \varpi,$$

$$\frac{v^2}{\rho}\cos\gamma' + Q\cos q' = P\cos \varpi',$$

$$\frac{v^2}{\rho}\cos\gamma'' + Q\cos q'' = P\cos \varpi'',$$

où l'on voit, comme il s'agissait de le vérifier, que la force P est, en grandeur et en direction, la résultante des deux forces $\frac{v^2}{\rho}$ et Q.

172. Quand le mobile sera seulement assujetti à se mouvoir sur une surface donnée, il faudra que la résultante des forces motrices mQ et $\frac{mv^2}{\rho}$, qui est déjà perpendiculaire à sa trajectoire, soit, de plus, normale à cette surface. En appelant donc mN cette résultante, et désignant par ω et ψ les angles, aigus ou obtus, que font ses deux composantes avec une partie déterminée de la normale à la surface, au point où se trouve le mobile, on aura

$$N = \pm \left(Q \cos \omega + \frac{v^2}{\rho} \cos \psi\right).$$

La force N agira suivant cette partie de la normale ou suivant son prolongement, selon que la quantité comprise entre les parenthèses sera positive ou négative; et pour que N soit toujours une quantité positive, on prendra le signe supérieur dans le premier cas, et le signe inférieur dans le second. Cette force accélératrice N devra être égale et contraire à celle qui entre dans les équations (3) du n° 151; et, en effet, celles-ci ne différant des équations (5) du n° 152 qu'en ce qu'elles contiennent N, λ, μ, ν, au lieu de $-P$, ω, ω', ω'', on en déduira, par l'analyse précédente, des composantes de la force N, qui seront égales et contraires à celles que l'on a trouvées pour la force P.

Dans ce même cas d'une surface donnée, si l'on désigne par ω' et ψ' les angles que les forces mQ et $\frac{mv^2}{\rho}$ font avec un axe mené par le point où se trouve le mobile, tangent à cette surface et perpendiculaire à la trajectoire, de sorte qu'on ait

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \omega' = 1, \quad \cos^2 \psi + \cos^2 \psi' = 1,$$

il faudra que la somme des composantes de ces deux forces suivant cet axe tangent, soit égale à zéro, puisque leur résultante est normale au même point de la surface; on aura donc

$$Q \cos \omega' + \frac{v^2}{\rho} \cos \psi' = 0;$$

équation qui pourra servir à déterminer l'inclinaison ψ' du plan osculateur de la trajectoire sur le plan tangent à la surface donnée.

Lorsque le mobile ne sera soumis à aucune force donnée, où, plus généralement, lorsqu'il ne sera soumis qu'à une force tangente à sa trajectoire, on aura $Q = 0$; il en résultera donc $\cos \psi' = 0$ et $\psi' = 90°$, en sorte que le plan osculateur de cette courbe sera constamment perpendiculaire à la surface donnée. Cette propriété étant, en général, celle de la ligne la plus courte entre deux points donnés sur cette surface, c'est cette ligne que le mobile décrira, ainsi qu'on l'a dit précédemment (n° 161); mais maintenant nous voyons, en outre, qu'une force tangente à la trajectoire, telle qu'un frottement contre la surface donnée, ou la résistance d'un milieu, ne fera pas dévier le mobile, de la ligne la plus courte entre son point de départ et son point d'arrivée.

173. Enfin, si le mobile est entièrement libre, il faudra que la composante normale à la trajectoire, de la force motrice mR qui le sollicite, fasse équilibre à sa force centrifuge $\frac{mv^2}{\rho}$, puisque dans ce cas il n'y a pas de courbe ou de surface donnée qui puisse détruire la résultante normale de ces deux forces. Il faudra donc, en premier lieu, que le plan osculateur de la trajectoire soit celui qui passe par la tangente et par la direction donnée de la force mR; en appelant θ l'angle que cette direction, en un point quelconque, fait avec le rayon de courbure MO, il faudra, en outre, que cet angle soit aigu pour que la composante normale de la force mR agisse en sens contraire de la force centrifuge qui est dirigée suivant MN; et cela étant, on devra avoir

$$R \cos \theta = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (a)$$

Quand la force accélératrice R, à laquelle le mobile est soumis, sera une force centrale dirigée vers un point connu, et que l'observation aura fait connaître la courbe qu'il décrit autour de ce centre fixe, on pourra déduire de l'équation de cette courbe, le rayon de courbure ρ et l'angle θ qu'il fait avec la direction de la force R; on déduira aussi, de cette équation et de la proportionnalité des aires aux temps (n° 155), l'expression de la vitesse v en un point quelconque de la trajectoire; par conséquent, l'équation (a) déterminera la valeur de R, ou la loi de la force centrale qui fait décrire au mobile la courbe donnée. C'est de cette manière que Newton a découvert la loi de la force dirigée vers le centre du soleil, qui fait décrire à chaque planète une ellipse dont ce point occupe un des foyers; mais on verra, dans la suite, qu'en partant des mêmes données, cette détermination peut s'effectuer par un calcul plus simple.

174. Huyghens, à qui l'on doit la mesure de la force centrifuge, l'a déduite de la considération du mouvement circulaire; et quoique cette méthode soit moins directe que la précédente, je crois cependant utile de l'exposer ici en peu de mots.

Soit M (fig. 44) un point matériel attaché à un point fixe C par un fil inextensible CM; supposons qu'une percussion lui imprime une vitesse a, dans une direction perpendiculaire à la longueur du fil; et, pour simplifier la question, supposons aussi qu'aucune force motrice donnée n'agisse sur le mobile. Ce point matériel va décrire un cercle AMB, dont le centre et le rayon seront le point fixe et la longueur du fil. Pendant ce mouvement, le fil qui

retient le mobile éprouvera, dans le sens de sa longueur, une certaine *tension* qui n'est autre chose que la force centrifuge. En appliquant au mobile une force égale à cette tension et constamment dirigée vers le centre fixe, on pourra faire abstraction du fil, et considérer le mobile comme entièrement libre. C'est donc en vertu de cette force centrale, dont la grandeur est inconnue, combinée avec la vitesse a, que le cercle sera décrit.

Il s'ensuit d'abord que les secteurs circulaires décrits par le rayon du mobile, seront proportionnels au temps (n° 155); ce qui exige que les arcs de cercle parcourus le soient aussi. Le mouvement circulaire sera donc uniforme; et si l'on désigne par s l'arc décrit dans le temps t, on aura $s = at$.

Soient m la masse du mobile, ma la force centrale, et, conséquemment, a la force accélératrice qu'il s'agira de déterminer. Quelle que soit cette force, on peut la regarder comme constante en grandeur et en direction pendant un intervalle de temps infiniment petit; ainsi, pendant que le mobile décrit l'arc de cercle infiniment petit MM', la force a sera supposée constante, et parallèle au rayon CM qui aboutit à l'origine de cet arc; d'où nous concluons que si le mobile n'était pas animé de la vitesse a, la force centrale lui ferait parcourir, dans un temps infiniment petit, le sinus verse MN, ou la projection sur CM de l'arc MM' qu'il décrit réellement. Or, toute force accélératrice a pour mesure le double de l'espace infiniment petit qu'elle est capable de faire parcourir à un mobile dans un temps infiniment petit, divisé par le carré de ce temps (n° 118); si donc on appelle ϵ le sinus verse MN, et τ le temps employé à décrire l'arc MM', on aura

$$a = \frac{2\epsilon}{\tau^2};$$

mais en désignant cet arc par σ, et le rayon CM par r, on a

$$\epsilon = \frac{\sigma^2}{2r},$$

en prenant l'arc au lieu de la corde; donc à cause de $\sigma = a\tau$, on aura

$$a = \frac{a^2}{r}.$$

Cette valeur de a est donc celle de la force centrifuge rapportée à l'unité de masse, dans un cercle décrit d'un mouvement uniforme. On en conclut immédiatement que cette force, dans une courbe quelconque, aura pour mesure le carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure; car la trajectoire ayant deux élémens consécutifs communs avec son cercle osculateur, on peut supposer que, pendant un temps infiniment petit, le mobile se meut circulairement autour du centre de courbure, et qu'il a conséquemment la force centrifuge qui convient à ce mouvement. En multipliant par m cette force accélératrice, on aura la même valeur que pour la force désignée par f dans le n° 169.

175. Pour comparer la force centrifuge dans le cercle à la pesanteur, supposons que la vitesse a soit celle qui serait due à une hauteur h, de sorte qu'on ait $a^2 = 2gh$ (n° 130), en désignant par g la gravité; il en résultera

$$\frac{a}{g} = \frac{2h}{r};$$

ce qui montre que la force centrifuge est à la pesanteur, comme le double de la hauteur due à la vitesse du mobile est au rayon.

Si le mobile est un corps dont les dimensions soient très petites par rapport à sa distance au point C, on pourra considérer, dans toute son étendue, la valeur de a comme à très peu près constante, et prendre le rapport $\frac{a}{g}$ pour celui de la force centrifuge provenant du mouvement circulaire, au poids du corps sur lequel elle agit.

Quand le mouvement n'aura pas lieu dans un plan horizontal, la vitesse du mobile, la force centrifuge et la tension du fil attaché au point C, seront variables. Supposons que le mobile se meuve dans un plan vertical; désignons par $2gh$ le carré de sa vitesse, quand il se trouve dans le plan horizontal passant par le point C; et, à un instant quelconque, appelons z sa distance à ce plan, regardée comme positive lorsque le mobile sera situé au-dessous, et comme négative quand il aura passé au-dessus; nous aurons à cet instant $2g(h+z)$ pour le carré de sa vitesse (n° 150), et $\frac{2mg(h+z)}{r}$ pour la force centrifuge. Pour avoir la tension totale du fil, il faudra ajouter à cette force la composante du poids du mobile dirigé suivant le prolongement de son rayon, laquelle composante est égale à $\frac{mgz}{r}$, comme il est aisé de le voir. Donc, en appelant t la tension totale du fil à un instant quelconque, nous aurons

$$t = \frac{mg(2h+3z)}{r}.$$

Cette force exprimera aussi la pression que le point C éprouvera à chaque instant, suivant la direction du rayon qui aboutit au mobile. Elle atteindra son *maximum*, lorsque le mobile sera au point le plus bas du cercle, où l'on a $z = r$, et son *minimum*, lorsqu'il sera au point le plus élevé, où l'on a $z = -r$. Si h est moindre que $\frac{3r}{2}$, la tension deviendra négative et se changera en une contrac-

tion pendant une partie du mouvement : il faudra alors que le fil soit inflexible pour que le mouvement circulaire ait lieu. On néglige, dans ce calcul, le poids et la force centrifuge du fil; ce qui suppose sa masse très petite par rapport à celle du mobile. On verra, par la suite, comment on y devrait avoir égard si cela était nécessaire.

176. Revenons au mouvement circulaire et uniforme, et désignons par T le temps que le mobile emploie à parcourir la circonférence entière. On aura

$$a = \frac{2\pi r}{T},$$

et, par conséquent,

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2};$$

ce qui montre que la force centrifuge est en raison directe du rayon du cercle, et en raison inverse du carré du temps d'une révolution entière.

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, tous ses points décrivent, dans le même temps, des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe, qui ont leurs centres dans cet axe, et pour rayons les perpendiculaires abaissées de chaque point sur ce même axe; par conséquent, les forces centrifuges de ces différens points sont entre elles comme ces perpendiculaires. Ainsi, par exemple, la force centrifuge des corps placés à la surface de la terre, et qui tournent avec elle autour de l'axe des *pôles*, est proportionnelle aux rayons des *parallèles* qu'ils décrivent; et, de plus, cette force est dirigée en chaque lieu de la terre suivant le prolongement du rayon du parallèle qui aboutit en ce point.

177. La force qui précipite les corps vers la terre, et que nous appelons *pesanteur*, est due principalement à l'attraction du sphéroïde terrestre sur ces corps. Mais quelle qu'en soit la cause, il est toujours certain que la force centrifuge diminue cette tendance des corps pesans; en sorte qu'excepté au pôle, où la force centrifuge est nulle, la pesanteur est partout moindre que si la terre n'avait pas de mouvement de rotation. A l'équateur, la force centrifuge et la pesanteur sont dirigées en sens contraire l'une de l'autre; la pesanteur y est donc égale à l'excès de l'attraction de la terre sur la force centrifuge; par conséquent, on a

$$g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2};$$

g étant cette pesanteur, G l'attraction terrestre, ou la pesanteur qui aurait lieu si la terre était immobile, r le rayon de l'équateur, et T le temps de la rotation de la terre.

Le second terme de cette formule étant très petit par rapport au premier, on a, à très peu près,

$$g = G\left(1 - \frac{4\pi^2 r}{gT^2}\right).$$

Pour convertir en nombre la fraction $\frac{4\pi^2 r}{gT^2}$, on pourra prendre le rayon du méridien au lieu du rayon r de l'équateur, dont il est peu différent; on aura alors

$$2\pi r = 40000000^m.$$

En prenant la seconde pour unité, et négligeant, dans ce calcul, la petite variation de la pesanteur à la surface de la terre, on a aussi (n° 115)

$$g = 9^m,80896.$$

On a d'ailleurs (n° 111)

$$T = 86164;$$

et de là on conclut, à très peu près,

$$\frac{4\pi^2 r}{gT^2} = \frac{1}{289}.$$

Ainsi, à l'équateur, la pesanteur est diminuée de $\frac{1}{289}$ par le mouvement de rotation de la terre autour de son axe. Si ce mouvement devenait plus rapide, le temps T diminuerait, et la force centrifuge différerait moins de la gravité. En observant que 289 est le carré de 17, on voit qu'il suffirait que la rotation eût lieu en un dix-septième de jour, pour que la force centrifuge à l'équateur fût égale à la gravité; alors la pesanteur y serait égale à zéro, et les corps abandonnés à eux-mêmes y demeureraient en équilibre.

Dans ce calcul, nous avons seulement eu égard à la force centrifuge provenant du mouvement de rotation des corps pesans autour de l'axe de la terre; et, en effet, on conçoit que le mouvement de translation autour du soleil, qui est commun à tous ces corps, à la terre et à son axe, ne saurait influer sur leur tendance à s'écarter de cette droite mobile. En imaginant, par exemple, un fil parallèle à l'équateur, attaché à cet axe et aboutissant à un corps situé à la surface, il est évident que sa tension ne changera aucunement par l'effet d'un mouvement qui emporterait, à la fois, l'axe, le fil et le corps, sans changer leurs positions relatives.

178. La force centrifuge diminue la pesanteur en tous les points de la surface de la terre; mais d'une quantité moindre qu'à l'équateur, soit parce qu'en allant de l'équateur au pôle la force centrifuge décroît, soit parce que l'angle qu'elle fait avec la verticale augmente. En appelant toujours r le rayon de l'équateur, et désignant par μ la latitude

d'un lieu quelconque de la terre, et par u le rayon du parallèle correspondant, on aura

$$u = r \cos \mu;$$

en négligeant la non-sphéricité du globe terrestre, l'angle μ sera celui que le prolongement de u, ou la direction de la force centrifuge, fait avec la verticale; la composante verticale de la force centrifuge s'obtiendra donc en multipliant son intensité $\frac{4\pi^2 u}{T^2}$ par $\cos \mu$; ce qui donne

$$\frac{4\pi^2 r \cos^2 \mu}{T^2},$$

pour la diminution de la pesanteur due à la rotation de la terre; et, d'après ce qui précède, cette quantité aura pour valeur

$$\frac{\cos^2 \mu}{289}.$$

Ce serait là toute la diminution que la pesanteur éprouverait, si la terre était une sphère homogène : elle serait proportionnelle au carré du cosinus de la latitude; et la diminution totale du pôle où l'on a $\mu = 90^\circ$, à l'équateur où l'on a $\mu = 0$, s'élèverait à $\frac{1}{289}$. Mais la terre est un sphéroïde aplati à ses pôles; l'attraction qu'elle exerce sur les corps placés à sa surface diminue, pour cette raison, en allant du pôle à l'équateur; cette diminution, en chaque point de la surface, est aussi proportionnelle au carré du cosinus de la latitude; elle s'ajoute à celle qui est produite par la force centrifuge, et par cette addition le coefficient $\frac{1}{289}$ augmente et devient $\frac{1}{200}$ à peu près. C'est donc cette fraction $\frac{1}{200}$ qui exprimera, comme nous l'avons déjà dit (n° 117), l'accroissement total du poids d'un corps transporté de l'équateur au pôle.

CHAPITRE V.

EXEMPLES DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE OU SUR UNE SURFACE DONNÉE.

§ Ier. *Oscillation du pendule simple.*

179. Un *pendule* est, en général, un corps solide pesant, qui oscille autour d'un axe fixe et horizontal. Mais pour comparer plus facilement entre elles les durées des oscillations de différens pendules et les intensités correspondantes de la pesanteur, les géomètres ont imaginé un pendule idéal qu'on appelle *pendule simple*, et qui consiste en un point matériel pesant, suspendu à un point fixe par l'intermédiaire d'un fil inextensible et inflexible, dénué de pesanteur et même de densité, et dont la longueur est celle de ce pendule.

On verra, dans un autre chapitre, qu'il y a toujours un pendule simple dont les oscillations coïncident, et pour leurs durées et pour leurs amplitudes, avec celles d'un pendule quelconque, et nous montrerons comment la longueur du premier peut se déterminer d'après la forme et les dimensions du second. Nous ferons voir aussi que cet accord ayant lieu entre les mouvemens de deux pendules dans le vide, il subsistera également dans un milieu résistant, quelle que soit la fonction de la vitesse qui exprime la résistance. Ainsi, il suffira de considérer le mouvement du pendule simple, soit dans le vide, soit dans un milieu résistant; et c'est ce qu'on va faire dans ce premier paragraphe.

180. Soient C (fig. 45) le point de suspension, CB la verticale passant par ce point fixe, et CA la position initiale du pendule. Supposons que le point matériel qui le termine parte du point A avec une vitesse k perpendiculaire à CA, et dirigée dans le plan des droites CA et CB; il est évident qu'il ne sortira pas de ce plan vertical, et qu'il y

décrira des arcs de cercle dont C est le centre et CA le rayon.

Au bout du temps quelconque t, soit M la position du mobile ; des points M et A, abaissons sur la verticale CB, des perpendiculaires MP et AD, et faisons

$$CP = s, \quad CD = c.$$

En désignant par g la gravité et par v la vitesse du mobile au point M, nous aurons, dans le cas du vide (nº 159),

$$v^2 = k^2 + 2g\,(s - c);$$

et si l'on appelle s l'arc AM décrit par le mobile, de sorte qu'on ait $\frac{ds}{dt} = v$, on en déduira

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{k^2 + 2g\,(s - c)}}.$$

Désignons par θ l'angle MCB, qui sera positif quand le pendule se trouvera à gauche de CB, comme la droite CA, et négatif lorsque le pendule sera à droite de la verticale. Soit aussi α l'angle ACB, ou la valeur initiale de θ. On aura

$$s = a\,(\alpha - \theta) \quad v = \frac{ds}{dt} = -a\,\frac{d\theta}{dt},$$

en représentant par a la longueur CM ou CA du pendule. On aura, en même temps,

$$s = a \cos\theta, \quad c = a \cos\alpha;$$

et au moyen de ces valeurs, celle de dt deviendra

$$dt = \frac{-\,a d\theta}{\sqrt{k^2 + 2ga\,(\cos\theta - \cos\alpha)}}. \qquad (1)$$

Telle est donc la formule qu'il s'agira d'intégrer exactement ou par approximation.

181. Il n'y a qu'un cas dans lequel l'intégration sous forme finie soit possible, c'est lorsqu'on a

$$k^2 = 2ga\,(1 + \cos\alpha);$$

ce qui a lieu quand le mobile part du point A avec la vitesse qu'il aurait acquise en tombant d'une hauteur égale à ED ; E étant le point le plus élevé du cercle qu'il décrit. En faisant $\theta = 2\psi$, et observant que

$$1 + \cos 2\psi = 2 \cos^2\psi,$$

on a alors

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{d\psi}{\cos\psi}.$$

J'intègre, je détermine la constante arbitraire, de sorte qu'on ait $\psi = \frac{1}{2}\alpha$ quand $t = 0$, et je mets $\frac{1}{2}\theta$ à la place de ψ ; il vient

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\log\frac{(1 - \sin 1/2\,\theta)\,(1 + \sin 1/2\,\alpha)}{(1 + \sin 1/2\,\theta)\,(1 - \sin 1/2\,\alpha)}.$$

Si le point A coïncidait avec le point E, on aurait $\alpha = \pi$; ce qui rendrait infinie cette valeur de t, quel que fût l'angle θ. Cela signifie que le mobile ne quitterait pas le point E ; et en effet, dans ce cas, sa vitesse initiale serait nulle, et la tangente au point E étant horizontale, il y demeurerait en équilibre.

Le point B répondant à $\theta = 0$, on aura, dans tout autre cas,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\log\frac{1 + \sin 1/3\,\alpha}{1 - \sin 1/2\,\alpha},$$

pour le temps que le mobile emploiera à parcourir l'arc AB. Avec sa vitesse acquise en ce point, il s'élèvera sur la demi-circonférence BA'E ; mais, d'après ce qu'on a vu dans le nº 159, il devra employer un temps infini pour atteindre le point E : c'est ce qui a lieu effectivement ; car en faisant $\theta = -\pi$, on a $t = \infty$.

Quelle que soit la vitesse initiale k et l'angle α, la formule (1) pourra s'intégrer par les fonctions elliptiques ; en sorte que le temps des oscillations ou des révolutions du pendule se calculera toujours au moyen des tables numériques de ces fonctions ; mais, dans la pratique, on a seulement besoin de connaître la durée des oscillations très petites, que nous nous bornerons à considérer.

182. Pour que le pendule ne fasse que de petites oscillations de part et d'autre de la verticale CB, il faudra que l'angle α et la vitesse k soient peu considérables ; on pourra toujours rendre cette vitesse tout-à-fait nulle, en faisant partir le mobile d'un point un peu plus élevé que A, c'est-à-dire, en augmentant convenablement l'angle α ; on ne nuira donc pas à la généralité de la question en supposant $k = 0$; ce qui réduit l'équation (1) à

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}}. \qquad (2)$$

Par les formules connues, on a

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4.} - \text{etc.},$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4.} - \text{etc.}$$

Les angles α et θ étant très petits, par hypothèse, je néglige leurs quatrièmes puissances ; il en résulte simplement

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}.$$

En intégrant et observant que $\theta = \alpha$ quand $t = 0$, on en déduit

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ arc } \left(\cos = \frac{\theta}{\alpha}\right);$$

d'où l'on tire

$$\theta = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\alpha \sqrt{\frac{g}{a}} \sin t \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Ces formules montrent, conformément à ce qu'on a déjà vu (nº 159), que le pendule fera une suite indéfinie d'oscillations égales et isochrones de part et d'autre de la verticale CB : il reviendra, avec une vitesse nulle, au point A où l'on a $\theta = \alpha$, toutes les fois que $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ sera un multiple de 2π, et au point A', situé à la même hauteur que A et où l'on a $\theta = -\alpha$, toutes les fois que θ sera un multiple impair de π. En appelant T le temps qu'il emploiera à aller de l'un de ces points extrêmes à l'autre, c'est-à-dire, le temps d'une oscillation entière, on a

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Les durées des deux demi-oscillations, l'une descendante et l'autre ascendante, seront égales entre elles et à $\frac{1}{2}$ T.

En général, à deux instans séparés par un temps égal à T, le pendule occupera, des deux côtés de la verticale CB, des positions également éloignées de cette droite, et sera animé de vitesses égales et contraires ; car si l'on met $t + T$ à la place de t, dans les valeurs de θ et $\frac{d\theta}{dt}$, on voit qu'elles ne font que changer de signe.

Le pendule coïncide avec la verticale quand on a $\theta = 0$, ou t égal à un multiple impair de $1/2$ T ; il en résulte

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \alpha \sqrt{\frac{g}{a}},$$

et, par conséquent,

$$v = \pm \alpha \sqrt{ga},$$

pour la vitesse du mobile au point B. En appelant b la hauteur DB de son point de départ au-dessus de B, on aura

$$b = a(1 - \cos \alpha) = 1/2 a\alpha^2,$$

à cause que l'on néglige la quatrième puissance de α. Abstraction faite du signe, la vitesse acquise au point le plus bas sera donc

$$v = \sqrt{2gb};$$

ce qui est, comme cela devait être, la vitesse due à la hauteur b.

183. La valeur de T est, comme on voit, indépendante de l'angle α ; elle subsistera encore, et sera rigoureusement exacte, quand cette amplitude α sera infiniment petite. Si donc on écartait le pendule infiniment peu de la verticale, il emploierait pour y revenir un temps fini et égal à $1/2\,\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Dans ce mouvement, le mobile décrirait un espace infiniment petit dans un temps fini ; ce qui vient de ce que l'intensité de sa force accélératrice serait infiniment petite. En effet, cette force est la pesanteur décomposée suivant la tangente à la trajectoire ; or, dans l'étendue de l'arc infiniment petit qui aboutit au point le plus bas de cette courbe, la tangente fait avec la verticale un angle qui diffère d'un droit d'une quantité infiniment petite ; le cosinus de cet angle, par lequel il faut multiplier la pesanteur pour obtenir sa composante, est donc infiniment petit ; par conséquent, cette composante est aussi infiniment petite.

On peut étendre ce résultat aux oscillations d'un point matériel pesant sur une courbe quelconque, dont le plan osculateur au point le plus bas B est vertical ; car dans une étendue infiniment petite la courbe coïncide avec son cercle osculateur, et, dans une étendue seulement très petite, elle s'en écarte très peu ; d'où il suit que C étant le centre de ce cercle, la durée des oscillations très petites sur la courbe, de part et d'autre de son point B, est la même que pour un pendule simple dont C serait le point de suspension, et qui aurait pour longueur le rayon de courbure CB correspondant à ce point B. Les oscillations très petites ont donc une même durée indépendante de leur amplitude, sur toutes les courbes verticales qui ont la même courbure à leur point le plus bas. Lorsque le plan osculateur en ce point n'est pas vertical, il faut remplacer dans la valeur de T la gravité g par sa composante dans ce plan, laquelle est égale à $g \sin i$, en appelant i l'inclinaison du plan donné sur un plan horizontal.

184. Quand l'angle α a une grandeur finie et seulement très petite, la valeur précédente de T n'est qu'approchée.

En effet, si l'on conserve les quatrièmes puissances de α et de θ dans les valeurs de $\cos \alpha$ et $\cos \theta$, et qu'on les substitue dans la formule (2), on aura

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}\sqrt{1 - 1/12(\alpha^2 + \theta^2)}}.$$

A ce degré d'approximation, il faudra prendre

$$[1 - 1/12(\alpha^2 + \theta^2)]^{-1/2} = 1 + 1/24(\alpha^2 + \theta^2);$$

on aura donc

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}} + \frac{(\alpha^2+\theta^2)\,d\theta}{24\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}\right);$$

formule qui s'intègre par les règles connues. En intégrant depuis $\theta = \alpha$ jusqu'à $\theta = -\alpha$, pour avoir la durée T d'une oscillation entière, on trouve

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right);$$

ce qui montre que cette durée est un peu augmentée par la grandeur de l'amplitude.

Il en résulte que si l'on appelle n le nombre des oscillations infiniment petites d'un pendule quelconque dans un temps donné, et n' le nombre des oscillations du même pendule et dans le même temps, quand leur amplitude α est seulement très petite, on aura

$$n = n'\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right),$$

car le nombre n' doit diminuer dans le même rapport que la durée de chaque oscillation est augmentée par la grandeur de cette amplitude.

185. Quoiqu'on ait soin dans les différens usages du pendule, de faire en sorte que l'amplitude des oscillations soit très petite, ce qui rend toujours suffisante la correction relative à la grandeur de α qu'on vient de déterminer, il est bon, néanmoins, de connaître la série convergente par laquelle on peut exprimer la durée d'une oscillation, quelle que soit son amplitude.

Pour cela, soient z et C les sinus verses des angles θ et α, de sorte qu'on ait

$$1 - \cos\theta = z, \quad 1 - \cos\alpha = C;$$

on aura, en même temps,

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{2z - z^2}}.$$

La formule (2) deviendra

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{dz}{\sqrt{Cz - z^2}\,\sqrt{1 - 1/2z}};$$

et, pour en déduire la durée 1/2 T d'une demi-oscillation, il faudra intégrer depuis $z = C$, qui répond à $\theta = \alpha$, jusqu'à $z = 0$, qui répond à $\theta = 0$.

Or, en développant par la formule du binome, on a

$$\left(1 - \frac{1}{2}z\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{z}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^2}{4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^3}{8} + \text{etc.};$$

série dont le terme général est

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

et qui sera toujours convergente, à cause que z est constamment moindre que 2. Si donc on intervertit l'ordre de l'intégration, ce qui est permis en changeant en même temps le signe de dt; qu'on fasse ensuite, pour un nombre quelconque n ou zéro,

$$\int_0^C \frac{z^n dz}{\sqrt{Cz - z^2}} = A_n;$$

et qu'on double la valeur de $\frac{1}{2}$T, il en résultera

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(A_0 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}A_1 + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{4}A_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{8}A_3 + \text{etc.}\right).$$

Les valeurs des intégrales définies A_0, A_1, A_2, A_3, etc., sont liées entre elles de manière que l'une d'elles étant connue, il est facile d'en déduire successivement toutes les autres. En effet, on a, identiquement,

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{Cz - z^2}} = \int \frac{(z - 1/2C)\,z^{n-1}\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}} + \frac{C}{2}\int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}},$$

$$\int \frac{(z - 1/2C)\,z^{n-1}\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}} = -z^{n-1}\sqrt{Cz - z^2} + (n-1)\int z^{n-2}\sqrt{Cz - z^2}\,dz,$$

$$\int z^{n-2}\sqrt{Cz - z^2}\,dz = C\int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}} - \int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}};$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}} = -z^{n-1}\sqrt{Cz - z^2} - (n-1)\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}}$$
$$\frac{(2n-1)\,C}{2}\int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{Cz - z^2}},$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{\mathcal{C}z - z^2}} = -\frac{z^{n-1}}{n}\sqrt{\mathcal{C}z - z^2} + \frac{(2n-1)\mathcal{C}}{2n}\int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{\mathcal{C}z - z^2}}.$$

Aux deux limites $z=0$ et $z=\mathcal{C}$, on a $\sqrt{\mathcal{C}z - z^2}=0$; en passant aux intégrales définies, on aura, d'après cette dernière équation, $A_n = \frac{(2n-1)\mathcal{C}}{2n} A_{n-1}$.

Si l'on fait successivement $n=1, =2, =3$, etc., dans cette formule, on en déduit

$$A_1 = \frac{1}{2}\mathcal{C} A_0,$$

$$A_2 = \frac{3}{4}\mathcal{C} A_1 = \frac{1.3}{2.4}\mathcal{C}^2 A_0,$$

$$A_3 = \frac{5}{6}\mathcal{C} A_2 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathcal{C}^3 A_0,$$

etc.;

par conséquent, nous aurons généralement,

$$A_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\mathcal{C}^n A_0;$$

et quant à la valeur de A_0, on aura

$$A_0 = \int_0^{\mathcal{C}} \frac{dz}{\sqrt{\mathcal{C}z - z^2}} = \pi.$$

En substituant les valeurs de A_0, A_1, A_2, etc., dans celle de T, il en résulte

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\mathcal{C}}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)^3 + \text{etc.}\right],$$

pour la série qu'il s'agissait d'obtenir, et qui est essentiellement convergente, puisque $1/2\,\mathcal{C}$ est toujours moindre que l'unité.

Si l'on néglige la quatrième puissance de α, on aura $\mathcal{C} = 1/2\,\alpha^2$; il faudra réduire la série à ses deux premiers termes, et la valeur de T coïncidera avec celle du numéro précédent.

186. Considérons actuellement le mouvement du pendule simple dans un milieu résistant. En conservant toutes les notations précédentes, la composante de la pesanteur suivant la tangente MT, sera $g \sin \theta$, à cause que l'angle que cette droite fait avec la verticale MN est complément de l'angle MCB ou θ. Désignons par V la force accélératrice provenant de la résistance, laquelle est dirigée en sens contraire de cette composante $g \sin \theta$, et appelons s l'arc AM; l'équation du mouvement sera (n° 152)

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \sin \theta - V. \qquad (3)$$

On pourra faire différentes hypothèses sur la valeur de V en fonction de la vitesse du mobile; le plus simple est de la supposer proportionnelle à cette vitesse, de sorte que l'on ait

$$V = \frac{g}{k}\frac{ds}{dt},$$

en désignant par k une vitesse constante et donnée. On a aussi

$$s = a(\alpha - \theta),\ \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

si donc θ est, comme précédemment, un très petit angle, et que l'on néglige sa troisième puissance, l'équation (3) deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{k}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\theta = 0.$$

Son intégrale complète est

$$\theta = \left(c \cos t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}} + c' \sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}},$$

en représentant par c et c' les deux constantes arbitraires, par e la base des logarithmes népériens, et faisant, pour abréger,

$$\sqrt{1 - \frac{ga}{4k^2}} = \gamma.$$

Je détermine c et c' par les conditions $\theta = \alpha$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$, quand $t = 0$; ce qui donne

$$c = \alpha,\quad c' = \frac{\alpha\sqrt{ga}}{2\gamma k}.$$

Par conséquent, on aura

$$\theta = \alpha\left(\cos t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\sqrt{ga}}{2\gamma k}\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}},$$

et, en différentiant,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{a}}\left(\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}},$$

pour les formules qui font connaître, à un instant quelconque, la position du pendule et sa vitesse angulaire.

A la fin de chaque oscillation, on a $\frac{d\theta}{dt} = 0$; ce qui a lieu toutes les fois que $t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}$ est un multiple de π. Il s'ensuit donc que les oscillations sont isochrones, comme dans le vide, et qu'on a

$$T = \frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

pour la durée d'une oscillation entière; en sorte qu'elle est augmentée, par la résistance du milieu, dans le rapport de l'unité à la fraction γ.

Quant aux amplitudes des oscillations, elles diminuent continuellement à cause de l'exponentielle $e^{-\frac{gt}{2k}}$. En appelant a_n l'amplitude de la $n^{ième}$ oscillation, c'est-à-dire, en supposant qu'on ait $\theta = (-1)^n a_n$, quand $t = nT$, il en résultera

$$a_n = ae^{-\frac{n\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}};$$

ce qui montre que les amplitudes successives forment une progression géométrique décroissante, dont le rapport est $e^{-\frac{\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}}$.

Toutefois, ce mouvement oscillatoire suppose que γ soit une quantité réelle; et, en effet, c'est ce qui a lieu dans les expériences du pendule, qui n'a jamais une longueur extrêmement considérable, et dont la densité est toujours très grande eu égard à celle de l'air où il se meut : la vitesse k étant proportionnelle au rapport de la première densité à la seconde, elle est très grande par rapport à $1/2\sqrt{ga}$, et, conséquemment, γ est une quantité réelle qui diffère peu de l'unité. Si, au contraire, on avait $2k < \sqrt{ga}$, γ serait imaginaire et de la forme $\mathfrak{C}\sqrt{-1}$, en désignant par $\mathfrak{C}$ une quantité réelle; par les formules connues, les sinus et cosinus qui entrent dans l'expression de θ se changeraient en exponentielles; et cette transformation faite, on verrait que l'angle θ ne pourrait devenir nul qu'après un intervalle de temps infini; en sorte que le pendule approcherait indéfiniment de la verticale CB, sans pouvoir la dépasser ni même l'atteindre rigoureusement.

187. A mesure que les amplitudes des oscillations diminuent, l'expérience prouve qu'elles approchent de plus en plus de décroître dans l'air en progression géométrique : elles s'en écartent peu, par exemple, lorsque l'angle a est d'un tiers de degré ou au-dessous. L'expérience montre, de plus, que ce décroissement est très lent; ainsi, dans une expérience de Borda, où il avait lieu sensiblement en progression géométrique, l'amplitude ne se réduisait qu'aux deux tiers environ, après 1800 oscillations. En appliquant l'expression de a_n à cet exemple, on aura donc

$$e^{-\frac{1800\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}} = 2/3$$

et, par conséquent,

$$\frac{1800\pi\sqrt{ga}}{2k} = \gamma \log 3/2 = \gamma\,(0{,}40546);$$

mais on a

$$\frac{ga}{4k^2} = 1 - \gamma^2;$$

il en résultera donc

$$(1800)^2\pi^2(1-\gamma^2) = \gamma^2(0{,}40546)^2;$$

d'où l'on tire

$$\gamma = 1{,}00000000257\ldots,$$

ou à très peu près $\gamma = 1$; ce qui permet de négliger la résistance de l'air dans le calcul de la valeur de T.

On peut donc admettre que quand les oscillations sont très petites, la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse, comme nous venons de le supposer, et que cette résistance n'influe pas sensiblement sur leur durée. Mais lorsque les amplitudes sont un peu considérables, l'observation montre qu'elles ne décroissent plus en progression géométrique; en sorte qu'il devient nécessaire de faire une autre hypothèse sur la loi de la résistance.

188. Supposons cette force proportionnelle au carré de la vitesse, et prenons

$$V = \frac{g}{k^2}\frac{ds^2}{dt^2};$$

k étant une vitesse constante et donnée qui sera toujours très grande; en sorte que si l'on fait

$$\frac{2ga}{k^2} = \mu,$$

μ sera une très petite fraction. A cause de $ds = -ad\theta$, l'équation (3) deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\theta = 1/2\,\mu\frac{d\theta^2}{dt^2}; \qquad (4)$$

en la multipliant par $2d\theta$, intégrant et faisant

$$\int\frac{d\theta^2}{dt^2}d\theta = y, \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{dy}{d\theta},$$

nous aurons

$$\frac{dy}{d\theta} - \frac{2g}{a}\cos\theta - \mu y = 0;$$

équation linéaire du premier ordre, dont l'intégrale complète est

$$y = ce^{\mu\theta} + \frac{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{(1+\mu^2)a};$$

c étant la constante arbitraire et e la base des logarithmes népériens. Je la différentie par rapport à θ, et je remets $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ au lieu de $\frac{dy}{d\theta}$; il vient

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \mu ce^{\mu\theta} + \frac{2g(\cos\theta + \mu\sin\theta)}{(1+\mu^2)a};$$

ce qui est une intégrale première sous forme finie de l'équation (4).

Pour déterminer c, je suppose qu'on ait, comme précédemment, $\frac{d\theta}{dt} = 0$ quand $\theta = \alpha$; il en résultera

$$\mu c = -\frac{2g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{(1+\mu^2)a}e^{-\mu\alpha}.$$

Par conséquent, on aura, à un instant quelconque

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{(1+\mu^2)a}\left[\cos\theta + \mu\sin\theta - (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)e^{-\mu(\alpha-\theta)}\right]. \qquad (5)$$

Au point le plus bas, où l'on a $\theta = 0$, on aura donc

$$\frac{a^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{2ga}{1+\mu^2}\left[1 - (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)e^{-\mu\alpha}\right],$$

pour le carré de la vitesse acquise, laquelle est évidemment moindre que dans le vide.

En vertu de cette vitesse, le mobile montera sur l'arc BA′ jusqu'en un point A_1, moins élevé que A′, et pour lequel on aura $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Si l'on désigne par $-\alpha_1$ la valeur correspondante de θ, il en résultera

$$(\cos\alpha_1 - \mu\sin\alpha_1)e^{\mu\alpha_1} = (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)e^{-\mu\alpha};$$

et si l'on développe les exponentielles suivant les puissances de μ, et qu'on néglige le carré de cette fraction très petite, on aura

$$\cos\alpha_1 - \mu(\sin\alpha_1 - \alpha_1\cos\alpha_1) = \cos\alpha + \mu(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

La valeur de α_1 que l'on tirera de cette équation, différera très peu de α; je fais donc $\alpha_1 = \alpha - \delta$, et je néglige le carré de δ et le produit $\mu\delta$; il vient

$$\delta\sin\alpha = 2\mu(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

en sorte que l'on aura

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\mu}{\sin\alpha}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

pour la grandeur de θ, abstraction faite du signe, à la fin de la première oscillation.

Ce résultat ne suppose pas les oscillations très petites; mais si elles sont assez petites pour qu'on puisse négliger la quatrième puissance de α dans cette valeur de α_1, elle se réduira à

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\mu\alpha^3}{3}.$$

Parvenu au point A_1, le mobile redescendra, et il continuera ainsi à osciller de part et d'autre du point B, jusqu'à ce que les amplitudes de ses oscillations soient devenues sensiblement nulles. Si l'on appelle α_2 l'amplitude de la seconde demi-oscillation ascendante, il est évident qu'elle se déduira de α_1, comme on a déduit α_1 de α; en sorte que l'on aura

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{2\mu\alpha_1^3}{3}.$$

Et de même, si α_3, α_4, etc., sont les amplitudes successives des autres demi-oscillations ascendantes, on aura

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{2\mu\alpha_2^3}{3}, \quad \alpha_4 = \alpha_3 - \frac{2\mu\alpha_3^3}{3}, \quad \text{etc.};$$

ce qui montre qu'elles ne décroîtront plus en progression géométrique, comme dans le cas de la résistance proportionnelle à la vitesse.

189. Pour déterminer le temps qui répond à un angle θ, il faudra intégrer la valeur de dt tirée de l'équation (5); ce qui sera toujours possible par la méthode des quadratures, quand les valeurs numériques de α, μ, θ, seront données. Mais dans le cas des petites oscillations, on peut obtenir, en série convergente, la valeur de θ en fonction de t, et réciproquement.

Je supposerai toujours la vitesse initiale du mobile égale à zéro; la valeur de θ à un instant quelconque, sera une fonction de t et α qui devra se réduire à zéro dans le cas de $\alpha = 0$; je la représenterai donc par

$$\theta = \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 + \alpha^3\theta_3 + \text{etc.};$$

θ_1, θ_2, θ_3, etc., étant des coefficiens indépendans de α. En substituant cette série dans l'équation (4), développant les deux membres suivant les puissances de α, et égalant ensuite les coefficiens des mêmes puissances, on formera une série

d'équations différentielles du second ordre, qui serviront à déterminer les inconnues θ_1, θ_2, θ_3, etc. De plus, pour qu'on ait $\theta = \alpha$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$, quand $t = 0$ et quel que soit α, il faudra que les valeurs initiales de θ_2, θ_3, etc., $\frac{d\theta_2}{dt}$, $\frac{d\theta_3}{dt}$, etc., soient toutes nulles, et que celles de θ_1 et $\frac{d\theta_1}{dt}$ soient l'unité et zéro; et c'est d'après ces conditions qu'on déterminera les constantes arbitraires qui seront contenues dans les intégrales complètes de cette suite d'équations. De cette manière, on calculera autant de termes que l'on voudra de la série précédente. Nous bornerons l'approximation au carré de α, et nous négligerons le cube et les puissances supérieures de cette quantité.

Alors, on a simplement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \alpha^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2},$$

$$\sin\theta = \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2,$$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d\theta_1^2}{dt^2};$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (4), et égalant les coefficiens de α et de α^2 dans ses deux membres, il vient

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta_1 = 0,$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta_2 = \frac{1}{2}\mu\frac{d\theta_1^2}{dt^2}.$$

En intégrant la première de ces deux équations, et déterminant les deux constantes arbitraires, de sorte qu'on ait $\theta_1 = 0$ et $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$, quand $t = 0$, nous aurons

$$\theta_1 = \cos t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Il en résultera

$$\frac{d\theta_1^2}{dt^2} = \frac{g}{a}\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{1}{2}\frac{g}{a}\left(1 - \cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right);$$

la seconde équation deviendra donc

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta_2 = \frac{g\mu}{4a}\left(1 - \cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right);$$

et l'on aura

$$\theta_2 = -\frac{\mu}{3}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{12}\mu\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

pour son intégrale assujettie aux conditions $\theta_2 = 0$ et $\frac{d\theta_2}{dt} = 0$, quand $t = 0$.

Au moyen de ces expressions de θ_1 et θ_2, celle de θ devient

$$\theta = \left(\alpha - \frac{\alpha^2\mu}{3}\right)\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\alpha^2\mu}{4} + \frac{\alpha^2\mu}{12}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

à cause de $v = -a\frac{d\theta}{dt}$, on aura, en même temps,

$$v = \left(\alpha - \frac{\alpha^2\mu}{3}\right)\sqrt{ga}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\alpha^2\mu\sqrt{ga}}{6}\sin 2t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

et ces formules feront connaître la position et la vitesse du mobile à un instant quelconque.

190. Si nous remplaçons, dans la dernière, $\sin 2t\sqrt{\frac{g}{a}}$ par $2\sin t\sqrt{\frac{g}{a}}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}}$, l'équation $v = 0$, qui a lieu à la fin de chaque oscillation, prendra la forme

$$\left(1 - \frac{\alpha\mu}{3} + \frac{\alpha\mu}{3}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\sin t\sqrt{\frac{g}{a}} = 0.$$

L'angle α étant très petit, le premier facteur ne peut être nul; le second est zéro toutes les fois que

$t\sqrt{\frac{g}{a}}$ est un multiple de π. Il s'ensuit donc que l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux vitesses nulles et consécutives, ou la durée T d'une oscillation entière, est

$$T = \pi\sqrt{\frac{g}{a}};$$

en sorte que la résistance de l'air, proportionnelle au carré de la vitesse, n'influe aucunement sur cette durée.

Cependant, elle augmente le temps que le mobile emploie à atteindre le point B. En effet, en le désignant par t', et faisant $\theta = 0$, on a

$$\left(1 - \frac{a\mu}{3}\right)\cos t'\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{a\mu}{4} + \frac{a\mu}{12}\cos 2t'\sqrt{\frac{g}{a}} = 0.$$

La plus petite valeur de $t'\sqrt{\frac{g}{a}}$ qui satisfasse à cette équation diffère très peu de $1/2\,\pi$; soit donc

$$t'\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{1}{2}\pi + \delta;$$

en négligeant le carré de δ et le produit $a\delta$, on aura

$$\delta = 1/6\, a\mu$$

et, par conséquent,

$$t' = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{a\mu}{3\pi}\right).$$

La résistance de l'air augmente donc la durée de la première demi-oscillation descendante, dans le rapport de $1 + \frac{a}{3\pi}$ à l'unité; et puisqu'elle n'influe pas sur la durée de l'oscillation entière, il faut qu'elle diminue, dans le même rapport, la durée de la demi-oscillation ascendante.

En substituant cette valeur de t' dans celle de v, et négligeant le cube de a, il vient

$$v = \left(1 - \frac{a\mu}{3}\right) a\sqrt{ga};$$

d'où l'on conclut que la vitesse acquise au point le plus bas est diminuée par la résistance de l'air, dans le rapport de $1 - \frac{a\mu}{3}$ à l'unité.

Si l'on désigne par $-a_1$ la valeur de θ qui a lieu à la fin de la première oscillation entière, et qui répond à $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi$, on aura

$$a_1 = a - \frac{2\mu a^2}{3},$$

comme précédemment.

Ces différens résultats sont indépendans de la grandeur du coefficient μ de la résistance, et supposent seulement l'angle a très petit; ils conviennent également au mouvement du pendule dans un fluide aériforme et dans un liquide, pourvu que le coefficient μ soit déterminé pour chaque milieu en particulier. Dans le cas de a très petit, il est inutile d'examiner l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au cube ou à une puissance supérieure de la vitesse; car il n'en pourrait résulter, dans les valeurs de θ et v, que des termes dépendans des puissances de a supérieures au carré, que l'on a regardés comme négligeables dans les calculs précédens. En rapprochant ce qu'on vient de trouver de ce qui a été dit dans le n° 187, on en conclut donc que la résistance de l'air n'influe pas sur la durée des très petites oscillations du pendule, pour lesquelles on néglige la correction relative à la grandeur de l'amplitude (n° 184). Quand on tient compte de cette correction, la résistance a une petite influence, à cause qu'elle fait varier les amplitudes pendant la durée du mouvement.

191. Il ne suit pas de là que la durée des oscillations d'un corps pesant, quelque petite qu'on la suppose, soit la même dans l'air que dans le vide; car ce fluide, par la pression qu'il exerce sur le mobile, augmente cette durée en diminuant la pesanteur. D'abord, on sait par l'expérience, et nous démontrerons dans l'*Hydrostatique*, qu'un corps en repos, plongé dans un fluide, y perd une partie de son poids, égale au poids du fluide dont il occupe la place. Ainsi, P étant le poids de ce corps dans le vide, P' son poids dans l'air, Π le poids d'un volume d'air égal à celui du corps, on a

$$P' = P - \Pi$$

En appelant ρ le rapport de la densité de l'air à celle du corps, g la gravité dans le vide, g' ce que cette force devient dans l'air, et m la masse du corps, on a aussi

$$\Pi = P\rho, \quad P = mg, \quad P' = mg';$$

on aura donc

$$g' = g\,(1 - \rho).$$

Or, si l'on désigne par T et T' les durées des petites oscillations d'un même pendule qui répon-

dent aux deux forces accélératrices g et g', on aura

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},\quad T' = \pi\sqrt{\frac{a}{g'}},$$

et, par conséquent,

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\rho}}.$$

Soit aussi a' la longueur du pendule soumis à la gravité g', qui fait ses oscillations dans le même temps que le pendule soumis à la gravité g et dont la longueur est a; il faudra qu'on ait

$$\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{\frac{a'}{g'}};$$

d'où l'on tire

$$a' = a\,(1-\rho).$$

Donc, par la seule considération de la perte de poids à l'état de repos, la durée des oscillations dans l'air se trouve augmentée dans le rapport de l'unité à $\sqrt{1-\rho}$ pour un même pendule, et la longueur du pendule simple se trouve diminuée dans le rapport de $1-\rho$ à l'unité pour une même durée.

De plus, M. Bessel a fait voir, par l'expérience, que la perte de poids qu'un même corps éprouve dans l'air n'est pas la même, quand il est en repos et lorsqu'il a un mouvement oscillatoire. Elle augmente dans le second cas; et il en résulte qu'il faut, dans les formules précédentes, multiplier ρ par un facteur f plus grand que l'unité, et dépendant de la forme du mobile. Je suis parvenu à ce même résultat dans un Mémoire *sur les Mouvemens simultanés d'un pendule et de l'air environnant* *; et, d'après mon analyse, on a $f = \frac{3}{2}$ quand le pendule consiste, comme celui de Borda, en une sphère suspendue à l'extrémité d'un fil très mince, dont la longueur est très considérable par rapport au diamètre de cette sphère; en sorte qu'alors il faut augmenter de moitié la correction relative à la densité de l'air, que l'on faisait subir, avant l'observation de M. Bessel, à la durée des petites oscillations et à la longueur du pendule simple. Dans tous les cas, le coefficient f est toujours indépendant de la densité du pendule, ainsi que de la densité et de la nature du fluide dans lequel il oscille, de manière qu'on peut toujours le déterminer par l'expérience, en comparant les durées des oscillations de deux pendules de même forme et de densités différentes, dans un même fluide, ou bien d'un même pendule dans deux fluides différens, tels que l'air et l'eau, par exemple.

192. Maintenant, soit n le nombre des oscillations infiniment petites qu'un pendule quelconque ferait dans le vide pendant un temps donné τ. Pour déduire ce nombre, par la règle du n° 184, de celui des oscillations très petites qui est donné par l'observation, et afin d'avoir égard à la variation des amplitudes pendant ce temps τ, on a coutume de prendre pour l'angle α la moyenne des amplitudes extrêmes qui sont aussi données par l'observation. Cela étant, la durée T d'une oscillation infiniment petite de ce pendule sera

$$T = \frac{\tau}{n};$$

et l'erreur que l'on pourra commettre sur la mesure du temps τ aura d'autant moins d'influence sur cette valeur de T, que le nombre n sera plus considérable. D'après la forme et les dimensions du corps oscillant, on déterminera, par la formule qui sera donnée dans un autre chapitre, la longueur du pendule simple, dont le mouvement est le même que celui de ce corps; on réduira cette longueur, comme on vient de l'expliquer tout à l'heure, à ce qu'elle serait dans le vide; et si on la désigne par a après cette réduction, et qu'on représente par g la gravité dans le vide, on aura

$$\frac{\tau}{n} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}};$$

d'où l'on tire

$$g = \frac{\pi^2 n^2 a}{\tau^2}. \qquad (a)$$

C'est au moyen de cette formule que l'on détermine avec une extrême précision, en chaque lieu de la terre, la mesure de la pesanteur, ou la vitesse g que les corps pesans acquièrent en tombant verticalement dans le vide, pendant une unité de temps. D'après l'expérience faite par Borda, à l'Observatoire de Paris, avec un pendule d'environ 2 mètres de longueur, on a

$$a = 0^m,993855,$$

en prenant la seconde pour unité; et l'on en conclut

$$g = 9^m,80896,$$

en ce lieu de la terre, c'est-à-dire, à une latitude de 48° 50′ 14″.

M. Bessel ayant fait osciller successivement des corps de toutes sortes de matières, tels que des métaux, de l'ivoire, du marbre, des pierres météoriques, etc., a constamment trouvé des valeurs de g sensiblement égales, les plus grandes différences, de part et d'autre de la valeur moyenne, s'élevant à peine à un cent-millième de cette valeur, et pouvant être attribuées aux erreurs inévitables de l'observation. Il ne peut donc rester aucun doute sur la parfaite égalité de l'attraction exercée par la terre sur tous les corps, quelle qu'en

* *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome XI.

soit la nature, qui sont situés en un même lieu de sa surface; car cette égalité résulte de celle des valeurs de la pesanteur g, puisque cette force est l'excès de l'attraction terrestre sur la composante verticale de la force centrifuge, commune à tous ces corps.

193. En considérant la surface de la terre comme le prolongement du niveau des mers en équilibre, on démontre, dans la *Mécanique céleste*, que la variation, à cette surface, de la longueur du pendule simple qui fait chaque oscillation dans une unité de temps, est proportionnelle au cosinus du double de la latitude; en sorte qu'en désignant par λ cette longueur en un lieu dont la latitude est ψ, on doit avoir

$$\lambda = l\,(1 - \omega \cos 2\psi); \qquad (b)$$

l et ω étant des constantes déterminées par l'observation. On démontre aussi que le coefficient ω est lié à l'aplatissement du sphéroïde terrestre par l'équation

$$2\omega + \delta = 5/2\, r,$$

dans laquelle on appelle δ cet aplatissement, de sorte que le rayon de l'équateur et celui du pôle soient entre eux comme $1 + \delta$ et l'unité, et où l'on désigne par r le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, qui a lieu à l'équateur et dont la valeur est (n° 177)

$$r = \frac{1}{289}.$$

La formule (b) est, en effet, confirmée par l'expérience quand on fait abstraction des circonstances locales qui peuvent influer, comme on le verra par la suite, sur l'attraction de la terre et sur la longueur du pendule. L'ensemble des observations faites à différentes latitudes donne

$$\omega = 0{,}002588;$$

ce qui suppose δ à très peu près égal à r. La constante l est la valeur de λ correspondante à $\psi = 45°$; elle diffère peu de celle qui répond à la latitude de Paris; et, d'après celle-ci, on a

$$0^m{,}993855 = l\,[1 + 0{,}002588.\sin(7°\,40'\,28'')];$$

d'où l'on tire

$$l = 0^m{,}993512.$$

Si l'on fait $n = 1$ et $\tau = 1$ dans la formule (a); que l'on y mette successivement l et λ à la place de a, et qu'on désigne par p et ϖ les valeurs correspondantes de g, on aura

$$p = \pi^2 l, \qquad \varpi = \pi^2 \lambda;$$

on aura donc

$$p = 9^m{,}80557,$$

et, à une latitude quelconque,

$$\varpi = p\,(1 - 0{,}002588 \cos 2\psi).$$

En observant que

$$\cos 2\psi = 2 \cos^2 \psi - 1,$$

on voit que la diminution de la pesanteur, en allant du pôle à l'équateur, sera proportionnelle au carré du cosinus de la latitude, conformément à l'énoncé du n° 178.

En transportant un même pendule en différens lieux de la terre, on voit, par l'équation (a), que les nombres n de ses oscillations, dans un même temps τ, varieront proportionnellement à la racine carrée de la gravité. Ainsi, par exemple, une horloge réglée, à Paris, sur le mouvement diurne de la terre, et transportée ensuite à l'équateur, retardera sur ce mouvement. En appelant n et n' les nombres des oscillations de son pendule en un jour sidéral dans ces deux lieux de la terre, on aura

$$n = 86164, \quad n' = n\sqrt{\frac{1 - 0{,}002588}{1 + 0{,}002588 \sin(7°40'28'')}},$$

et, par conséquent,

$$n' = 86037;$$

en sorte que le retard sera d'environ 127 secondes en 24 heures. C'est l'observation de ce retard qui a mis en évidence, pour la première fois, la variation de la pesanteur à la surface de la terre.

§ II. *Mouvement sur la cycloïde.*

195. Soit ABC (fig. 46) la trajectoire d'un point matériel pesant, dont le plan est vertical. Supposons que ce mobile parte du point quelconque D, sans vitesse initiale, et qu'il soit en M au bout du temps t; des points D et M abaissons des perpendiculaires DE et MP sur la verticale passant par le point B, qui est le plus bas de la courbe; en faisant $EP = z$, et désignant par v la vitesse acquise au point M, et par g la gravité, nous aurons (n° 159)

$$v = \sqrt{2gz},$$

si l'on suppose que la pesanteur soit la seule force qui agisse sur le mobile. Soit aussi s l'arc BM; comme il décroît quand le temps augmente, on aura

$$v = -\frac{ds}{dt};$$

et si l'on fait

$$EB = h, \quad PB = z = h - s,$$

il en résultera

$$\sqrt{2g}\,dt = -\frac{ds}{\sqrt{h - z}}, \qquad (1)$$

quelle que soit la courbe donnée.

Cette courbe étant, par hypothèse, une cycloïde, on aura (n° 73)

$$s^2 = 4az,$$

en désignant par a le diamètre BF de son cercle générateur. On aura donc

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt = -\frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}},$$

et, en intégrant,

$$t\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{2x - h}{h}\right):$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, afin qu'on ait $t = 0$ à l'origine du mouvement, ou quand $x = h$.

Si l'on appelle t' le temps que le mobile emploie à atteindre le point B qui répond à $x = 0$, on aura

$$t'\sqrt{\frac{2g}{g}} = \text{arc}\,(\cos = -1) = \pi,$$

et, par conséquent,

$$t' = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

Ce temps est, comme on voit, indépendant de la hauteur h du point de départ D du mobile, au-dessus du point le plus bas B; en sorte que cette propriété, qui a lieu par approximation dans toutes les courbes pour une hauteur h très petite, est rigoureusement vraie dans la cycloïde, quelle que soit cette hauteur, toujours moindre que a ou BF. Il en résulte que tous les mobiles, partis en même temps de différens points de la cycloïde, arriveront en même temps à son point le plus bas.

On aura $\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$ pour le temps d'une oscillation entière de part et d'autre du point B; or, on voit que ce temps est celui des oscillations très petites du pendule dont la longueur $2a$ est le rayon de courbure de la cycloïde en ce point (n° 72); ce qui s'accorde avec le résultat du n° 183, relatif à la durée des petites oscillations sur une courbe quelconque, laquelle durée est la même, dans le cas de la cycloïde, que celles des oscillations d'une amplitude quelconque.

195. Le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DB de la cycloïde est encore indépendant de la longueur de cet arc, quand le mouvement a lieu dans un milieu résistant, et que la résistance est supposée proportionnelle à la première puissance de la vitesse.

En effet, représentons cette force par $\frac{gv}{k}$, comme dans le n° 186; la composante de la pesanteur suivant la tangente MT, est $g\frac{dx}{ds}$, en observant que $\frac{dx}{ds}$ est le cosinus de l'angle TMN que fait cette droite avec la verticale MN; la force qui agit au point M, et qui tend à diminuer l'arc BM ou s, sera donc la différence $g\frac{dx}{ds} - g\frac{v}{k}$; par conséquent, on aura pour l'équation du mouvement

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\left(\frac{dx}{ds} - \frac{v}{k}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{k}\frac{ds}{dt} + \frac{g}{2a}s = 0,$$

à cause de

$$v = -\frac{ds}{dt}, \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{s}{2a}.$$

Je suppose qu'à l'origine du mouvement, ou quand $t = 0$, la vitesse v soit nulle, et qu'on ait $s = \alpha$; en déterminant les deux constantes arbitraires d'après ces conditions, et faisant, pour abréger,

$$\sqrt{1 - \frac{ga}{2k^2}} = \gamma,$$

l'intégrale de l'équation précédente sera (n° 186)

$$s = \alpha\left(\cos t\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} + \frac{\sqrt{2ga}}{2\gamma k}\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}}.$$

Si donc on appelle t' le temps qui répond au point B ou à $s = 0$, on aura

$$\cos t'\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} + \frac{\sqrt{2ga}}{2\gamma k}\sin t'\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} = 0;$$

équation d'où l'on tirera une valeur de t' indépendante de α; ce qu'il s'agissait de trouver

Si la résistance est très petite, ou la vitesse k très grande, on aura $\gamma = 1$, à très peu près; et l'équation précédente donnera

$$t'\sqrt{\frac{g}{2a}} = \frac{1}{2}\pi + \frac{\sqrt{2ga}}{2k};$$

ce qui montre que le temps t' est un peu augmenté par cette résistance.

196. Prolongeons la droite BF jusqu'en O, d'une quantité égale à BF; ce point O sera le centre de

courbure de la cycloïde au point B; et si l'on trace les deux demi-cycloïdes OA et OC, tangentes aux droites OB et AC, et ayant OF pour diamètre de leur cercle générateur, OA sera la développante de AB, et OC celle de BC (nº 72); par conséquent, un fil d'une longueur constante OB ou $2a$, attaché au point O, et qui s'enveloppera successivement sur les deux courbes OA et OC, tracera par son autre extrémité la cycloïde ABC.

Cela fournit un moyen de construire un pendule cycloïdal. Pour cela, supposons que les courbes OA et OC soient tracées en relief, et que OB soit un fil inextensible et parfaitement flexible, attaché au point fixe O; attachons aussi un corps pesant à son autre extrémité B, puis écartons ce fil de la position verticale, de sorte qu'il s'enveloppe, en tout ou en partie, sur l'une des courbes OA et OC, et que sa partie non enveloppée soit une droite tangente à cette courbe : en abandonnant ensuite le mobile à lui-même, l'extrémité inférieure du fil décrira la courbe ABC; et, d'après le nº 194, la durée des oscillations de ce pendule, dans le vide, sera rigoureusement, et constamment indépendante de leur amplitude. Mais ce moyen ne serait susceptible d'aucune précision dans la pratique; et, d'ailleurs, l'isochronisme des grandes oscillations n'aurait plus lieu dans l'air, la résistance de ce fluide n'étant point alors proportionnelle à la simple vitesse.

197. On appelle *tautochrone* toute courbe sur laquelle un point matériel pesant parvient toujours dans un même temps au point le plus bas, quel que soit le point de cette courbe d'où il est parti. Ainsi dans le vide, la cycloïde est une courbe tautochrone; et, de plus, on va voir qu'elle est alors la seule courbe de cette espèce.

Si l'on appelle t' le temps que le mobile emploie à aller, sans vitesse initiale, du point D au point le plus bas B, sur une courbe quelconque ADB, la valeur de $t'\sqrt{2g}$ sera donnée par l'intégrale de la formule (1), prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = 0$, ou, ce qui est la même chose, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$, en changeant le signe de cette formule; on aura donc

$$t'\sqrt{2g} = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}};$$

et pour trouver la courbe tautochrone, il s'agit de déterminer s en fonction de x, de manière que cette valeur de $t'\sqrt{2g}$ soit indépendante de h.

Or, je suppose cette fonction inconnue développée suivant les puissances ascendantes de x, de sorte qu'on ait

$$s = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.};$$

A, B, C, etc., α, β, γ, etc., étant des coefficiens et des exposans indéterminés. Comme l'abscisse x et l'arc s ont leur origine au même point B, on devra avoir en même temps $x = 0$ et $s = 0$; il faut donc que tous les exposans α, β, γ, etc., soient positifs, et qu'aucun d'eux ne soit zéro. On voit aussi, *à priori*, que le plus petit d'entre eux devra être moindre que l'unité; car le point B étant, par hypothèse, le plus bas de la courbe demandée, la tangente y est horizontale ou perpendiculaire à l'axe des x; ce qui exige qu'on ait $\frac{ds}{dx} = \infty$, quand $x = 0$

En prenant la différentielle de cette série, et la substituant à la place de ds dans la formule précédente, il vient

$$t'\sqrt{2g} = A\alpha\int_0^h \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{h-x}} + B\beta\int_0^h \frac{x^{\beta-1}\,dx}{\sqrt{h-x}} + C\gamma\int_0^h \frac{x^{\gamma-1}\,dx}{\sqrt{h-x}} + \text{etc.}$$

Je fais $x = hx'$ et $dx = hdx'$; les limites des intégrales relatives à cette nouvelle variable x' seront zéro et l'unité; on aura, par exemple,

$$\int_0^h \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{h-x}} = h^{\alpha-1/2}\int_0^1 \frac{x'^{\alpha-1}\,dx'}{\sqrt{1-x'}};$$

et si nous faisons, pour abréger,

$$\int_0^1 \frac{x'^{\alpha-1}\,dx'}{\sqrt{1-x'}} = A', \int_0^1 \frac{x'^{\beta-1}\,dx'}{\sqrt{1-x'}} = B', \text{etc.},$$

il en résultera

$$t'\sqrt{2g} = \alpha AA'h^{\alpha-1/2} + \beta BB'h^{\beta-1/2} + \gamma CC'h^{\gamma-1/2} + \text{etc.}$$

Il est important d'observer qu'aucune de ces intégrales A', B', C', etc., ne peut être nulle; car les valeurs des différentielles dont elles sont les sommes (nº 13) ne changent pas de signe entre les limites des intégrations : ces valeurs sont toutes positives, et par conséquent aussi celles des intégrales.

Maintenant, il est évident que la valeur de t' ne peut être indépendante de h, à moins que tous les termes de la série précédente ne soient nuls, excepté celui dans lequel l'exposant de h est zéro, ou qui répond à un des exposans α, β, γ, etc., égal à $\frac{1}{2}$. Supposons que ce terme soit le premier, ou qu'on ait $\alpha = \frac{1}{2}$. Pour que le second terme disparaisse, il faudra que le produit $\beta BB'$ soit nul; ce qui exige que B soit zéro, puisque β et B' ne le sont pas. On verra de même que les autres coefficiens C, D, etc., sont aussi égaux à zéro; de sorte que l'équation de la tautochrone se réduit à celle-ci:

$$s = Ax^{1/2}, \quad \text{ou} \quad s^2 = A^2 x,$$

qui appartient à une cycloïde, dont la base est horizontale et dont le sommet est au point B que le mobile atteint toujours dans le même temps.

En désignant par a le diamètre du cercle générateur, on aura $A^2 = 4a$, et par conséquent

$$t\sqrt{2g} = A'\sqrt{a}.$$

A cause de $a = \frac{1}{2}$, on a d'ailleurs

$$A' = \int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{x' - x'^2}} = \pi;$$

on aura donc

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}},$$

comme dans le n° 194.

198. C'est encore la cycloïde que l'on trouve quand on cherche la *brachystochrone* dans le vide, c'est-à-dire, la courbe AMB (fig. 47) qu'un point matériel pesant doit suivre pour aller dans le temps le plus court, sans vitesse initiale, du point donné A au point B aussi donné.

Pour déterminer cette courbe, soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires du point M où se trouve le mobile au bout du temps t; soit aussi s l'arc AM qu'il a parcouru. En supposant que l'axe des x soit vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, et désignant par a la valeur de x au point A, la vitesse $\frac{ds}{dt}$, acquise en M, sera la vitesse due à la hauteur $x - a$; en représentant la gravité par g, on aura donc

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x - a)};$$

et en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = u,$$

de sorte qu'on ait $ds = udx$, il en résultera

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{udx}{\sqrt{x - a}}.$$

Donc, en appelant c la valeur de x au point B, et t' le temps que le mobile emploiera à aller du point A au point B, nous aurons

$$t'\sqrt{2g} = \int_a^c \frac{udx}{\sqrt{x - a}}.$$

Ainsi, il s'agira de déterminer la courbe pour laquelle cette intégrale est un *minimum*; mais, pour plus de généralité, je considérerai l'intégrale

$$U = \int_a^c Xudx,$$

dans laquelle X est une fonction donnée de x; ce qui nous servira, par la suite, à résoudre un autre problème du même genre : dans celui dont il s'agit maintenant, on prendra $(x - a)^{-\frac{1}{2}}$ pour X.

199. Désignons par i une quantité constante et infiniment petite, et par δy et δz deux fonctions arbitraires de x, assujetties seulement à la condition d'être nulles pour $x = a$ et pour $x = c$, et de ne pas devenir infinies pour les valeurs intermédiaires de x. Soient U' et u' ce que deviennent U et u lorsqu'on y met $y + i\delta y$ et $z + i\delta z$ à la place de y et z, de sorte qu'on ait

$$U' = \int_a^c Xu'dx;$$

intégrale qui répondra à une autre courbe AM'B, passant, comme la courbe demandée AMB, par les points A et B, et s'écartant infiniment peu de celle-ci. Nous aurons aussi

$$U' - U = \int_a^c X(u' - u)\,dx;$$

et, d'après la propriété de la courbe AMB, il faudra que cette différence U' — U soit positive, quelles que soient les valeurs de δy et δz, et quelque signe qu'on donne à i. Or, en développant la différence $u' - u$ suivant les puissances de i, et désignant par $i\delta u$ le premier terme de son développement, le premier terme de celui de U' — U sera $i\int_a^c X\delta udx$; d'où l'on conclut qu'on devra avoir

$$\int_a^c X\delta udx = 0, \qquad (a)$$

sans quoi la différence U' — U changerait de signe en même temps que i.

Cette condition est commune au *minimum* et au *maximum* de U. Quand elle sera remplie, la différence U' — U sera en général, infiniment petite du second ordre; elle aura le même signe que le coefficient de i^2 dans son développement; par conséquent, il y aura *maximum* ou *minimum*, selon que ce coefficient sera négatif ou positif. Mais, comme il est évident que le temps t' n'est pas susceptible d'un *maximum*, ce coefficient sera certainement positif dans le problème de la *brachystochrone*, et il suffira de satisfaire à la condition exprimée par l'équation (a).

La quantité $i\delta u$ n'est autre chose que la différentielle de u, prise par rapport à y et z, et dans laquelle leurs accroissemens sont représentés par $i\delta y$ et $i\delta z$. En supprimant le facteur i, commun à $i\delta u$ et à sa valeur, on aura donc

$$\delta u = \frac{1}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{1}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx};$$

en sorte que l'équation (a) deviendra

$$\int_a^c \frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}dx + \int_a^c \frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}dx = 0.$$

Mais en intégrant par partie, et observant que les quantités δy et δz sont nulles, par hypothèse, aux deux limites $x = a$ et $x = c$, on a

$$\int_a^c \frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}dx = -\int_a^c \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta y dx,$$

$$\int_a^c \frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}dx = -\int_a^c \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\delta z dx;$$

ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$\int_a^c \left[\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta y + \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\delta z\right]dx = 0.$$

Or, δy et δz étant des fonctions arbitraires de x, cette intégrale ne peut être nulle, à moins que la quantité comprise sous le signe $\int$ ne le soit elle-même; par conséquent, on aura

$$\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta y + \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\delta z = 0. \quad (b)$$

200. Si la courbe demandée AMB et la courbe quelconque AM'B doivent être tracées sur une surface donnée dont l'équation soit $L = 0$, il faudra que les valeurs de y et z en fonction de x, qu'il s'agit de déterminer, et ces valeurs augmentées de δy et δz, satisfassent successivement à cette équation; d'où l'on conclut

$$\frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z = 0;$$

au moyen de quoi l'on éliminera, de l'équation (b), l'une des deux quantités δy et δz : l'autre s'en ira en même temps, et l'on aura

$$\frac{dL}{dz}\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} - \frac{dL}{dy}\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = 0.$$

Cette dernière équation et $L = 0$ seront, dans ce cas, les deux équations de la courbe demandée, et pourront servir, par exemple, à déterminer la courbe de la plus vite descente sur une surface donnée.

Si, au contraire, le *minimum* de U doit avoir lieu entre toutes les courbes qui aboutissent aux points A et B, et ne sont assujetties à se trouver sur aucune surface particulière, les quantités δy et δz seront arbitraires et indépendantes entre elles. Il faudra donc que leurs coefficiens soient séparément nuls dans l'équation (b), qui se décomposera ainsi en deux autres, savoir :

$$\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dy}\right)}{dx} = 0;$$

c'est ce cas que nous nous bornerons à considérer.

En intégrant et désignant par a et a' les deux constantes arbitraires, nous aurons

$$\frac{X}{u}\frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{X}{u}\frac{dz}{dx} = a', \quad (c)$$

et, par conséquent,

$$a'\frac{dy}{dx} - a\frac{dz}{dx} = 0.$$

Intégrant de nouveau, et désignant par γ une troisième constante arbitraire, il vient

$$a'y - az = \gamma;$$

ce qui montre que la courbe demandée sera plane et comprise dans un plan perpendiculaire à celui des y et z. Pour simplifier, je prends le plan de cette courbe pour celui des x et y; on aura alors

$$u = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

et l'on aura seulement à considérer la première équation (c), qui deviendra

$$Xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2};$$

d'où l'on déduit

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{X^2 - a^2}} \quad (d)$$

Il ne restera donc plus qu'à intégrer cette formule, ce qui dépendra de la forme de la fonction X, et ensuite à déterminer a et la nouvelle constante arbitraire, introduite par cette intégration, d'après la condition que la courbe demandée passe par les deux points donnés A et B.

201. Avant d'aller plus loin, soit c une constante quelconque, et supposons qu'on mette $X + c$ à la place de X dans les formules précédentes. L'intégrale U deviendra

$$U = \int_a^c X\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}dx + c\int_a^c \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}dx;$$

et la valeur de y, qui le rend un *minimum*, sera donnée par l'équation

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(X + c)^2 - a^2}}. \qquad (e)$$

Or, cette somme d'intégrales que U représente étant un *minimum*, en considérant toutes les courbes qui aboutissent aux points A et B, il est évident que la première intégrale

$$\int_a^c X\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx$$

sera un *minimum*, en considérant seulement, parmi toutes ces courbes, celles qui répondent à une même valeur de la seconde intégrale.

Cette remarque fort simple permet d'étendre immédiatement aux problèmes de *maximum* ou de *minimum* relatif, les solutions des problèmes de *maximum* ou de *minimum* absolu ; nous en verrons une application par la suite.

Comme ici la seconde intégrale contenue dans U est la longueur de la courbe cherchée, il s'ensuit que l'équation (e) servira à déterminer, entre toutes les courbes d'égale longueur, ou *isopérimètres*, celle qui répond au *minimum* ou au *maximum* de la première intégrale. En appelant l la longueur donnée et commune à toutes les courbes, on aura

$$\int_a^c \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx = l\,;$$

condition à laquelle on satisfera au moyen de la constante indéterminée c, qu'on a introduite dans la formule (e).

202. Appliquons actuellement la formule (d) à la courbe de la plus vite descente.

A cause de

$$X = \frac{1}{\sqrt{x - a}},$$

on aura alors

$$dy = \frac{(x - a)\,dx}{\sqrt{a(x - a) - (x - a)^2}},$$

en mettant $\frac{1}{\sqrt{a}}$ à la place de a. Or, cette équation différentielle est celle d'une cycloïde (n° 72) dont la base est horizontale et passe par le point de départ A du mobile, et dont le cercle générateur a a pour diamètre ; ce qu'il s'agissait de trouver.

En intégrant, on a

$$y - a' = \frac{1}{2}\,a.\ \text{arc}\left(\cos = \frac{a - 2x + 2a}{a}\right) - \sqrt{a(x - a) - (x - a)^2}\,;$$

a' étant la constante arbitraire qui représente la valeur de y correspondante à $x = a$. Si lon désigne par c' celle qui répond à $x = c$, on aura

$$c' - a' = \frac{1}{2}\,a\ \text{arc}\left(\cos = \frac{a - 2c + 2a}{a}\right) - \sqrt{a(c - a) - (c - a)^2}\,.$$

Les coordonnées a et a', c et c', des points A et B, sont données ; cette dernière équation déterminera la constante a ; et la valeur précédente de y ne renfermera plus rien d'inconnu.

Au moyen de la valeur de dy, on a

$$u = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a - x + a}}\,;$$

on aura donc (n° 198)

$$t'\sqrt{2g} = \int_a^c \frac{\sqrt{a}.\,dx}{\sqrt{a(x - a) - (x - a)^2}},$$

et, par conséquent,

$$t' = \sqrt{\frac{a}{2g}}.\ \text{arc}\left(\cos = \frac{a - 2c + 2a}{a}\right),$$

pour le temps le plus court que le mobile puisse employer à passer du point A au point B.

Si ces deux points sont situés dans une même verticale, on aura $c' = a'$; condition à laquelle on satisfera en prenant $a = \infty$; car on a

$$\text{arc}\left(\cos = \frac{a - 2c + 2a}{a}\right) = \text{arc}\left(\sin = \frac{2\sqrt{a(c - a) - (c - a)^2}}{a}\right);$$

et, dans le cas de $a = \infty$, cet arc peut être remplacé par son sinus, ce qui réduit à zéro la valeur précédente de $c' - a'$. En même temps la valeur de y se réduit à a' ; en sorte que le mobile ne s'écartera pas de la direction verticale. La valeur de t' deviendra aussi

$$t' = \sqrt{\frac{a}{2g}}.\ \frac{2\sqrt{a(c - a) - (c - a)^2}}{a} = \frac{\sqrt{2(c - a)}}{g}$$

ce qui est effectivement le temps qu'il doit employer à parcourir la hauteur $c - a$, du point A au-dessus du point B.

La détermination de la ligne de la plus vite descente étant un problème de pure curiosité, je me suis borné à en considérer le cas le plus simple, celui où le mouvement a lieu dans le vide, et où les points extrêmes sont donnés. Si ces points A et B ne sont pas fixes et donnés, mais qu'ils soient seulement assujettis à se trouver sur des courbes données DAE et FBG, ou sur des surfaces aussi données, la brachystochrone, dans le vide, sera encore une cycloïde, et, d'après les règles du calcul des variations, on pourra déterminer, dans tous les cas, les coordonnées de ces deux points. Dans un milieu résistant, cette ligne sera une autre courbe, dont on obtient, par les règles de ce calcul, l'équation différentielle, dépendante de la loi de la résistance par rapport à la vitesse du mobile. Pour tout ce qui concerne le calcul des variations, je renverrai au Mémoire sur ce sujet, que j'ai inséré dans le XIIe volume de l'Académie des sciences.

§ III. *Mouvement sur une surface donnée.*

203. Pour donner un exemple du mouvement d'un point matériel sur une surface donnée, je reprends le pendule simple du n° 179; mais je suppose qu'après l'avoir écarté de la verticale CB (fig. 45), et l'avoir transporté en CA, on lui imprime une vitesse qui ne soit pas dirigée dans le plan vertical ACB. Le pendule sortira alors de ce plan, et le point matériel qui le termine se mouvra sur la surface d'une sphère décrite du point C comme centre, avec un rayon égal à la longueur a de ce pendule. La percussion qui sera exercée sur ce mobile, à l'origine du mouvement, se décomposera en deux forces, l'une dirigée suivant AC ou suivant son prolongement, qui sera détruite par la résistance du point fixe C, l'autre perpendiculaire à AC, qui produira la vitesse initiale du pendule, que je représenterai par k. Je supposerai que le mouvement a lieu dans le vide; en sorte que la gravité soit la seule force accélératrice donnée qui agisse sur le mobile.

Cela posé, au bout du temps t, soit CM la position du pendule; et désignons par x, y, z, les coordonnées rectangulaires du point M. Soient aussi m la masse du mobile, et mN la tension inconnue du fil CM, dirigée suivant son prolongement. En prenant le point C pour l'origine des coordonnées x, y, z, les composantes de la force accélératrice N suivant leurs prolongemens seront

$$\frac{x}{a}N, \quad \frac{y}{a}N, \quad \frac{z}{a}N.$$

Or, si l'on applique au mobile une force égale et contraire à N, on pourra ensuite le considérer comme entièrement libre, et faire abstraction du fil CM; donc en supposant l'axe des z positives, vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, les trois équations du mouvement seront

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{a}N &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{a}N &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{a}N - g &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

qui s'accordent avec les équations (3) du n° 151. On les réduira à deux par l'élimination de l'inconnue N; et en y joignant l'équation de la sphère, savoir,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

on aura les trois équations qui devront servir à déterminer x, y, z, en fonctions de t.

204. J'ajoute les équations (1), après les avoir multipliées par x, y, z; il vient

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} + Na - gz = 0.$$

En différentiant l'équation de la sphère, une première fois, on a

$$xdx + ydy + zdz = 0, \quad (2)$$

et, une seconde fois,

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = -dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Si donc on représente par v la vitesse du mobile au bout du temps t, de sorte qu'on ait

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2,$$

il en résultera

$$N = \frac{v^2}{a} + \frac{gz}{a};$$

et, en effet, la tension mN doit être la somme de la force centrifuge $\frac{mv^2}{a}$ et de la composante $\frac{mgz}{a}$ du poids du mobile suivant le prolongement du rayon CM.

J'ajoute aussi les équations (1), après les avoir multipliées par dx, dy, dz; l'inconnue N disparaît en vertu de l'équation (2), et l'on a

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = gdz.$$

En intégrant et désignant par b la constante arbitraire, on aura donc

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + b. \quad (3)$$

La valeur initiale du premier membre est k^2; par

conséquent, si l'on désigne par γ celle de z, on aura

$$k^2 - 2g\gamma = b,$$

et, à un instant quelconque,

$$v = k^2 + 2g(z - \gamma);$$

ce que nous savions déjà.

Enfin, je multiplie la seconde équation (1) par x, et j'en retranche la première, multipliée par y; ce qui donne

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

donc, en intégrant et désignant par c la constante arbitraire, nous aurons

$$xdy - ydx = cdt. \qquad (4)$$

De cette manière, la solution du problème ne dépend plus que des trois équations différentielles (2), (3), (4), qui sont du premier ordre, et dont la première a déjà pour intégrale l'équation de la sphère. On peut séparer les variables, et réduire la question aux quadratures par le calcul suivant.

205. L'équation (2) donne

$$xdx + ydy = -zdz;$$

en élevant au carré ses deux membres et ceux de l'équation (4), et ajoutant ensuite les équations résultantes, il vient

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = z^2dz^2 + c^2dt^2.$$

Je mets $a^2 - z^2$ au lieu de $x^2 + y^2$, et j'élimine $dx^2 + dy^2$ au moyen de l'équation (3); il en résulte

$$(a^2 - z^2)\left[(2gz + b)dt^2 - dz^2\right] = z^2dz^2 + c^2dt^2;$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2}}. \qquad (5)$$

Désignons par r le rayon vecteur de la projection du mobile sur le plan horizontal des x et y, et par ψ l'angle que fait ce rayon avec l'axe des x; nous aurons

$$z = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi, \quad xdy - ydx = r^2d\psi;$$

à cause de $r^2 = a^2 - z^2$, l'équation (4) deviendra

$$(a^2 - z^2)\,d\psi = cdt;$$

et en y mettant pour dt sa valeur précédente, on en déduira

$$d\psi = \frac{cadz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2}}. \qquad (6)$$

Les intégrales de ces expressions de dt et $d\psi$ feront connaître les expressions de t et ψ en fonctions de z; elles se réduiront toujours aux fonctions elliptiques, et ne pourront s'obtenir sous forme finie que quand la quantité du troisième degré par rapport à z, renfermée sous le radical, aura un facteur double. La valeur de ψ et l'équation de la sphère détermineront la trajectoire du mobile; la valeur de t en fonction de z, ou de z en fonction de t, fera ensuite connaître la position du mobile, à chaque instant sur cette courbe.

La constante b est connue d'après les valeurs données de k et γ. On déterminera les constantes arbitraires qui seront introduites par les intégrations de dt et $d\psi$, d'après les conditions $t = 0$ et $\psi = 0$, quand $z = \gamma$, dont la seconde suppose qu'on place l'axe des x dans le plan vertical ACB, d'où part le pendule. Il ne restera donc que la constante c à déterminer. Or, la vitesse v du mobile étant perpendiculaire au rayon CM de la sphère sur laquelle il se meut, si on la décompose en deux, l'une perpendiculaire au plan vertical MCB, et l'autre comprise dans ce plan, la première composante sera la vitesse de la projection horizontale du mobile, perpendiculaire à son rayon vecteur r; en la désignant par u, on aura donc (n° 156)

$$u = r\frac{d\psi}{dt},$$

ou bien, en vertu de l'équation (4),

$$u = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2 - z^2}};$$

donc, si l'on appelle ε l'angle que la vitesse initiale k fait avec la perpendiculaire au plan ACB, de sorte qu'on ait $u = k\cos\varepsilon$ à l'origine du mouvement, il en résultera

$$c = k\sqrt{a^2 - \gamma^2}\cos\varepsilon.$$

Lorsque la vitesse k sera nulle, on aura $c = 0$, $b = -2g\gamma$, et, par conséquent,

$$dt = \frac{adz}{\sqrt{2g}\sqrt{(a^2 - z^2)(z - \gamma)}};$$

ce qui coïncide avec la valeur de dt du n° 185, en observant que $a - z$ et $a - \gamma$ sont ce qu'on a appelé ax et $a\zeta$ dans cette valeur.

206. Considérons spécialement le cas où le pendule a été très peu écarté de la verticale CB, et a reçu une très petite vitesse initiale. Supposons cette vitesse horizontale, et, par conséquent, perpendiculaire au plan ACB, de sorte qu'on ait $\varepsilon = 0$. Désignons par ζ une fraction très petite, et faisons

$$k = \zeta\sqrt{ga}.$$

Soient aussi α et θ les angles ACB et MCB; en négligeant leurs quatrièmes puissances, on aura

$$\gamma = a - \tfrac{1}{2}a\alpha^2, \qquad z = a - \tfrac{1}{2}a\theta^2,$$

$$b = -2ga + ga(\alpha^2 + \zeta^2), \quad c^2 = ga^3\alpha^2\zeta^2;$$

et les formules (5) et (6) deviendront

$$\left.\begin{aligned} dt &= -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{\theta d\theta}{\sqrt{(\alpha^2-\theta^2)(\theta^2-C^2)}},\\ d\psi &= -\frac{\alpha C d\theta}{\theta\sqrt{(\alpha^2-\theta^2)(\theta^2-C^2)}}.\end{aligned}\right\}\ (a)$$

L'angle ψ fera connaître la position du plan vertical MCB, dans lequel le pendule se trouve à chaque instant; il pourra croître indéfiniment. L'angle θ déterminera, aussi à chaque instant, la position du pendule dans ce plan variable; on le regardera comme une quantité positive, et les positions du pendule, également éloignées des deux côtés de la verticale CB, répondront à un même angle θ et à des valeurs de ψ qui différeront entre elles de 180°.

D'après la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, tirée de la première équation (a), on voit que l'angle θ sera toujours compris entre α et C. Si l'on a $C=\alpha$, on aura constamment $\theta=\alpha$; en divisant les équations (a) l'une par l'autre, on a, dans tous les cas,

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{a}}\,\frac{\alpha C}{\theta^2}\,dt\,; \qquad (b)$$

dans le cas de $\theta=\alpha=C$, on aura donc

$$\psi = t\sqrt{\frac{g}{a}}\,;$$

par conséquent, le pendule décrira alors uniformément un cône droit à base circulaire, et le temps d'une révolution entière sera $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, c'est-à-dire, le même que celui d'une double oscillation dans le plan vertical ACB. Ainsi, deux pendules de même longueur a, qui partiraient ensemble de la même droite CA, l'un sans vitesse initiale et l'autre avec une vitesse perpendiculaire au plan ACB et égale à $\alpha\sqrt{ga}$, reviendraient ensemble à cette droite CA.

207. On peut écrire la valeur dt sous la forme :

$$dt = -2\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{\theta d\theta}{\sqrt{(\alpha^2-C^2)^2-(2\theta^2-\alpha^2-C^2)^2}}.$$

Je fais, pour simplifier,

$$2\theta^2-\alpha^2-C^2=(\alpha^2-C^2)x,\quad 4\theta d\theta=(\alpha^2-C^2)dx;$$

le radical devient $\pm(\alpha^2-C^2)\sqrt{1-x^2}$; et il en résulte

$$dt = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A cause de $\theta=\alpha$ et $x=1$, quand $t=0$, on tire de là

$$t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\ \text{arc}\ (\cos = x),$$

et, réciproquement,

$$x = \cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

On aura donc, à un instant quelconque,

$$\theta^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2+C^2)+\frac{1}{2}(\alpha^2-C^2)\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

ce qui montre que le pendule fera dans le plan variable MCB, des oscillations isochrones dont les extrémités répondront à $\theta=\alpha$ et $\theta=C$, et dont la durée sera $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, ou moitié d'une oscillation dans le plan fixe ACB.

Je substitue cette valeur de θ^2 dans l'équation (b); en observant que

$$\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}} = \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} - \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

il en résulte

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{a}}\,\frac{\alpha C dt}{\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}+C^2\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}};$$

et, à cause de $\psi=0$ quand $t=0$, on en conclut

$$\alpha\ \text{tang}\ \psi = C\ \text{tang}\ t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

Cela étant, le mouvement du plan MCB ne sera plus uniforme comme dans le cas de $\alpha=C$; mais on voit que ce plan effectuera successivement les quatre quarts de sa révolution entière, dans des temps égaux entre eux et au temps $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, pendant lequel le pendule fait une oscillation dans ce plan variable.

On tire de cette dernière équation

$$\cos^2 \psi = \frac{a^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}{a^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} + C^2 \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}},$$

$$\sin^2 \psi = \frac{C^2 \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}{a^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} + C^2 \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}};$$

on a aussi

$$x^2 = (a^2 - z^2)\cos^2 \psi = a^2 \theta^2 \cos^2 \psi,$$
$$y^2 = (a^2 - z^2)\sin^2 \psi = a^2 \theta^2 \sin^2 \psi,$$

d'après la valeur approchée de z; donc, à cause de

$$\theta^2 = a^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} + C^2 \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

nous aurons

$$x^2 = a^2 a^2 \cos^2 \psi, \quad y^2 = a^2 C^2 \sin^2 \psi,$$

et, par conséquent

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{C^2} = a^2;$$

ce qui fait voir que la trajectoire de la projection du mobile sur le plan horizontal passant par le point C, est une ellipse qui a son centre en ce point, et l'un de ses axes dans le plan ACB, d'où part le pendule avec une vitesse perpendiculaire à ce plan.

CHAPITRE VI.

EXEMPLES DU MOUVEMENT D'UN MOBILE ENTIÈREMENT LIBRE.

§ 1er. *Mouvement des projectiles.*

208. Dans ce paragraphe, nous nous occuperons particulièrement des *projectiles* de l'artillerie, qui sont lancés avec de grandes vitesses, et soumis à la pesanteur et à la résistance de l'air.

Faisons d'abord abstraction de cette résistance, et considérons un point matériel pesant qui part du point O (fig. 48), avec une vitesse a dirigée suivant la droite OA. Il est évident que le mobile ne sortira pas du plan vertical passant par cette droite. Soit OMD sa trajectoire dans ce plan, laquelle sera tangente à OA. Dans ce même plan, menons deux axes Ox et Oy, le premier horizontal, et le second vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur. Prenons ces axes pour ceux des coordonnées; au bout du temps quelconque t, soit M la position du mobile, x son abscisse OP, et y son ordonnée PM. Désignons par g la gravité. Enfin, appelons α l'angle aigu AOx que fait la vitesse initiale a avec l'axe Ox, de sorte que ses composantes soient $a \cos \alpha$ suivant cet axe, et $a \sin \alpha$ suivant l'axe Oy: l'angle α serait négatif, si la droite OA était située au-dessous de Ox.

D'après ce qu'on a vu dans le n° 148, les mouvemens des projections du mobile sur les deux axes Ox et Oy seront indépendans l'un de l'autre; le mouvement de sa projection horizontale sera donc uniforme et dû à la vitesse $a \cos \alpha$, et celui de sa projection verticale sera dû à la vitesse initiale $a \sin \alpha$ et à la force constante g agissant en sens contraire de cette vitesse; par conséquent, on aura

$$x = t\, a \cos \alpha, \quad y = t\, a \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2;$$

et si l'on élimine t, et qu'on suppose la vitesse a due à une hauteur h, de sorte qu'on ait $a = \sqrt{2gh}$, il en résultera

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha},$$

pour l'équation de la trajectoire.

Cette courbe est donc une parabole qui a son grand axe vertical; son sommet, déterminé par l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, répond à

$$x = 2h \cos \alpha \sin \alpha, \quad y = h \sin^2 \alpha;$$

et elle rencontre l'axe Ox en un second point B, tel qu'en appelant b la distance OB, on a

$$b = 4h \sin \alpha \cos \alpha = 2h \sin 2\alpha.$$

Cette distance b est ce qu'on appelle l'*amplitude du jet*. Dans le vide, son *maximum* répond, comme on voit, à $\alpha = 45°$, et il est égal à $2h$, c'est-à-dire double de la hauteur due à la vitesse initiale.

En appelant v la vitesse du mobile au bout du temps t, et substituant les différentielles des valeurs précédentes de x et y dans l'équation

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

il en résulte

$$v^2 = a^2 - 2agt \sin \alpha + g^2 t^2.$$

Le temps que le mobile emploie à arriver au point B en décrivant la courbe OCB, est le même que s'il décrivait la droite OB avec la vitesse $a \cos \alpha$; il est donc

$$t = \frac{b}{a \cos \alpha} = \frac{4h \sin \alpha}{a};$$

et à cause de $h = \frac{a^2}{2g}$, il en résulte $gt = 2a \sin \alpha$; ce qui donne $v^2 = a^2$. La vitesse en ce point B est donc la même qu'au point O; elle est dirigée suivant la tangente BE, et l'angle de chute EBx est aussi le même que l'angle de projection AOx.

Si le mobile, au lieu d'être un point matériel, est un corps solide, de forme et de dimensions quelconques, on verra par la suite que ces équations du mouvement parabolique devront être rapportées à son centre de gravité.

209. La vitesse a étant donnée, si l'on demande quel doit être l'angle α pour que le mobile atteigne un point déterminé, dont les coordonnées seront $x = \beta$ et $y = \gamma$, on mettra ces valeurs dans l'équation de la trajectoire, et l'on aura

$$\gamma = \beta \operatorname{tang} \alpha - \frac{\beta^2}{4h \cos^2 \alpha},$$

pour déterminer α. En faisant

$$\operatorname{tang} \alpha = z, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + z^2}:$$

cette équation devient

$$4h\gamma + \beta^2 - 4h\beta z + \beta^2 z^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{2h}{\beta} \pm \frac{1}{\beta}\sqrt{4h^2 - 4h\gamma - \beta^2}.$$

Cette double valeur de z ou de tang α nous montre qu'on peut atteindre un but donné, en tirant sous deux directions différentes, tant que $4h^2$ surpasse $4h\gamma + \beta^2$; que ces deux directions se réduisent à une seule, lorsque ces deux quantités sont égales; et qu'on ne peut atteindre le but, sous aucune direction, quand $4h^2$ est moindre que $4h\gamma + \beta^2$.

Ainsi, en traçant dans le plan vertical qui passe par la direction initiale du mobile, la parabole dont l'équation est

$$4h\gamma + \beta^2 = 4h^2,$$

cette courbe divisera le plan en deux parties, telles que tous les points de la partie extérieure seront garantis de toute atteinte, que ceux de la partie intérieure pourront être atteints de deux manières différentes, et ceux de la ligne de séparation, d'une manière seulement.

210. La théorie du mouvement des projectiles serait donc très simple, si l'on pouvait négliger la résistance que l'air oppose à leur mouvement; mais dans le cas des grandes vitesses dont nous nous occupons spécialement, cette force est beaucoup trop considérable pour qu'on en puisse faire abstraction : elle change entièrement la forme de la trajectoire et les lois du mouvement sur cette courbe, ainsi qu'on va le voir.

Quelles que soient la forme et les dimensions du projectile, on fera voir, dans un autre chapitre, que son centre de gravité aura le même mouvement qu'un point matériel pesant, dont la masse serait celle du mobile, qui aurait une vitesse initiale donnée en grandeur et en direction, et auquel on appliquerait en outre, parallèlement à elles-mêmes, les forces provenant de la résistance et du frottement de l'air, qui s'exercent à la surface de ce corps solide. On verra aussi que la force motrice qui résultera de ces résistances transportées au centre de gravité, pourra quelquefois faire sortir ce point du plan vertical mené par la direction de la vitesse initiale; mais ici nous supposerons que ce cas n'ait pas lieu, et que la force motrice dont il s'agit soit constamment tangente à la trajectoire du centre de gravité.

Cela posé, pour former les équations de son mouvement, conservons toutes les notations précédentes, et supposons qu'elles se rapportent maintenant à la figure 49, où la trajectoire OMD n'est plus une parabole. Soit, en outre, s l'arc OM décrit par le mobile au bout du temps t, et R la force motrice provenant de la résistance de l'air, qui sera dirigée suivant la partie MT de la tangente en M. Les cosinus des angles que fera cette droite MT avec des axes menés par le point M suivant les directions des x et des y positives, seront $-\frac{dx}{ds}$ et $-\frac{dy}{ds}$; en appelant m la masse du projec-

tile et g la gravité, nous aurons donc

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{R}{m}\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - \frac{R}{m}\frac{dy}{ds},$$

pour les équations du mouvement de son centre de gravité.

Je prendrai pour ce projectile une sphère homogène ou composée de couches concentriques dont chacune sera homogène ; en appelant D sa densité moyenne et r son rayon, on aura alors

$$m = \frac{4\pi D r^3}{3}.$$

Je supposerai aussi, conformément aux hypothèses généralement admises, la force R proportionnelle au carré de la vitesse du centre de gravité, à la surface du projectile, et à la densité de l'air ; il en résultera

$$\frac{R}{m} = \frac{n\rho}{Dr}\frac{ds^2}{dt^2};$$

ρ étant cette densité, et n un facteur numérique qui devra être déterminé par l'expérience. Cette expression satisfait à la condition de l'homogénéité des quantités ; car $\frac{R}{m}$ et le rapport de $\frac{ds^2}{dt^2}$ à r sont deux quantités de la même nature que la gravité g, et les facteurs n et $\frac{\rho}{D}$ sont des nombres abstraits. Pour plus de commodité, je ferai

$$\frac{n\rho}{Dr} = c,$$

de sorte que $\frac{1}{c}$ soit une ligne dont la longueur sera donnée, et que je regarderai comme constante, en faisant abstraction du changement de densité de la masse d'air que traverse le projectile.

211. En mettant à la place de $\frac{R}{m}$, sa valeur $c\frac{ds^2}{dt^2}$, les deux équations du mouvement deviennent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 x}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = 0, \\ &\frac{d^2 y}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt} + g = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

L'intégrale de la première est

$$\frac{dx}{dt} = a \cos \alpha \, e^{-cs},$$

en observant qu'on a $\frac{dx}{dt} = a \cos \alpha$, au point O où $s = 0$, et désignant par e la base des logarithmes népériens. La forme de la seconde ne différant de celle de la première que par son dernier terme, je fais, pour l'intégrer,

$$\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt};$$

p étant une nouvelle inconnue. En substituant cette valeur de $\frac{dy}{dt}$ dans la seconde équation (1), et ayant égard à la première, il vient

$$\frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt} = -g.$$

Je divise cette valeur par le carré de $\frac{dx}{dt}$ ou de sa valeur précédente ; il en résulte

$$\frac{dp}{dt} : \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{a^2 \cos^2 \alpha} e^{2cs}.$$

En considérant y et p comme des fonctions de x, on aura

$$p = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx};$$

si donc on fait toujours $a^2 = 2gh$, l'équation précédente deviendra

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cs}; \quad (2)$$

et ce sera l'équation différentielle de la trajectoire.

On a identiquement

$$\sqrt{1 + p^2}\, dx = ds;$$

en multipliant membre à membre ces deux dernières équations, on aura donc

$$\sqrt{1 + p^2}\, dp = -\frac{ds}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cs};$$

d'où il suit, en intégrant et désignant par γ la constante arbitraire,

$$p\sqrt{1+p^2} + \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \gamma - \frac{1}{2ch \cos^2 \alpha} e^{2cs}. \quad (3)$$

Pour déterminer γ, on fera, à la fois, $s = 0$ et $p = \tang \alpha$; ce qui donne

$$\gamma = \frac{1}{2ch \cos^2 \alpha} + \tang \alpha \sqrt{1 + \tang^2 \alpha} + \log\left(\tang \alpha + \sqrt{1 + \tang^2 \alpha}\right);$$

mais, pour abréger, je conserverai γ à la place de cette valeur.

D'après les équations précédentes, on a

$$dx = -2h\cos^2\omega e^{-2\omega}dp,\ dy = pdx,\ gdt_2 = -dxdp;$$

en éliminant l'exponentielle au moyen de l'équation (3), nous aurons donc

$$\left.\begin{aligned} cdx &= \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - \gamma}, \\ cdy &= \frac{pdp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - \gamma}, \\ \sqrt{cg}dt &= \frac{-dp}{[\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

formules qui ne sont point intégrables sous forme finie : dans la dernière, on regardera le radical comme une quantité positive, parce que l'angle dont p est la tangente diminue quand le temps augmente.

212. Si l'on appelle ω cet angle, c'est-à-dire, l'inclinaison MTx de la tangente à la trajectoire, sur l'axe horizontal Ox, on aura

$$p = \text{tang}\,\omega, \quad dp = \frac{d\omega}{\cos^2\omega}.$$

Les valeurs de x, y, t, déduites des équations (4), seront de la forme $f\Omega d\omega$; l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse au point O où l'on a $\omega = \alpha$, et Ω désignant une fonction donnée de ω. On calculera ces trois valeurs, pour chaque point M, par la méthode des quadratures (nº 15). De cette manière, on pourra construire la trajectoire par points, et l'on connaîtra le temps t que le mobile emploiera à décrire chaque arc OM, dont la longueur s sera donnée par l'équation (3). Quant à la vitesse du mobile au point M, on aura

$$v^2 = (1+p^2)\frac{dx^2}{dt^2} = g^2(1+p^2)\frac{dt^2}{dp^2},$$

et, par conséquent,

$$cv^2 = \frac{g(1+p^2)}{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2}}. \quad (5)$$

En étendant ces intégrales jusqu'à $\omega = 0$, on déterminera l'abscisse et l'ordonnée du point C, le plus élevé de la trajectoire. Si l'on donne ensuite à ω des valeurs négatives, on déterminera les points de la branche descendante CBD de la trajectoire. Quand on sera parvenu à une valeur $-\alpha'$ de ω, pour laquelle l'ordonnée y de la trajectoire sera nulle, la valeur correspondante de x exprimera l'amplitude du jet OB, qui ne sera plus double de l'abscisse du point C, comme dans le cas du vide, et dont le *maximum*, par rapport à α, répondra à un angle moindre que 45º et dépendant de la grandeur de la vitesse initiale. L'angle α' ou EBx et la vitesse au point B différeront aussi de α et a.

Ainsi, toutes les circonstances du mouvement seront connues, et la solution du problème est complète, sauf la longueur des calculs numériques qu'il faudra exécuter dans chaque cas, lorsque les valeurs des trois constantes h, α, c, contenues dans les formules précédentes, seront données.

213. Le mouvement du projectile sur la branche descendante de la trajectoire, approche de plus en plus d'être vertical et uniforme.

En effet, soient x_1, y_1, t_1, les valeurs de x, y, t, qui répondent au sommet C; transportons l'origine des coordonnées en ce point, et faisons

$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 - y', \quad t = t_1 + t';$$

en sorte que x' et y' soient l'abscisse et l'ordonnée du point quelconque M' (fig. 50) de la branche descendante, rapportées à l'axe horizontal Cx' et à l'axe Cy' qui est dirigé dans le sens de la pesanteur, et que t représente le temps employé à parcourir l'arc CM'. Soit aussi p' la tangente de l'angle $M'T'x'$ que fait la tangente à la courbe en M' avec l'axe Cx'. Nous aurons

$$p' = \frac{dy'}{dx'} = -p;$$

et à cause de

$$\log(\sqrt{1+p'^2} - p') = -\log(p' + \sqrt{1+p'^2}),$$

la première équation (4) deviendra

$$cdx' = \frac{dp'}{P'},$$

en faisant, pour abréger,

$$\gamma + p'\sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) = P'.$$

L'angle aigu $M'T'x'$ pouvant approcher continuellement d'un angle droit, la variable p' croîtra indéfiniment; mais il n'en sera pas de même à l'égard de x'. Pour de très grandes valeurs de p', on pourra mettre p' à la place de $\sqrt{1+p'^2}$; et en négligeant $\gamma + \log 2$ par rapport à p'^2, on aura

$$P' = p'^2 + \frac{1}{2}\log p'^2,$$

ou simplement $P' = p'^2$, en observant que le lo-

garithme d'une quantité très grande p'^2, et, à plus forte raison, $1/2 \log p'^2$, est très petit relativement à cette quantité : on aura donc, pour ces valeurs de p',

$$dx' = \frac{dp'}{cp'^2};$$

en intégrant et désignant par C une quantité constante, et il en résultera

$$x' = C - \frac{1}{cp'};$$

ce qui montre que les valeurs de x' ne croîtront pas indéfiniment avec celles de p'. Cela étant, soit

$$q = \frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{dp'}{p'};$$

q sera une ligne de grandeur finie, qu'on pourra calculer par la méthode des quadratures; et si l'on prend sur Cx' une partie CA égale à cette ligne, la verticale AB menée par ce point sera une asymptote de la partie CD de la trajectoire; en sorte que le mouvement du projectile sur cette branche descendante, approchera indéfiniment de la direction verticale.

Observons, de plus, que pour les très grandes valeurs de p', les deux dernières équations (4) se réduiront à

$$cdy' = \frac{dp'}{p'}, \quad \sqrt{cg}dt' = \frac{dp'}{p'};$$

d'où il résultera.

$$\frac{dy'}{dt'} = \sqrt{\frac{g}{c}};$$

par conséquent, le mouvement final et vertical du projectile sera uniforme; ce qu'il s'agissait de démontrer. La vitesse de ce mouvement sera celle qu'un corps pesant acquiert en tombant dans le vide, d'une hauteur égale à $\frac{1}{2c}$; et c'est aussi ce que l'on conclut de la formule (5), en mettant $-p'$ au lieu de p, et considérant ensuite p' comme une très grande quantité.

En faisant, dans la première équation (4),

$$p = \text{tang}\,\omega, \quad dp = \frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

et, pour abréger,

$$[\gamma - \text{tang}\,\omega\sqrt{1 + \text{tang}^2\omega} - \log(\text{tang}\,\omega + \sqrt{1 + \text{tang}^2\omega})]\cos^2\omega = \frac{1}{\Omega},$$

on en déduira

$$x_1 = \frac{1}{c}\int_0^\omega \Omega d\omega,$$

pour l'abscisse du point C. Si donc on prend sur OG (fig. 49), un point F, tel que l'on ait

$$OF = x_1 + q,$$

la verticale FG, menée par ce point F, sera l'asymptote de la branche descendante de la trajectoire.

214. Soit ON le prolongement de la trajectoire OCD; le point de départ du mobile étant O, le mouvement n'aura pas lieu sur cette partie de la courbe; mais on peut, néanmoins, désirer d'en connaître la forme. Or, on la construit par points, au moyen des deux premières formules (4), en y donnant à p des valeurs positives et plus grandes que tang ω; et il est aisé de s'assurer qu'elle a aussi une asymptote, mais qui n'est pas verticale, comme celle de la branche descendante.

Pour cela, j'observe que, d'après la valeur de γ du n° 211, il y a toujours un angle ζ aigu, et $> \omega$, qui est tel que $p = \text{tang}\,\zeta$ rend nul le dénominateur commun de ces deux formules, c'est-à-dire, un angle ζ qui satisfait à l'équation

$$\gamma - \text{tang}\,\zeta\sqrt{1 + \text{tang}^2\zeta} - \log(\text{tang}\,\zeta + \sqrt{1 + \text{tang}^2\zeta}) = 0. \qquad (6)$$

Cela étant, on voit par la valeur de dp, tirée de l'une ou l'autre des deux premières équations (4), que l'abscisse x et l'ordonnée y croissant indéfiniment, abstraction faite du signe, dans cette partie ON de la courbe, la quantité p cesse de croître, lorsqu'elle diffère infiniment peu de tang ζ; en sorte que p ne peut jamais dépasser ni même atteindre rigoureusement cette valeur $p = \text{tang}\,\zeta$; ce qui signifie que la branche de courbe ON a une asymptote qui coupe le prolongement de l'axe Ox sous l'angle ζ. On déterminera sa distance au point O de la manière suivante.

Je mène par le point O un axe qui fasse, avec le prolongement de Ox_1 un angle égal au complément de ζ, et qui soit par conséquent, perpendiculaire à l'asymptote de ON. J'appelle u l'abscisse d'un point quelconque de la courbe, comptée sur cet axe à partir du point O; les coordonnées de ce point, par rapport aux axes Ox et Oy, étant toujours x et y, on aura

$$u = y\cos\zeta - x\sin\zeta$$

En différentiant et mettant pour dx et dy leurs valeurs données par les deux premières équations (4), il vient

$$cdu = \frac{\cos\zeta\,(\text{tang}\,\zeta - p)\,dp}{[\gamma - p\sqrt{1 + p^2} - \log(p + \sqrt{1 + p^2})]}$$

formule dans laquelle on donnera à p des valeurs plus grandes ou plus petites que tang α, selon qu'il s'agira d'un point de la partie ON ou de la partie OM de la courbe. On peut retrancher de son dénominateur le premier membre de l'équation (6), multiplié par cos ζ; et si l'on fait, en outre,

$$p = \text{tang } \omega, \quad dp = \frac{d\omega}{\cos^2 \omega},$$

et, pour abréger,

$$\text{tang } \zeta \sqrt{1 + \text{tang}^2 \zeta} + \log (\text{tang } \zeta + \sqrt{1 + \text{tang}^2 \zeta})$$
$$- \text{tang } \omega \sqrt{1 + \text{tang}^2 \omega} - \log (\text{tang } \omega + \sqrt{1 + \text{tang}^2 \omega}) = \text{U},$$

il en résultera

$$du = \frac{(\text{tang } \zeta - \text{tang } \omega)\, d\omega}{c\text{U} \cos \zeta \cos^2 \omega}.$$

Or, en faisant

$$r = \frac{\cos \zeta}{c} \int_{\alpha}^{\zeta} \frac{(\text{tang } \zeta - \text{tang } \omega)\, d\omega}{\text{U} \cos^2 \omega},$$

r sera une ligne de grandeur finie, que l'on calculera par la méthode des quadratures, et qui exprimera la valeur de u relative à l'asymptote de ON, c'est-à-dire, la longueur de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite, qu'il s'agissait de déterminer.

Cette droite asymptotique aura pour équation

$$y \cos \zeta + x \sin \zeta = r;$$

en sorte que si l'on prend sur le prolongement de Ox un point H tel que l'on ait

$$\text{OH} = \frac{r}{\sin \zeta},$$

l'asymptote de la branche ON sera la droite HK, menée par le point H, et faisant avec le prolongement de Ox un angle KHO supplément de ζ. Les deux asymptotes FG et HK, prolongées au-dessus de l'axe Ox, se rencontreront en un point L, de manière que la courbe entière sera comprise dans l'angle KLG, dont le complément est l'angle ζ déterminé par l'équation (6).

215. Lorsque l'angle de projection AOx ou α est très petit (fig. 51), le projectile ne s'élève qu'à une petite hauteur au-dessus de l'axe horizontal Ox, mené par son point de départ. Or, dans ce cas, on peut obtenir, avec une approximation suffisante, l'équation en x et y de la partie OCB de la trajectoire, située au-dessus de Ox; et même on peut étendre cette équation jusqu'à un point D, dont la distance à cet axe n'est pas très considérable.

En effet, dans toute cette partie OCB, ou même OCD de la trajectoire, la tangente à cette courbe sera presque horizontale, et la quantité p très petite; en négligeant le carré de p, on aura donc

$$ds = dx, \quad s = x,$$

et l'équation (2) deviendra.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cx}.$$

En intégrant deux fois de suite, et déterminant les constantes arbitraires de manière qu'on ait $\frac{dy}{dx} =$ tang α et $y = 0$, quand $x = 0$, il vient

$$y = x \text{ tang } \alpha - \frac{1}{8c^2 h \cos^2 \alpha} (e^{2cx} - 2cx - 1),$$

pour l'équation approchée de la trajectoire, qu'il s'agissait d'obtenir. En développant l'exponentielle qu'elle renferme, réduisant et faisant ensuite $c = 0$, elle devient l'équation exacte de cette courbe dans le vide.

D'après l'équation $gdt^2 = -dxdp$ du n° 212, et la valeur précédente de $\frac{dp}{dx}$, on aura

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2gh} \cos \alpha} e^{cx} dx,$$

et, par conséquent,

$$t = \frac{1}{c\sqrt{2gh} \cos \alpha} (e^{cx} - 1);$$

ce qui fait connaître le temps t que le mobile emploiera à parcourir une portion quelconque OM de la courbe OCD.

216. Supposons que le projectile vienne tomber sur le terrain en un point D; représentons par λ l'abaissement de ce point au-dessous du plan horizontal, mené par le point O, ou la perpendiculaire DQ à l'axe Ox; soient aussi l la distance OQ, et τ le temps employé à aller du point O au point D; nous aurons, à la fois,

$$x = l, \quad y = -\lambda, \quad t = \tau;$$

et en remplaçant, pour plus de simplicité, cos$^2 \alpha$ par l'unité dans les formules précédentes, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} 8c^2 h (\lambda + l \text{ tang } \alpha) &= e^{2cl} - 2cl - 1, \\ \tau c \sqrt{2gh} &= e^{cl} - 1. \end{aligned}\right\} (a)$$

Lors donc que les deux constantes h et c seront données, et qu'on aura mesuré l'angle α et l'élévation λ du point O au-dessus du terrain, ces équations feront connaître la *portée* horizontale l, et la durée τ du trajet du projectile. Réciproquement, quand on connaîtra α, λ, l, τ, par des mesures directes, ces équations pourront servir à déterminer

le coefficient c de la résistance, et la hauteur h due à la vitesse initiale. En éliminant h, on a

$$4(\lambda + l \tang \alpha)(e^{cl} - 1)^2 = g\tau^2 (e^{2cl} - 2cl - 1);$$

équation d'où l'on tirera la valeur de c : l'une des deux précédentes donnera ensuite immédiatement la valeur de h.

Il existe encore de l'incertitude sur les grandeurs des portées et des vitesses initiales. D'après Lombard, pour un canon de 24 chargé au tiers du poids du boulet, la vitesse initiale est de 463 mètres par seconde ; et pour un canon de 12, dont la charge est aussi le tiers du poids du projectile, cette vitesse s'élève à 494 mètres. Suivant le même auteur, les portées correspondantes et relatives à $\lambda = 0$, sont 700 mètres dans le premier cas, en supposant $\alpha = 1^\circ\ 15'\ 6''$, et 660 mètres dans le second cas, en supposant $\alpha = 1^\circ\ 5'\ 36''$.

Au lieu du temps τ, on pourrait employer à la détermination de h et de c, une seconde portée du même canon à une élévation différente au-dessus du terrain. Ainsi, en supposant que le poids du projectile, celui de la charge et l'angle α ne soient pas changés, les quantités h et c resteront aussi les mêmes; et si λ et l deviennent λ' et l', on aura

$$8c^2 h (\lambda' + l' \tang \alpha) = e^{2cl'} - 2cl' - 1;$$

d'où il résultera

$$(\lambda + l \tang \alpha)(e^{2cl'} - 2cl' - 1)$$
$$= (\lambda' + l' \tang \alpha)(e^{2cl} - 2cl - 1), \quad (b)$$

en éliminant h au moyen de la première équation (a).

Les auteurs de Balistique ne sont nullement d'accord sur la grandeur du nombre n qui entre dans l'expression du coefficient c, savoir (n° 210),

$$c = \frac{n\rho}{Dr}.$$

D'après une théorie très imparfaite de la résistance des fluides, ce nombre n serait 3/8; mais toutes les expériences le donnent plus petit, et Lombard le fait égal à 9/40. L'équation (b) fournirait le moyen le plus susceptible de précision pour la détermination de c, en supposant bien connu et invariable, l'angle de projection α.

§ II. *Mouvement des planètes.*

217. Les lois du mouvement des planètes autour du soleil sont connues sous la dénomination de *Lois de Kepler*, parce qu'elles ont été découvertes par cet astronome, qui les a déduites de l'observation. Elles sont au nombre de trois, dont voici les énoncés :

1° Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs décrivent, autour du centre du soleil, des aires proportionnelles au temps.

2° Les orbites, c'est-à-dire, les trajectoires des planètes, sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.

3° Les carrés du temps des révolutions des planètes autour du soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

Toute l'importance de ces lois n'avait pas d'abord été comprise; c'est Newton qui en a montré l'usage pour déterminer la force qui retient chaque planète dans son orbite, c'est-à-dire, la direction de cette force et les variations de son intensité, soit d'une position à une autre d'une même planète, soit d'une planète à une autre. On verra, en effet, dans ce paragraphe, que chacune de ces trois choses est une conséquence nécessaire des trois lois du mouvement planétaire que l'on vient d'énoncer.

Ces lois se rapportent au mouvement du centre de gravité de chaque planète ; c'est le mouvement de ce point que nous allons considérer; et quand il sera question de la position ou de la vitesse d'une planète, il faudra entendre la position ou la vitesse de son centre de gravité.

218. Soient AMBD (fig. 52) l'ellipse décrite par une planète, AB son grand axe, C son centre, O et O' ses deux foyers, O celui qui est occupé par le centre du soleil, B le *périhélie* ou le point de l'orbite le plus rapproché de O, A l'*aphélie* ou le point le plus éloigné du soleil.

Au bout du temps t qui sera compté à partir du passage de la planète à son périhélie, soit M sa position sur l'orbite. Désignons par r son rayon vecteur OM, et par θ l'angle MOB que l'on appelle, en astronomie, l'*anomalie vraie*. Le secteur décrit par ce rayon pendant l'instant dt, sera $1/2\ r^2\ d\theta$ (n° 156) ; d'après la première loi de Kepler, on aura donc

$$r^2\, d\theta = c\,dt; \qquad (1)$$

c étant une constante égale au double de l'aire décrite dans l'unité de temps, et ct le double de l'aire MOB décrite dans le temps quelconque t.

Soient aussi

$$O'M = r', \quad CB = CA = a, \quad CO = CO' = ae.$$

D'après une propriété de l'ellipse, on aura

$$r + r' = 2a;$$

dans le triangle O'MO, on a aussi

$$r'^2 = r^2 + 4rae \cos\theta + 4a^2 e^2;$$

et si l'on élimine r' entre ces deux équations, il vient

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}, \qquad (2)$$

pour l'équation de la trajectoire.

Pour toutes les planètes connues avant ce siècle, l'*excentricité* e est une fraction très petite. Il faut excepter la planète mercure dont l'excentricité surpasse un cinquième; celle de l'orbite de la terre est

$$e = 0{,}01685318,$$

ou, à peu près, un soixantième. La plus grande était celle de Mars, qui surpasse neuf centièmes; c'était donc pour cette planète que le mouvement elliptique devait être le plus différent du mouvement circulaire excentrique, que l'on adoptait avant Kepler; et c'est, en effet, dans les observations de Ticho-Brahé, relatives à cette planète, que Kepler a reconnu d'abord la différence de ces deux mouvemens. Si l'on développe les valeurs de r et θ, en séries ordonnées suivant les puissances de e, au moyen de l'équation des aires proportionnelles au temps, jointe à celle de la trajectoire elliptique ou à celle de la trajectoire circulaire excentrique, on trouve que pour un même temps t, les développemens correspondans à ces deux courbes, ne diffèrent que dans les termes qui dépendent du carré ou des puissances supérieures de e; circonstance qui rendait, à l'époque de Kepler, la différence des deux mouvemens très difficile à découvrir.

219. Si l'on appelle T le temps de la révolution d'une planète, et qu'on fasse

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

cette constante n sera la vitesse moyenne angulaire, et nt le *moyen mouvement* de la planète.

Imaginons un astre fictif dont le mouvement soit uniforme, et qui parte du périhélie et achève sa révolution en même temps que cette planète; son rayon vecteur décrira l'angle nt, pendant que celui de la planète décrit l'angle θ; l'angle $\theta - nt$, compris à une époque quelconque entre ces deux rayons, est ce que les astronomes appellent l'*équation du centre*: il est positif, et la planète précède l'astre fictif, en allant du périhélie à l'aphélie; le contraire a lieu en revenant du second point au premier. Le *maximum* de l'équation du centre dépend de la grandeur de l'excentricité.

En prenant le jour moyen pour unité de temps, et mettant 360° au lieu de 2π, on a, relativement à la terre.

$$T = 365^j,256374, \quad n = 0^\circ\, 59'\, 8''.$$

Cette valeur de T est la durée de l'année *sidérale*, ou l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil à une même étoile, dans son mouvement apparent autour de la terre. L'intervalle compris entre deux retours consécutifs à un même *équinoxe*, est plus court, à cause que les points équinoxiaux ont sur l'*écliptique* un mouvement rétrograde, ou en sens contraire de celui du soleil. En prenant $50'',23427$ pour la *précession* annuelle en 1800, et observant que le rayon vecteur du soleil emploie $0^j,014158$, à décrire ce petit angle, il en résulte

$$365^j,242216,$$

pour la longueur de l'année *équinoxiale* au commencement de ce siècle. L'année sidérale est constante; mais la précession des équinoxes varie un peu, et, par conséquent aussi, l'année équinoxiale : sa longueur diminue d'à peu près une demi-seconde par siècle.

220. La constante c aura pour valeur le double de la surface de l'ellipse divisé par T; en observant que le demi-petit axe est $a\sqrt{1-e^2}$, et la surface $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, on aura donc

$$c = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}.$$

Au moyen de cette valeur et de celle de u, l'équation (1) devient

$$r^2\, d\theta = na^2\sqrt{1-e^2}\, dt.$$

L'équation (2) donne

$$\theta = \text{arc}\left(\cos = \frac{a\,(1-e^2)-r}{er}\right),$$

$$d\theta = \frac{a\sqrt{1-e^2}\, dr}{r\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}};$$

par conséquent, on aura

$$nadt = \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

Pour intégrer ces formules, faisons

$$r = a\,(1 - e\cos u); \qquad (a)$$

nous aurons

$$dr = ae\sin u, \quad ndt = (1 - e\cos u)\, du;$$

à cause de $r = a\,(1-e)$ au point B, il faudra que l'angle u soit nul en ce point où l'on a aussi $t = 0$; en intégrant, on aura donc

$$nt = u - e\sin u. \qquad (b)$$

En mettant pour r sa valeur dans celle de $d\theta$, et observant que $\cos u = \cos^2 1/2\, u - \sin^2 1/2\, u$, il en résulte

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\, du}{1 - e\cos^2\frac{1}{2}u + e\sin^2\frac{1}{2}u};$$

et si l'on fait

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}u = s, \quad \frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u} = 2ds,$$

cette valeur devient

$$d\theta = \frac{2\sqrt{1-e^2}\, ds}{1 - e + (1+e)\, s^2}.$$

En intégrant et observant que θ et u sont zéro en

même temps, c'est-à-dire, au point B, on aura

$$\frac{1}{2}\theta = \text{arc}\left(\text{tang} = z\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \text{tang}\,\frac{1}{2}u, \quad (c)$$

en remettant pour z sa valeur.

Ces trois équations (a), (b), (c), expriment, sous forme finie, les valeurs de r, nt, θ, au moyen de la variable auxiliaire u, qu'on appelle l'*anomalie excentrique*. En éliminant u entre elles, on aura les deux coordonnées polaires r et θ de la planète en fonctions du temps, sous forme de séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité, qui seront, par conséquent, très convergentes dans le cas des anciennes planètes. Après qu'on aura formé ces séries, on y pourra remplacer les puissances de $\cos nt$ qui se trouveront dans le développement de r, et celles de $\sin nt$ que renfermera le développement de $\theta - nt$, par des cosinus et des sinus des multiples de nt. Si l'on conçoit qu'on ait ensuite ordonné ces développemens du rayon vecteur et de l'équation du centre suivant les cosinus ou sinus des multiples croissans de nt, on pourra déterminer directement, par l'analyse suivante, les valeurs des coefficiens de ces deux séries en fonctions de l'excentricité.

221. Je fais

$$r = A_0, + A_1 \cos nt + A_2 \cos 2nt + \ldots + A_i \cos int + \text{etc.},$$
$$\theta - nt = B_1 \sin nt + B_2 \sin 2nt + \ldots + B_i \sin int + \text{etc.};$$

A^0, A_1, A_2, etc., B_1, B^2, etc., et généralement A_i et B_i, étant les coefficiens qu'il s'agit de déterminer.

Si i et i' sont deux nombres entiers positifs et différens, on aura, en effectuant les intégrations,

$$\int_0^\pi \cos int \cos i'nt\, d.\, nt = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin int \sin i'nt\, d.\, nt = 0;$$

et dans le cas de $i = i'$, on trouvera

$$\int_0^\pi \cos^2 int\ d.\ nt = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin^2 int\ d.\ nt = \frac{1}{2}\pi.$$

Ces dernières formules ne s'appliquent point à $i = 0$; dans ce cas, la première intégrale est égale à π, et la seconde à zéro

Cela étant, je multiplie le développement de r par $\cos int\ d.\ nt$, et celui de $\theta - nt$ par $\sin int\ d.\ nt$; puis j'intègre depuis $nt = 0$ jusqu'à $nt = \pi$. Tous les termes s'évanouissent, excepté ceux qui ont A_i ou B_i pour coefficient, et l'on en conclut

$$A_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi r \cos int\ d.\ nt,$$

$$B_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\theta - nt) \sin int\ d.\ nt.$$

Dans le cas de $i = 0$, on aura, en particulier,

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\ d.\ nt,$$

c'est-à-dire qu'il faudra réduire à moitié la valeur générale de A_i. En intégrant par partie, et observant que $\theta - nt$ est zéro aux deux limites $nt = 0$ et $nt = \pi$, l'expression de B_i pourra être remplacée par celle-ci :

$$B_i = \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \cos int\ d(\theta - nt).$$

Je substitue à la place de r, nt, θ, leurs valeurs en fonctions de u, tirées des équations (a), (b), (c); à cause de

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos u}, \qquad \frac{dnt}{du} = 1 - e\cos u,$$

et parce que $u = 0$ et $u = \pi$ répondent à $nt = 0$ et $nt = \pi$, il en résultera

$$A_i = \frac{2a}{\pi}\int_0^\pi (1 - e\cos u)^2 \cos(iu - ie\sin u)\, du,$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left[\sqrt{1-e^2} - (1 - e\cos u)^2\right] \frac{\cos(iu - ie\sin u)}{1 - e\cos u\, du}$$

formules qui feront connaître les valeurs numériques des coefficiens A_i et B_i, soit par la méthode des quadratures, soit par la réduction en séries. Pour cette réduction, on aura, par le théorème de Taylor,

$$\cos(iu - ie\sin u) = \left(1 - \frac{i^2 e^2}{2}\sin^2 u + \frac{i^4 e^4}{2.3.4}\sin^4 u - \text{etc.}\right)\cos iu$$
$$+ \left(ie\sin u - \frac{i^3 e^3}{2.3}\sin^3 u + \text{etc.}\right)\sin iu;$$

et il en résultera pour A_i et B_i des séries d'intégrales relatives à u, dont les valeurs exactes s'obtiendront toutes, soit immédiatement, soit par des formules connues; en sorte que l'on pourra prolonger ces développemens de A_i et B_i aussi loin qu'on voudra. On pourra même obtenir leurs termes généraux en fonctions de i et de e; mais ce n'est point ici le lieu d'insister davantage sur ce sujet, qui appartient spécialement à l'Astronomie.

Relativement a $i = 0$, on a

$$A_0 = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}(1-e\cos u)^2\,du = a\left(1+\frac{1}{2}e^2\right),$$

en ne prenant que la moitié de la valeur de A_i, qui répond à $i = 0$: c'est le seul des coefficiens A_0, A_1, A_2, etc., B_1, B_2, etc., dont on puisse obtenir la valeur exacte.

222. Si l'on appelle v la vitesse de la planète au bout du temps t, et δ l'angle que fait sa direction avec le prolongement de son rayon vecteur r ou OM, on aura (n° 156)

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2}, \quad v\sin\delta = r\frac{d\theta}{dt}.$$

En éliminant dt au moyen de l'équation (1), on a

$$v^2 = c^2\left(d.\frac{1}{r}\Big/d\theta\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}, \quad v\sin\delta = \frac{c}{r}.$$

En vertu de l'équation (2), on a aussi

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{a(1-e^2)}, \qquad d.\frac{1}{r}\Big/d\theta = -\frac{e\sin\theta}{a(1-e^2)};$$

d'où il résulte

$$a^2(1-e^2)^2 v^2 = (1+2e\cos\theta+e^2)\,c^2,$$

et, par conséquent,

$$v^2 = \frac{c^2}{a^2(1-e^2)}\left(\frac{2a}{r}-1\right), \quad \sin\delta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\frac{2a}{r}-1}}; \qquad (d)$$

ce qui montre comment, dans le mouvement elliptique, la vitesse et la direction du mobile en chaque point se déterminent au moyen de son rayon vecteur. D'après la valeur de c du n° 220, celle de v^2 peut aussi être écrite ainsi :

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}\left(\frac{2a}{r}-1.\right)$$

Ces formules, jointes à celles des numéros précédens, font connaître complètement le mouvement d'une planète dans le plan de son orbite; mais quand on veut considérer à la fois les mouvemens de deux ou de plusieurs planètes, il est nécessaire de rapporter la position de chacune d'elles à un autre plan, qui est ordinairement le plan de l'*écliptique* ou de l'orbite de la terre.

223. Soient NON′ (fig. 53) l'intersection du plan de l'orbite d'une planète avec un plan passant par le centre O du soleil, OE une droite menée dans ce second plan, OM′ la projection du rayon vecteur OM de la planète sur ce même plan. Désignons par γ l'inclinaison des deux plans, par α l'angle NOE, par ω l'angle BON que fait le rayon vecteur OB aboutissant au périhélie avec la droite ON. Ces trois angles α, γ, ω, devront être donnés, et ils détermineront le plan de l'orbite et la position de l'ellipse dans ce plan. Soient aussi φ et ψ les angles variables MOM′ et M′OE, que fait le rayon vecteur OM avec sa projection OM′, et cette projection avec la droite OE, lesquels angles détermineront, à chaque instant, la direction du rayon OM aboutissant à la planète.

Cela posé, considérons l'angle trièdre qui a son sommet au point O, et dont les trois arêtes sont OM, OM′, ON. L'anomalie vraie, ou l'angle MOB, étant toujours θ, les trois faces de cet angle trièdre seront

$$\begin{aligned} MON &= MOB + BON = \theta + \omega, \\ M'ON &= M'OE - NOE = \psi - \alpha, \\ MOM' &= \varphi; \end{aligned}$$

la première sera opposée à un angle droit, et la troisième à l'angle γ. D'après les premières règles de la Trigonométrie sphérique, on aura donc

$$\sin\varphi = \sin\gamma\sin(\theta+\omega),$$
$$\tang(\psi-\alpha) = \cos\gamma\tang(\theta+\omega);$$

et l'angle θ étant connu en fonction de t, par ce qui précède, chacun des angles φ et ψ le sera aussi, au moyen de ces formules.

Lorsque le plan donné sur lequel on compte l'angle ψ est l'écliptique, et que la droite OE, à partir de laquelle on compte cet angle, dans le sens du mouvement de la terre, est celle qui va du soleil à l'équinoxe du printemps, les angles ψ et φ s'appellent la *longitude* et la *latitude* de la planète que l'on considère. La droite NON′ est la ligne des *nœuds* de son orbite ; si elle entre dans l'hémisphère *boréal* quand elle traverse le plan de l'écliptique au point N, ce point est le nœud *ascendant*, et N′ le nœud *descendant*. Selon que la planète se trouve dans cet hémisphère ou dans l'hémisphère *austral*, la latitude φ est positive ou négative, et l'angle MON, ou $\theta+\omega$, est plus grand ou moindre que 180°. L'angle φ s'étend depuis — 90° jusqu'à 90°, et l'angle MON, ainsi que la longitude M′OE, depuis zéro jusqu'à 360°.

Si l'on remplace le point O par le centre de la terre, que l'on prenne l'équateur pour le plan donné sur lequel on compte l'angle ψ, et pour origine de cet angle la droite OE qui va de ce centre au premier point du signe *aries*, les angles

ψ et φ seront alors l'*ascension* droite et la *déclinaison* de la planète. En appliquant les formules précédentes au mouvement apparent du soleil autour de la terre, on aura $\alpha = 0$, γ exprimera l'*obliquité* de l'écliptique, et l'on devra prendre pour $\theta + \omega$ la longitude de cet astre; d'où il résulte qu'en la désignant par λ, on aura

$$\sin\varphi = \sin\gamma \sin\lambda, \quad \tang\psi = \cos\gamma \tang\lambda,$$

et, en même temps,

$$\sin\varphi = \frac{\sin\gamma \tang\psi}{\sqrt{\cos^2\gamma + \tang^2\psi}}.$$

Les plus grandes déclinaisons boréale et australe répondent à $\lambda = 90°$ et $\lambda = 270°$, et sont $\pm\gamma$. Cet angle γ est aussi celui que fait l'axe de rotation de la terre avec la perpendiculaire au plan de l'écliptique; il est soumis à une petite inégalité qu'on appelle la *nutation*, dont la période est d'environ 18 ans, et le *maximum* de $9'',4$ seulement. Sa valeur moyenne, au commencement de 1800, était

$$\gamma = 23° \, 27' \, 55'';$$

elle diminue de $0'',45692$ par année.

224. Dans tout ce qui précède, on n'a point eu égard à la force qui agit sur chaque planète, dont le mouvement a été déterminé d'après les données de l'observation, et sans recourir aux principes de la Dynamique; il s'agit maintenant de déterminer les lois de cette force, ainsi qu'il a été dit précédemment (n° 217).

Il suit de la première loi de Képler que la force qui retient chaque planète dans son orbite est constamment dirigée vers le centre du soleil; quoique cette conséquence nécessaire de la proportionnalité des aires au temps ait été déduite des équations du mouvement dans le n° 155, il ne sera pas superflu d'en donner ici une démonstration synthétique.

Soit $M_1 M$ (fig. 54) le côté de la trajectoire que le mobile décrit pendant un temps τ infiniment petit. Arrivé au point M, si aucune force n'agissait sur ce mobile, il décrirait, dans un autre temps τ, une partie Mm du prolongement MT de $M_1 M$, égale à $M_1 M$; mais, à cause de la force à laquelle il est soumis, il se transporte, dans ce second instant, en un autre point M'. Soit MK la direction de cette force au point M; pendant le temps τ, on pourra supposer qu'elle reste parallèle à elle-même, et alors si l'on tire la droite mM', elle sera parallèle à MK (n° 148). Or, si C est le centre fixe autour duquel le rayon vecteur CM décrit des aires proportionnelles au temps, les triangles $M_1 CM$ et MCM', qui sont les aires décrites dans deux instans égaux, seront équivalens; mais les triangles $M_1 CM$ et MCm le sont aussi, puisqu'ils ont leurs sommets au même point C, et leurs bases $M_1 M$ et Mm égales et sur une même droite; les triangles MCm et MCM' sont donc équivalens; et comme ils ont une même base MC, il faut que la droite mM' qui joint leurs sommets, soit parallèle à cette base; par conséquent, la droite MK, parallèle à mM', coïncide avec MC. Donc, en chaque point M de la trajectoire, la direction MK de la force sera celle du rayon vecteur MC; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Réciproquement, si la force qui agit sur le mobile, au point quelconque M, est dirigée suivant MC, la droite mM' sera parallèle à ce rayon vecteur, les deux triangles $M'CM$ et MCm seront équivalens, et, par conséquent aussi, les deux triangles $M'CM$ et $M_1 CM$. Les aires décrites par le rayon vecteur autour du point C, en deux instans consécutifs et égaux, étant égales, et cela ayant lieu dans toute l'étendue de la trajectoire, si la force qui agit sur le mobile est constamment dirigée vers ce point, il s'ensuit que les aires décrites en temps égaux seront égales, et, en des temps quelconques, proportionnelles à ces temps.

225. Soit, comme dans le n° 218, M la position de la planète au bout du temps t (fig. 52). Conservons toutes les notations de ce numéro, de sorte que r et θ soient le rayon vecteur OM et l'angle MOB; désignons, en outre, par x et y les deux coordonnées rectangulaires OP et PM, rapportées à des axes Ox et Oy, dont le premier passe par le périhélie B; nous aurons

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Soit aussi R la force accélératrice, inconnue en grandeur, qui agit sur la planète. Cette force est dirigée, comme on vient de le voir, suivant le rayon vecteur, et elle agit du point M vers le point O, à cause que la trajectoire tourne sa concavité du côté du soleil; les cosinus des angles qu'elle fait avec les prolongemens de x et y sont donc $-\frac{x}{r}$ et $-\frac{y}{r}$; par conséquent les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}. \quad (1)$$

En appelant toujours v la vitesse au point M, nous aurons

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2},$$

et, en différentiant,

$$\frac{1}{2}d.v^2 = \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy;$$

par conséquent, si l'on ajoute les équations (1) après les avoir multipliées par dx et dy, et si l'on observe que $xdx + ydy = rdr$, il en résultera

$$\frac{1}{2}d.v^2 = -Rdr.$$

Mais, dans le mouvement elliptique, on a (n° 222)

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

en faisant

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu;$$

on aura donc

$$R = \frac{\mu}{r^2};$$

ce qui montre que la force qui agit sur chaque planète suit la raison inverse du carré de la distance au centre du soleil.

La grandeur de cette force est μ à l'unité de distance; soit μ' ce qu'elle devient pour une autre planète, dont le demi-grand axe et le temps de la révolution seront représentés par a' et T'; on aura de même

$$\mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}.$$

Or, d'après la troisième loi de Képler, on a

$$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3;$$

d'où il résulte

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}, \qquad \mu = \mu';$$

par conséquent, à l'unité de distance, et, généralement, à la même distance du soleil, la force accélératrice R est la même pour deux planètes différentes.

La force motrice de chaque planète est donc indépendante de sa nature particulière, et proportionnelle à sa masse comme les poids à la surface de la terre. Elle varie d'une planète à une autre suivant la même loi que d'une position à une autre de la même planète; et si deux planètes étaient situées à la même distance du soleil et abandonnées à elles-mêmes, sans vitesse initiale, elles tomberaient d'un même mouvement vers cet astre, et l'atteindraient dans le même intervalle de temps.

Ainsi, les trois lois de Képler nous font connaître complètement la force qui retient les planètes dans leurs orbites : la loi des aires proportionnelles au temps nous fait voir que cette force est constamment dirigée vers le centre du soleil; celle du mouvement elliptique, ou l'expression de la vitesse qui se déduit de cette loi et de la précédente, nous montre que son intensité varie, pour une même planète, en raison inverse du carré des distances au soleil; enfin, nous concluons de la loi des carrés des temps des révolutions proportionnels aux cubes des grands axes, qu'à égalité de distance au centre de cet astre, l'intensité de la force motrice est proportionnelle aux masses de chaque planète, et indépendante de sa nature particulière.

226. Newton a étendu aux comètes, dans leur mouvement autour du soleil, et aux satellites autour de leurs planètes respectives, les lois de Képler et les conséquences qui s'en déduisent relativement à la force qui agit sur ces mobiles.

Les comètes, dans leur mouvement, ne diffèrent des planètes qu'en ce qu'elles ne sont pas constamment visibles, à raison de l'éloignement de leurs aphélies; ce qui rend très difficile la détermination de leurs orbites. Néanmoins, il y a maintenant trois comètes dont on connaît les orbites et les temps de leurs révolutions, presque aussi exactement que pour les planètes. A l'égard des autres comètes, on calcule leur mouvement par approximation, en prenant pour la trajectoire, dans la petite étendue où chaque comète est visible, une parabole dont le foyer est au centre du soleil, et supposant toujours les aires décrites par le rayon vecteur autour de ce point, proportionnelles au temps pour chaque comète. Ce cas est compris dans les formules précédentes du mouvement elliptique, en y faisant

$$a = \infty, \quad a(1 - e) = b;$$

b désignant la distance périhélie OB, qui est une quantité finie.

Les masses des comètes sont très petites par rapport à celles des planètes et paraissent d'une tout autre nature. En vertu de la troisième loi de Képler, les forces motrices de deux comètes, ou d'une comète et d'une planète, à la même distance du soleil, sont entre elles comme leurs masses respectives, et leurs forces accélératrices sont égales; il en est de même à l'égard de plusieurs satellites d'une même planète, mais non pas relativement aux satellites de deux planètes différentes, ou à un satellite et une planète; car la loi des carrés du temps des révolutions proportionnels aux cubes des grands axes n'a lieu que pour les corps qui tournent autour d'un même centre; nous ferons connaître par la suite le rapport qui existe entre les forces motrices de deux satellites appartenant à des planètes différentes, et entre celles d'une planète et d'un satellite.

Ajoutons encore que dans ces derniers temps on a étendu les lois du mouvement elliptique aux étoiles doubles, dans lesquelles un mouvement révolutif de l'une des étoiles autour de l'autre a été reconnu, et que leurs positions relatives, calculées d'après ces lois, se sont accordées aussi bien qu'on pouvait l'espérer avec leurs positions observées.

227. Examinons actuellement les altérations que la résistance d'un éther très rare répandu autour du soleil, produirait dans le mouvement elliptique des planètes. Leur non sphéricité parfaite et le frottement du fluide contre leur surface, pour-

raient faire sortir le centre de gravité du plan de son orbite : on fera abstraction de ces deux circonstances, et il ne s'agira que de former les équations du mouvement de ce point, en ayant égard, à la fois, à la force centrale en raison inverse du carré de la distance, et à une force tangentielle provenant de la résistance du milieu

Je supposerai, comme dans le mouvement des projectiles dans l'air, cette résistance proportionnelle au carré de la vitesse, à la densité du milieu et à la surface de chaque planète; la force accélératrice qui en résultera sera, en outre, en raison inverse de la masse du mobile; je la représenterai par $\rho \frac{ds^2}{dt^2}$, en désignant par ds l'élément de la trajectoire, et par ρ un coefficient très petit et proportionnel pour une même planète, à la densité du milieu. En observant que cette force agit en sens contraire de la vitesse du mobile, et représentant toujours la force principale dirigée vers le centre du soleil, par μ à l'unité de distance et par $\frac{\mu}{r^2}$ à la distance r, les équations (1) devront être remplacées par celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= -\rho \frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= -\rho \frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En employant les coordonnées polaires, on en déduit, sans difficulté, ces autres équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,(dr^2 + r^2\,d\theta^2)}{dt^2} - 2\,\mu d.\frac{1}{r} &= -\frac{2\rho\,(dr^2 + r^2\,d\theta^2)}{dt^2}\,ds, \\ d.\,r^2\,d\theta &= -\rho r^2\,d\theta ds, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

qui en sont une transformation.

228. Lorsqu'on néglige leurs seconds membres, les équations (2) se réduisent à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \quad (4)$$

et les équations (3) à celles-ci :

$$\frac{d(dr^2 + r^2\,d\theta^2)}{dt^2} - 2\,\mu\,d.\frac{1}{r} = 0, \; d.\,r^2\,d\theta = 0. \quad (5)$$

On satisfait à ces équations (5) au moyen des formules (a), (b), (c), du n° 220; ces formules n'en sont pas les intégrales complètes, parce qu'elles ne contiennent que deux constantes arbitraires a et e; mais si l'on fait attention que les équations (5) ne renferment pas explicitement les variables θ et t, et qu'elles contiennent seulement leur différentielles $d\theta$ et dt, on en conclut que les formules du numéro cité devront encore satisfaire à ces équations, en ajoutant des constantes quelconques à t et θ. De cette manière, les intégrales complètes des équations (5), et, par conséquent, des équations (4), seront exprimées par ce système de formules :

$$\left.\begin{aligned} r &= a\,(1 - e\cos u), \\ nt + \iota - \omega &= u - e\sin u, \\ \tang\tfrac{1}{2}(\theta - \omega) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tang\tfrac{1}{2}u; \end{aligned}\right\} (a)$$

a, e, ι, ω, étant les quatre constantes arbitraires, et n une constante liée à a par l'équation

$$a^3 n^2 = \mu,$$

qui résulte de $\frac{2\pi}{T} = n$, $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu$, par l'éliminatoin de T.

Le zéro de la variable u répondra toujours à la plus petite valeur de r, ou au périhélie B (fig. 52). Pour $u = 0$, on aura $\theta = \omega$; de sorte que θ représentera maintenant l'angle MOE, compté à partir d'une droite OE, qui fait un angle BOE $= \omega$, avec OB. La valeur de θ en série sera de la forme

$$\theta = nt + \iota + \theta_1,$$

en désignant pas θ_1 sa partie périodique, ordonnée suivant les sinus des multiples croissans de $nt + \iota - \omega$. Cet angle θ sera la longitude vraie de la planète dans le plan de son orbite, au bout du temps t quelconque; $nt + \iota$ exprimera sa longitude moyenne au même instant, ι sa longitude moyenne à l'époque d'où l'on compte le temps t, et ω la longitude de son périhélie.

229. Cela posé, quand on connaît les intégrales complètes d'un système d'équations différentielles comme les équations (4), on en déduit les intégrales d'un autre système d'équations différentielles telles que les équations (2), qui ne diffèrent des premières que par de très petits termes, au moyen d'une méthode dont les géomètres ont fait les plus heureuses applications à la *Mécanique céleste*, et que je vais exposer à l'occasion du problème qui nous occupe.

Les valeurs de x et y, qui satisfont aux équations (4), sont de la forme :

$$x = f\,(t, a, e, \iota, \omega), \quad y = F\,(t, a, e, \iota, \omega,);$$

f et F indiquant des fonctions données. Pour que ces valeurs satisfassent encore aux équations (4), j'y considère a, e, ι, ω, comme de nouvelles variables qu'il s'agira de déterminer. Mais ces inconnues étant au nombre de quatre, et les équations (2) seulement au nombre de deux, je peux prendre

à volonté deux équations auxiliaires; et je fais, en conséquence,

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{da}da+\frac{df}{de}de+\frac{df}{d\iota}d\iota+\frac{df}{d\omega}d\omega&=0,\\ \frac{dF}{da}da+\frac{dF}{de}de+\frac{dF}{d\iota}d\iota+\frac{dF}{d\omega}d\omega&=0,\end{aligned}\right\}(b)$$

ou, autrement dit, j'égale à zéro les parties de dx et dy, provenant des variations de a, e, ι, ω. De cette manière, les valeurs complètes de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont simplement

$$\frac{dx}{dt}=\frac{df}{dt},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dF}{dt}.$$

En différentiant de nouveau, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{d^2f}{dtda}\frac{da}{dt}+\frac{d^2f}{dtde}\frac{de}{dt}+\frac{d^2f}{dtd\iota}\frac{d\iota}{dt}+\frac{d^2f}{dtd\omega}\frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2F}{dt^2}+\frac{d^2F}{dtda}\frac{da}{dt}+\frac{d^2F}{dtde}\frac{de}{dt}+\frac{d^2F}{dtd\iota}\frac{d\iota}{dt}+\frac{d^2F}{dtd\omega}\frac{d\omega}{dt}.$$

Or, par hypothèse, les valeurs précédentes de x et y satisfont aux équations (4), en y regardant a, e, ι, ω, comme des constantes arbitraires, on a donc

$$\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=0,\quad \frac{d^2F}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=0;$$

par conséquent, si l'on substitue les valeurs complètes de $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ dans les équations (2), on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2f}{dtda}da+\frac{d^2f}{dtde}de+\frac{d^2f}{dtd\iota}d\iota+\frac{d^2f}{dtd\omega}d\omega&=-\rho\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}dt,\\ \frac{d^2F}{dtda}da+\frac{d^2F}{dtde}de+\frac{d^2F}{dtd\iota}d\iota+\frac{d^2F}{dtd\omega}d\omega&=-\rho\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}dt;\end{aligned}\right\}(c)$$

et ce système des quatre équations (b) et (c) servira à déterminer a, e, ι, ω, en fonctions de t.

230. Cette substitution de quatre équations différentielles du premier ordre, aux deux équations (2), qui sont du second ordre, n'aurait, en général, aucun avantage. Mais les valeurs de da, de, $d\iota$, $d\omega$, qu'on tire des équations (b) et (c), auront pour facteur le coefficient ρ de la résistance, qui est une très petite quantité; les parties variables de a, e, ι, ω, seront donc aussi très petites; et si l'on néglige le carré de ρ, on pourra considérer a, e, ι, ω, comme des constantes, dans les expressions de da, de, $d\iota$, $d\omega$; ce qui réduira aux quadratures le calcul des parties variables de a, e, ι, ω. Par la méthode des approximations successives, on obtiendra ainsi des valeurs de ces quantités, ordonnées suivant les puissances de ρ et aussi exactes que l'on voudra; nous nous arrêterons à la première puissance de ρ.

Les équations (a), après qu'on y aura substitué les valeurs variables de a, e, ι, ω, feront connaître, comme dans le cas du mouvement elliptique, les valeurs de r et θ en fonctions du temps. La trajectoire sera encore une ellipse, mais dont les élémens varieront continuellement. Si l'on suppose que l'on construise à chaque instant l'ellipse constante qui répond aux valeurs des élémens à ce même instant, les ordonnées x et y, et leurs différentielles dx et dy, seront communes, en vertu des équations (b), à cette ellipse et à la trajectoire, qui sera, par conséquent, la courbe de contact de toutes les ellipses constantes. Par la même raison, la vitesse du mobile et ses composantes auront les mêmes expressions, et seront déterminées par les formules (d) du n° 222, dans le mouvement elliptique et dans le mouvement altéré par la résistance du milieu.

231. Observons qu'on a identiquement

$$nt=\int ndt+\int tdn;$$

en comprenant $\int tdn$ dans l'inconnue ι, on pourra donc écrire ainsi :

$$\int ndt+\iota-\omega=u-e\sin u,\quad (d)$$

la seconde équation (a). Alors, en même temps qu'on changera, dans les équations du mouvement elliptique, les constantes a, e, ι, ω, dans leurs valeurs variables, il y faudra remplacer nt par l'intégrale $\int ndt$, que nous supposerons nulle quand $t=0$. La quantité n qu'elle renferme se déduira de a, au moyen de la formule

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}},$$

donnée par l'équation $a^3n^2=\mu$ du n° 228. Cette intégrale $\int ndt$ exprimera le moyen mouvement de la planète (n° 219), altéré par la résistance du milieu; et, de cette manière, la différentielle du moyen mouvement sera ndt, dans le mouvement troublé comme dans le mouvement elliptique.

Au périhélie, l'angle $\theta - \omega$ est égal à zéro ou à un multiple de 360°; en vertu de la première équation (a), il en sera de même à l'égard de l'angle u; donc, pendant l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs de la planète à son périhélie, la quantité $\int n dt + \iota - \omega$ augmentera de 360°; ce qui servira à déterminer cet intervalle, quand on connaîtra n, ι, ω en fonctions de t. Le temps de la révolution, ou l'intervalle compris entre deux retours consécutifs de la planète au même point fixe, sera celui qui répondra à un pareil accroissement de sa longitude vraie θ.

232. Nous pouvons remplacer les équations (b) et (c) par d'autres équations équivalentes, desquelles il sera plus facile de déduire les valeurs de da, de, $d\iota$, $d\omega$.

Pour cela, observons que si une équation quelconque

$$\varphi\,(nt,\ r,\ \theta,\ a,\ e,\ \iota,\ \omega) = 0,$$

a lieu dans le mouvement elliptique, elle subsistera encore dans le mouvement altéré par la résistance du milieu, en y regardant a, e, ι, ω, comme des variables déterminées par les équations (b) et (c), et y mettant $\int n dt$ à la place de nt. La différentielle de la fonction φ sera donc nulle, soit qu'on la prenne, dans le premier cas, par rapport à nt, r, θ; soit qu'on la prenne, dans le second cas, par rapport à $\int n dt$, r, θ, a e, ι, ω; or, r et θ étant des fonctions de x et y, leurs différentielles sont les mêmes dans les deux cas, en vertu des équations (b); par conséquent, en supprimant, dans la différentielle complète de φ, la partie $\frac{d\varphi}{d.nt} d.nt + \frac{d\varphi}{dr} dr + \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta$, qui est séparément nulle, on aura

$$\frac{d\varphi}{da} da + \frac{d\varphi}{de} de + \frac{d\varphi}{d\iota} d\iota + \frac{d\varphi}{d\omega} d\omega = 0.$$

Cela posé, après avoir mis dans l'équation (2) du n° 218, $\theta - \omega$ à la place de θ, on en déduit

$$r + re \cos(\theta - \omega) = a\,(1 - e^2);$$

en différentiant, comme il vient d'être dit, on aura donc

$$r \cos\theta\, d.\, e \cos\omega + r \sin\theta\, d.\, e \sin\omega = d.a(1 - e^2). \quad (e)$$

Je différentie de même la première équation (a) et l'équation (d); ce qui donne

$$(1 - e \cos u)\, da - a \cos u\, de + ae \sin u\, du = 0,$$
$$d\iota - d\omega + \sin u\, de - (1 - e \cos u)\, du = 0,$$

en considérant u comme une fonction de a, e, ι, ω. J'élimine du entre ces deux équations; il vient

$$(1 - e\cos u)^2 da + a(e - \cos u) de + ae \sin u\,(d\iota - d\omega) = 0.$$

Mais, en mettant dans les formules

$$\cos u = \frac{1 - \tang^2 \frac{1}{2} u}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} u},\quad \sin u = \frac{2 \tang \frac{1}{2} u}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} u},$$

à la place de tang 1/2 u sa valeur donnée par la troisième équation (a), on a

$$\cos u = \frac{e + \cos(\theta - \omega)}{1 + e \cos(\theta - \omega)},\quad \sin u = \frac{\sqrt{(1 - e^2)}\, \sin(\theta - \omega)}{1 + e \cos(\theta - \omega)};$$

au moyen de quoi l'équation précédente devient

$$\frac{(1 - e^2)\, da}{1 + e \cos(\theta - \omega)} - a \cos(\theta - \omega)\, de + \frac{ae \sin(\theta - \omega)}{\sqrt{1 - e^2}} (d\iota - d\omega) = 0. \quad (f)$$

Ce que nous disons relativement à l'équation $\varphi = 0$, s'applique également au cas où la fonction φ renferme les différentielles premières de r et θ. Ainsi, l'on a, dans le mouvement elliptique,

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a},$$
$$r^2 d\theta = \sqrt{\mu a\,(1 - e^2)}\, dt,$$

en mettant $\sqrt{\mu a}$ au lieu de $a^2 n$ dans la valeur de $r^2 d\theta$ du n° 220: or, les différentielles dr et $d\theta$, ainsi que r et θ, restant les mêmes lorsque a, e, ι, ω, deviennent variables, il s'ensuit que ces deux équations subsisteront encore dans cette hypothèse; cela étant, en comparant leurs différentielles complètes aux équations (3) du n° 228, on en conclut

$$\left.\begin{aligned} d.\,\frac{1}{a} &= 2\rho \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) ds, \\ d.\,\sqrt{a\,(1 - e^2)} &= -\rho \sqrt{a\,(1 - e^2)}\, ds. \end{aligned}\right\} (g)$$

Maintenant, on tirera facilement des quatre équations (e), (f), (g), les valeurs de da, de, $d\iota$, $d\omega$, en y mettant pour r sa valeur, savoir,

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)},$$

afin de les exprimer en fonctions de l'angle θ seulement, on trouve

$$\left.\begin{aligned} da &= -\frac{2\rho a}{1-e^2}\left[1+2e\cos(\theta-\omega)+e^2\right]ds, \\ de &= -2\rho\left[e+\cos(\theta-\omega)\right]ds, \\ e\,d\omega &= -2\rho\sin(\theta-\omega)\,ds, \\ d\iota &= +\frac{2\rho e\sin(\theta-\omega)\left[\sqrt{1-e^2}-e^2-e\cos(\theta-\omega)\right]}{\left[1+e\cos(\theta-\omega)\right](1+\sqrt{1-e^2})} \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

La valeur de ds qu'on devra substituer dans ces formules, est

$$ds = \sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}}\,d\theta\,;$$

et en y substituant celle de r, elle devient

$$ds = \frac{a(1-e^2)\sqrt{1+2e\cos(\theta-\omega)+e^2}}{\left[1+e\cos(\theta-\omega)\right]^2}\,d\theta.$$

On intégrera les seconds membres des équations (h), en y considérant a, e, ι, ω, comme des constantes, ainsi qu'il a été dit précédemment; et quand le coefficient ρ sera donné en fonction de r, et conséquemment de θ, on en déduira, par la méthode des quadratures ou par la réduction en série, les valeurs variables de a, e, ι, ω, qui devront être substituées dans les équations du mouvement elliptique.

233. Si l'excentricité e est une très petite fraction, les formules (h), réduites à leur partie principale, deviendront

$$da = -2\rho a^2\,d\theta,\quad de = -2\rho a\cos(\theta-\omega)\,d\theta,$$
$$e\,d\omega = -2\rho a\sin(\theta-\omega)\,d\theta,\quad d\iota = 2\rho a e\sin(\theta-\omega)\,d\theta\,;$$

et l'on y pourra considérer le coefficient ρ comme constant. En intégrant et désignant par δa, δe, $\delta\omega$, $\delta\iota$, les parties variables de a, e, ι, ω, on aura donc

$$\begin{aligned} \delta a &= -2\rho a^2\theta, \\ \delta e &= -2\rho a\sin(\theta-\omega), \\ e\,\delta\omega &= 2\rho a\cos(\theta-\omega), \\ \delta\iota &= -2\rho a e\cos(\theta-\omega). \end{aligned}$$

Si l'on exprime par δn la partie correspondante de n, ou de $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$, de sorte qu'on ait

$$\delta n = -\frac{3\sqrt{\mu}}{2a^2\sqrt{a}}\,\delta a,$$

il en résultera

$$\delta n = 3\rho a n\theta.$$

On voit donc que l'effet de la résistance d'un milieu très rare sur le mouvement d'une planète très peu excentrique, serait de faire décroître indéfiniment le grand axe, d'augmenter de même la vitesse angulaire n, et de produire dans chacune des trois quantités e, ω, ι, une inégalité dont la période est la même que la révolution de cette planète. Non seulement le mouvement angulaire s'accélérerait de plus en plus, mais même la vitesse absolue; car elle est à peu près égale à an; son accroissement est donc $a\delta n + n\delta a$; quantité positive et égale à $\rho a^2 n\theta$.

En négligeant tout-à-fait l'excentricité, on a

$$r = a,\quad \theta = \int n\,dt + \iota\,;$$

si donc on désigne par δr et $\delta\theta$, les parties du rayon vecteur et de la longitude qui proviennent de la résistance du milieu, on aura, au même degré d'approximation,

$$\delta r = -2\rho a^2\theta,\quad \delta\theta = \frac{3}{2}\rho a\theta^2.$$

En vertu de cette diminution continuelle du rayon vecteur, qui s'élèverait à $4\pi\rho a^2$ à chaque révolution de la planète, elle finirait nécessairement par atteindre la surface du soleil.

Au reste, s'il existe dans l'espace un éther qui influe sur le mouvement des astres, c'est sur les comètes que cette influence peut être sensible, à cause de la petitesse de leur masse, et parce que, toutes choses d'ailleurs égales, le cofficient ρ est en raison inverse de la masse du mobile. Et, en effet, on n'a reconnu jusqu'à présent aucune trace d'une résistance de l'éther dans le mouvement des planètes et des satellites; mais d'après les calculs de M. Enke, cette résistance paraît influer d'une manière appréciable sur le mouvement de la comète récemment découverte, dont la révolution est d'environ 1200 jours.

§ III. *Mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale.*

234. Le problème que nous allons résoudre est l'inverse de celui du paragraphe précédent : on supposait alors la trajectoire et la loi du mouvement données par l'observation, et il s'agissait de déterminer en grandeur et en direction, la force à laquelle ce mouvement était dû; maintenant, on suppose qu'une force constante dirigée vers un centre fixe, et donnée en fonction de la distance du mobile à ce point, est appliquée à ce mobile, et

l'on propose d'en conclure la trajectoire et la loi du mouvement.

Cette courbe DMB (fig. 55) sera comprise dans le plan passant par le centre fixe C, et par la direction DA de la vitesse initiale. Je mène dans ce plan et par le point C, deux axes rectangulaires Cx et Cy, dont le premier passe par le point de départ D du mobile, et qui seront les axes des coordonnées. Au bout du temps t, compté depuis ce départ, je suppose que le mobile soit en M, et je désigne par x et y ses coordonnées CP et PM, par r son rayon vecteur CM, et par R sa force accélératrice, dirigée de M vers C et donnée en fonction de r; les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}\,\mathrm{R}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}\,\mathrm{R}; \quad (1)$$

et si la force R était dirigée suivant le prolongement de CM, il suffirait de changer les signes de leurs seconds membres.

On en déduit immédiatement les deux intégrales premières

$$xdy - ydx = cdt, \quad \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2\int \mathrm{R}dr + b,$$

dans lesquelles b et c sont les constantes arbitraires; et si l'on appelle θ l'angle MCx, de sorte qu'on ait

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

ces intégrales deviendront

$$r^2\,d\theta = cdt, \quad \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} = -2\int \mathrm{R}dr + b; \quad (2)$$

d'où l'on déduira des valeurs de dt et $d\theta$, de la forme

$$dt = frdr, \quad d\theta = \mathrm{F}rdr,$$

qu'il ne s'agira plus que d'intégrer exactement ou par approximation.

En éliminant dt entre les équations (2) on a

$$c^2\left(d.\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} + 2\int \mathrm{R}dr = b, \quad (3)$$

pour l'équation différentielle de la trajectoire. Si l'on appelle v la vitesse du mobile au point M, on aura

$$v^2 = b - 2\int \mathrm{R}dr; \quad (4)$$

et en représentant par δ l'angle que sa direction fait avec MC, ses composantes seront

$$v\cos\delta = -\frac{dr}{dt}, \quad v\sin\delta = r\frac{d\theta}{dt},$$

suivant MC et suivant MH perpendiculaire à ce rayon vecteur.

Les deux constantes b et c, et celles qui seront introduites par l'intégration des valeurs de dt et $d\theta$, se détermineront d'après la position et la vitesse initiales du mobile. Pour cela, je représenterai par γ la distance initiale CD, par α l'angle CDA qui pourra être aigu ou obtus, et par h la hauteur due à la vitesse initiale, de sorte que cette vitesse soit $\sqrt{2gh}$, en appelant g la gravité. Si l'on suppose que l'intégrale $\int \mathrm{R}dr$, qui entre dans les formules précédentes, soit nulle quand $r = \gamma$, on aura d'abord

$$b = 2gh,$$

d'après la valeur de v^2. En vertu de l'équation $r^2\,d\theta = cdt$, la valeur de $v\sin\delta$ est la même chose que $\frac{c}{r}$; par conséquent, nous aurons

$$c = \gamma\sqrt{2gh}\,\sin\alpha.$$

Quant aux deux autres constantes arbitraires, on les déterminera de manière qu'on ait $\theta = 0$ et $r = \gamma$ quand $t = 0$, et le problème sera complètement résolu.

235. Lorsque la force R est proportionnelle à la distance r, les variables x et y sont séparées dans les équations (1), et l'on n'a pas besoin de recourir aux coordonnées polaires et aux équations (2).

Soient, en effet, k la valeur de R qui répond à $r = \gamma$, et

$$\mathrm{R} = \frac{kr}{\gamma},$$

sa valeur générale. Les équations (1) deviendront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{\gamma}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{\gamma};$$

et leurs intégrales complètes seront

$$x = \mathrm{A}\cos t\sqrt{\frac{k}{\gamma}} + \mathrm{A}'\sin t\sqrt{\frac{k}{\gamma}},$$

$$y = \mathrm{B}\cos t\sqrt{\frac{k}{\gamma}} + \mathrm{B}'\sin t\sqrt{\frac{k}{\gamma}};$$

A, A', B, B', étant les quatre constantes arbitraires. Pour les déterminer, on a, d'après les suppositions précédentes,

$$x = \gamma,\ y = 0,\ \frac{dx}{dt} = -\sqrt{2gh}\cos\alpha,\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{2gh}\sin\alpha,$$

quand $t = 0$; d'où il résulte

$$A = \gamma, \quad A'\sqrt{\frac{k}{\gamma}} = -\sqrt{2gh}\cos\alpha,$$

$$B = 0, \quad B'\sqrt{\frac{k}{\gamma}} = \sqrt{2gh}\sin\alpha,$$

et, par conséquent,

$$x = \gamma\left(\cos t\sqrt{\frac{k}{\gamma}} - \sqrt{\frac{2gh}{k\gamma}}\cos\alpha\sin t\sqrt{\frac{k}{\gamma}}\right),$$

$$y = \gamma\sqrt{\frac{2gh}{k\gamma}}\sin\alpha\sin t\sqrt{\frac{k}{\gamma}}.$$

Ces formules nous montrent que les révolutions du mobile autour du point C seront isochrones, et leur durée commune égale à $2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{k}}$. On en déduit

$$\gamma\sin\alpha\sin t\sqrt{\frac{k}{\gamma}} = y\sqrt{\frac{k\gamma}{2gh}},$$

$$\gamma\sin\alpha\cos t\sqrt{\frac{k}{\gamma}} = x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

d'où il résulte.

$$\frac{k\gamma}{2gh}y^2 + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 = \gamma^2\sin^2\alpha,$$

pour l'équation de la trajectoire, qui est, comme on voit, une ellipse dont le centre est au point C. Pour que cette ellipse soit un cercle, il faut qu'on ait $\alpha = 90°$ et $k\gamma = 2gh$. Dans ce cas le mouvement est uniforme; car, d'après les valeurs de x et y, on a

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\gamma k}\sin t\sqrt{\frac{k}{\gamma}}, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{\gamma k}\cos t\sqrt{\frac{k}{\gamma}};$$

ce qui donne $\sqrt{\gamma k}$ pour la vitesse v. La force centrale R et la force centrifuge $\frac{v^2}{\gamma}$ sont constantes et toutes deux égales à k.

Si la force R est répulsive au lieu d'être attractive, comme on l'a supposé, il faudra changer k en $-k$ dans les formules précédentes. La trajectoire sera alors une hyperbole, et le mouvement cessera d'être révolutif.

236. Prenons actuellement la force R en raison inverse du cube des distances, et représentons-la par

$$R = \frac{k\gamma^3}{r^3};$$

k étant toujours sa valeur au point D.

Nous aurons, dans cette hypothèse,

$$2\int R\,dr = k\gamma\left(1 - \frac{\gamma^2}{r^2}\right),$$

à cause que l'intégrale doit s'évanouir quand $r = \gamma$.

En ayant égard aux valeurs de b et c, et faisant

$$\frac{\gamma}{r} = z, \quad \frac{\gamma d.\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{dz}{d\theta},$$

l'équation (3) deviendra

$$\frac{dz^2}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{k\gamma}{2gh\sin^2\alpha}\right)z^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{k\gamma}{2gh\sin^2\alpha}.$$

Le coefficient de z^2 pourra être positif ou négatif; je fais donc

$$1 - \frac{k\gamma}{2gh\sin^2\alpha} = \pm n^2;$$

d'où il résulte

$$\frac{dz^2}{d\theta^2} \pm n^2 z^2 = \cot^2\alpha \pm n^2,$$

et, par conséquent,

$$n\,d\theta = \frac{n\,dz}{\sqrt{\cot^2\alpha \pm n^2 \mp n^2 z^2}}.$$

Dans le cas des signes supérieurs, on aura

$$n\theta = \text{arc}\left(\sin = \frac{nz}{\sqrt{\cot^2\alpha + n^2}}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{n}{\sqrt{\cot^2\alpha + n^2}}\right),$$

et, dans le cas des signes inférieurs,

$$n\theta = \log \frac{ns + \sqrt{\cot^2 \alpha - n^2 + n^2 s^2}}{n + \cot \alpha},$$

en observant qu'on a $r = \gamma$ et $s = 1$ quand $\theta = 0$.

De la première valeur de $n\theta$, on tire

$$ns = \cot \alpha \sin n\theta + n \cos n\theta.$$

Le *maximum* de s ou le *minimum* de r répond à la valeur de θ, tirée de l'équation $ds = 0$, ou

$$\text{tang } n\theta = \frac{1}{n} \cot \alpha,$$

pour laquelle on aura

$$s = \frac{\gamma}{r} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} \cot^2 \alpha}.$$

Au delà de cette valeur de θ, le mobile s'éloignera indéfiniment du point C, et son rayon vecteur r sera infini, pour la plus petite valeur de θ tiré de l'équation $s = 0$, ou

$$\text{tang } n\theta = -n \text{ tang } \alpha;$$

valeur que θ ne pourra atteindre qu'après un temps infini. En mettant à la place de r, la valeur de $\frac{\gamma}{s}$ dans la première équation (2), on en déduira sans difficulté, t en fonction de θ.

Dans le cas de la valeur logarithmique de $n\theta$, on aura, en passant aux nombres et désignant par e la base des logarithmes népériens,

$$ns + \sqrt{\cot^2 \alpha - n^2 + n^2 s^2} = (n + \cot \alpha)\, e^{n\theta};$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{\gamma}{r} = \frac{1}{2n}(n + \cot \alpha)\, e^{n\theta} + \frac{1}{2n}(n - \cot \alpha)\, e^{-n\theta};$$

ce qui montre que r diminuera indéfiniment, en sorte que le mobile décrira une spirale autour du point C, et atteindra ce point après un nombre infini de révolutions.

Si l'on fait $\alpha = 90°$, pour simplifier, on aura

$$r = \frac{2\gamma}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}},$$

pour l'équation de cette spirale. La première équation (2) devient

$$\sqrt{2gh}\, dt = \frac{4\gamma\, d\theta}{(e^{n\theta} + e^{-n\theta})^2};$$

et, en intégrant, on a

$$nt \sqrt{2gh} = \frac{\gamma(e^{n\theta} - e^{-n\theta})}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}.$$

237. Pour dernier exemple, supposons, comme dans la nature, la force R en raison inverse du carré des distances; de sorte qu'on ait

$$R = \frac{k\gamma^2}{r^2}, \quad \int R dr = k\gamma \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right);$$

k étant l'intensité de cette force au point D, pour lequel l'intégrale est supposée nulle.

Si l'on fait

$$\frac{1}{r} = \rho, \quad 2k\gamma - b = C,$$

l'équation (3) de la trajectoire deviendra

$$c^2 \frac{d\rho^2}{d\theta^2} = 2k\gamma^2 \rho - c^2 \rho^2 - C;$$

d'où l'on tire

$$d\theta = \frac{c\, d\rho}{\sqrt{\frac{k^2\gamma^4}{c^2} - C - \left(\frac{k\gamma^2}{c} - c\rho\right)^2}}.$$

En intégrant et désignant par ω la constante arbitraire, on aura donc

$$\theta = \omega + \text{arc}\left(\cos = \frac{k\gamma^2 - c^2\rho}{\sqrt{k^2\gamma^4 - c^2 C}}\right);$$

ce qui donne

$$k\gamma^2 r = c^2 - r\sqrt{k^2\gamma^4 - c^2 C} \cos(\theta - \omega), \quad (a)$$

en mettant $\omega + \pi$ à la place de ω, afin que ω soit la valeur de θ qui répond à la plus petite valeur de r, c'est-à-dire, au point de la trajectoire où le mobile est le plus rapproché de C.

Pour en déduire l'équation de cette courbe en coordonnées rectangulaires, je fais

$$x' = r \cos(\theta - \omega), \quad y' = r \sin(\theta - \omega);$$

x' et y' seront les coordonnées du mobile rapportées à des axes Cx' et Cy', tels que l'on ait $x'Cx = \omega$; on aura

$$x'^2 + y'^2 = r^2;$$

et en élevant au carré les deux membres de l'équation (a) de la trajectoire, elle deviendra

$$k^2\gamma^4 y'^2 + Cc^2 x'^2 = c^4 - 2c^2 x'\sqrt{k^2\gamma^4 - c^2 C}.$$

Or, sous cette forme, on voit qu'elle appartient à une section conique, qui sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que la constante C sera positive, nulle ou négative. On voit aussi que, dans tous les cas, le point C sera un foyer de cette courbe; car, d'après l'équation (a), le rayon vecteur r est une fonction linéaire de l'abcisse x'; ce qui n'a lieu, dans les trois sections coniques, que quand l'origine des coordonnées est un de leurs foyers.

A cause de $b = 2gh$, on aura

$$C = 2k\gamma - 2gh;$$

il s'ensuit donc que le signe de C, et, par conséquent, la nature de la section conique qui sera décrite par le mobile, ne dépendra que de sa distance et de sa vitesse initiales, et nullement de la direction de cette vitesse; en sorte que différens points matériels partant d'un même point D, avec des vitesses égales, décriront tous des sections coniques de même nature, quelles que soient leurs directions initiales. Si l'on a, par exemple, $k = g$, la courbe décrite sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que la hauteur due à la vitesse initiale sera moindre que CD, égale à cette distance, ou plus grande.

238. Dans le cas de l'ellipse, l'équation (a) montre que la plus grande et la plus petite valeur de r, répondent à $\theta = \omega + \pi$ et $\theta = \omega$; en les désignant par $a(1+e)$ et $a(1-e)$, de sorte que a soit le demi-grand axe et e l'excentricité, on aura donc

$$\left(k\gamma^2 - \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2 C}\right) a (1+e) = c^2,$$
$$\left(k\gamma^2 + \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2 C}\right) a (1-e) = c^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$Ca(1+e) = k\gamma^2 + \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2 C},$$
$$Ca(1-e) = k\gamma^2 - \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2 C}.$$

En ajoutant ces équations et les multipliant membre à membre, il vient

$$Ca = k\gamma^2, \quad Ca^2(1-e^2) = c^2.$$

Si l'on y met pour C et c leurs valeurs

$$C = 2(k\gamma - gh), \quad c = \gamma\sqrt{2gh}\,\sin\alpha,$$

on en déduit

$$\left.\begin{aligned} &2(k\gamma - gh)a = k\gamma^2, \\ &\gamma k\sqrt{1-e^2} = 2\sqrt{gh(k\gamma - gh)}\,\sin\alpha; \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

ce qui fait connaître le demi-grand axe et l'excentricité. On déterminera l'angle ω en faisant, à la fois, $\theta = 0$ et $r = \gamma$ dans l'équation (a). Ainsi, les dimensions de l'ellipse et la position de son grand axe seront complètement déterminées, d'après la position, la vitesse et la direction initiale du mobile. Quant à son mouvement sur cette courbe, il est connu par les formules (a), (b), (c), du n° 220.

Le carré de la vitesse à un instant quelconque est, d'après la formule (4) du n° 234,

$$v^2 = 2gh - 2k\gamma + \frac{2k\gamma^2}{r},$$

ou, ce qui est la même chose;

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad (c)$$

à cause de la valeur qu'on vient de trouver pour a, et en faisant $k\gamma^2 = \mu$, de sorte que μ soit ici comme dans la formule du n° 225, l'intensité de la force centrale à l'unité de distance.

239. Il ne sera pas inutile de considérer en particulier le mouvement parabolique que l'on prend, par approximation, pour celui des comètes pendant la durée de leur apparition.

A cause que l'on a, dans ce cas, $C = 0$ ou $k\gamma = gh$, les équations (b) donnent $a = \infty$ et $e = 1$, ce qui a effectivement lieu dans la parabole. La formule (c) se réduit à

$$v^2 = \frac{2\mu}{r};$$

en appelant u la vitesse dans un cercle du rayon r, on aurait, en vertu de la même formule,

$$u^2 = \frac{\mu}{r};$$

par conséquent, à distance égale du soleil, la vitesse d'une comète est à celle d'une planète qui décrirait un cercle, comme $\sqrt{2}$ est à 1.

En général, les équations (b) donnent

$$k\gamma a(1-e)(1+e) = 2gh\gamma\sin^2\alpha,$$

en élevant au carré les deux membres de la dernière, et les multipliant ensuite par ceux de la première. Si donc on appelle p la plus courte distance de la comète au soleil, de sorte qu'on ait

$$p = a(1-e),$$

et qu'on fasse $k\gamma = gh$ et $e = 1$, on aura

$$p = \gamma\sin^2\alpha;$$

ce qui détermine la distance périhélie, au moyen de la distance et de la direction initiales du mobile, que l'on suppose connues.

Je fais $C = 0$ et $k\gamma = gh$ dans l'équation (a), et j'y mets pour c^2 sa valeur de $2gh\gamma^2\sin^2\alpha$; elle devient

$$r = 2\gamma\sin^2\alpha - r\cos(\theta - \omega);$$

d'où il résulte

$$r = \frac{2p}{1 + \cos(\theta - \omega)}, \qquad (d)$$

pour l'équation de la trajectoire. Si l'on y fait $\theta = 0$ et $r = \gamma$, on en déduit

$$\gamma(1 + \cos\omega) = 2p, \quad \cos\tfrac{1}{2}\omega = \sin\alpha;$$

ce qui détermine l'angle ω que fait le rayon vecteur du périhélie avec celui qui aboutit au point de départ du mobile.

Je substitue les valeurs de c et de r, dans la pre-

mière équation (2) du n° 234, et je fais, pour abréger,

$$\frac{\gamma\sqrt{gh}\sin\alpha}{p^2} = n,$$

il en résulte

$$\frac{4d\theta}{[1+\cos(\theta-\omega)]^2} = n\sqrt{2}dt.$$

En observant que

$$1+\cos(\theta-\omega) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta-\omega),$$

et faisant

$$\theta-\omega = 2\psi, \qquad d\theta = 2d\psi,$$

on aura donc

$$\frac{d\psi}{\cos^4\psi} = \frac{ndt}{\sqrt{2}};$$

d'où l'on tire, en intégrant et désignant par ι la constante arbitraire,

$$(3+\tang^2\psi)\tang\psi + \iota = \frac{3nt}{\sqrt{2}}.$$

Pour déterminer cette constante, on a, en même temps,

$$t=0, \quad \theta=0, \quad \psi = -\tfrac{1}{2}\omega;$$

et à cause de $\cos 1/2\,\omega = \sin\alpha$, il en résulte

$$\iota = (3+\cot^2\alpha)\cot\alpha.$$

En appelant t' le temps écoulé depuis le départ du mobile jusqu'à son passage au périhélie, on aura à la fois

$$t=t', \qquad \theta=\omega, \qquad \psi=0,$$

et, par conséquent,

$$t' = \frac{\iota\sqrt{2}}{3n}.$$

Cela étant, désignons par le τ le temps compté à partir de l'instant de ce passage, de sorte qu'on ait $t = t' + \tau$, nous aurons

$$[3+\tang^2\tfrac{1}{2}(\theta-\omega)]\tang\tfrac{1}{2}(\theta-\omega) = \frac{3n\tau}{\sqrt{2}}; \quad (e)$$

en résolvant cette équation du troisième degré, on aura donc $\tang 1/2(\theta-\omega)$ en fonction de τ, et, par suite, r et θ à un instant quelconque : le temps τ sera positif après le passage au périhélie, et négatif avant ce passage.

A cause de

$$gh\gamma = k\gamma^2 = \mu, \qquad \sqrt{\gamma}\sin\alpha = \sqrt{p},$$

la valeur précédente de n est la même que

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{p\sqrt{p}};$$

elle est donc, d'après l'équation $a^3 n^2 = \mu$ du n° 228, la vitesse moyenne angulaire d'une planète dont le demi-grand axe serait égal à p; et si l'on appelle i celle de la terre et l son demi-grand axe, de sorte qu'on ait

$$i = \frac{\sqrt{\mu}}{l\sqrt{l}},$$

on en conclura

$$n = \frac{il\sqrt{l}}{p\sqrt{p}},$$

pour la valeur de n.

240. Cette analyse montre qu'en considérant la détermination du mouvement d'une comète, comme un problème de dynamique, et supposant, en conséquence, que sa position, sa direction et sa vitesse initiales soient connues, on peut déduire de ces données, la distance p du sommet de la parabole à son foyer, l'instant du passage du mobile par ce sommet ou la valeur de t', et la position de l'axe dépendante de l'angle ω; les équations (c), (d), (e), font ensuite connaître la vitesse de la comète et sa position sur sa trajectoire à un instant quelconque; et comme le plan de cette courbe est celui qui passe par le centre du soleil et par la direction de la vitesse initiale, il s'ensuit que le mouvement est complètement déterminé. Mais le problème astronomique est différent. Lorsqu'on découvre une comète, les observations ne donnent pas immédiatement le plan de son orbite, sa distance au soleil, sa vitesse et sa direction, à l'instant où elle apparaît; en sorte qu'en prenant sa position à cet instant, pour son point de départ, les constantes γ, h, α, ne sont pas données comme dans le problème précédent. La question consiste alors à déduire des observations, les valeurs de cinq quantités, savoir : l'inclinaison de l'orbite et la longitude de son nœud ascendant sur le plan de l'écliptique, ce qui déterminera le plan de l'orbite; la longitude du périhélie et sa distance au soleil, d'où il résultera la position de l'orbite dans son plan; et, enfin, le temps correspondant au passage de la comète par son périhélie. Lorsque ces cinq inconnues sont déterminées, les équations (c), (d), (e), représentent, comme précédemment, le mouvement de la comète dans son plan. Or, chaque observation de la comète donne son ascension droite et sa déclinaison; trois observations fournissent donc six données, et, par conséquent, six équations qui sont plus que suffisantes pour déterminer les cinq inconnues; et cela permet de remplacer deux de ces équations par leur combinaison la plus propre à diminuer l'influence des

erreurs des observations. Les valeurs approchées des cinq élémens qu'on vient d'énumérer étant ainsi conclues de trois observations faites à l'époque de l'apparition, les observations subséquentes servent ensuite à corriger ces premières valeurs et à vérifier les formules (d) et (e).

Nous ne pouvons qu'indiquer ici ce problème d'astronomie, dont il existe différentes solutions.

CHAPITRE VII.

DIGRESSION SUR L'ATTRACTION UNIVERSELLE.

241. *Les points matériels de tous les corps s'attirent mutuellement, en raison directe des masses, et inverse du carré des distances.*

Cette grande loi de la nature, que Newton a découverte, est une conséquence nécessaire de l'observation et du calcul. On peut voir, en effet, dans l'*Exposition du Système du Monde*, comment, en en partant de l'expérience, on est conduit, sans aucune hypothèse et par une suite de raisonnemens rigoureux, au principe de l'*attraction universelle*. Les développemens de ce principe sont l'objet spécial de la *Mécanique céleste*. Dans ce chapitre, nous nous bornerons à en exposer succinctement les principales conséquences.

242. La force qui retient les planètes dans leurs orbites, est la résultante de l'attraction exercée par tous les points matériels du soleil sur tous ceux de chaque planète. Vu la petitesse des dimensions du soleil et des planètes par rapport aux distances qui les séparent, on conçoit que ces attractions peuvent être regardées, avec une approximation suffisante, comme des forces parallèles et égales dans toute l'étendue d'une même planète; leur résultante est alors égale à leur somme, et la distance restant la même, la force motrice de chaque planète est proportionnelle au produit de sa masse et de celle du soleil; ce qui devient encore plus exact, à cause de la forme à peu près sphérique de ces deux corps, lorsqu'on prend pour leur distance celle de leurs centres de gravité (n° 99).

Supposons donc, pour exprimer numériquement l'intensité de cette force, que l'on prenne une certaine distance, par exemple, celle du soleil à la terre, pour unité linéaire; choisissons une masse et un intervalle de temps déterminés pour unités de ces deux sortes de quantités; et prenons enfin pour unité de force, comme dans le n° 118, la force accélératrice constante qui produit dans l'unité de temps une vitesse égale à l'unité de longueur. Concevons maintenant deux corps dont les masses soient égales à celle qu'on a prise pour unité, et qui soient placés à une distance l'un de l'autre égale à l'unité linéaire; soit f la force attractive de l'un des deux corps sur l'autre, c'est-à-dire, le rapport numérique de son intensité à celle de la force choisie pour unité; soient aussi M et m la masse du soleil et celle de la planète : la force motrice de la planète sera fMm, à l'unité de distance, et deviendra $\frac{fMm}{r^2}$, à la distance quelconque r.

La grandeur de la quantité que nous désignons par f, dépend du pouvoir attractif dont la matière est douée; ce pouvoir est le même, à égalité de masse et de distance, pour tous les corps de la nature; rien jusqu'à présent, ne fait soupçonner qu'il augmente ou diminue avec le temps; et nous avons lieu de penser qu'il a été et qu'il restera constamment le même.

243. La force motrice de la masse M, due à l'attraction de m, est aussi représentée par $\frac{fmM}{r^2}$, de manière que la réaction de chaque planète sur le soleil est égale et contraire à l'action de cet astre sur la planète; mais la force motrice $\frac{fMm}{r^2}$, agissant sur les deux masses M et m, leur imprimera à chaque instant des vitesses infiniment petites qui sont réciproquement proportionnelles à ces masses, ou, autrement dit, leurs forces accélératrices sont $\frac{fm}{r^2}$ et $\frac{fM}{r^2}$. Il en résulte que si ces deux

corps sont abandonnés, sans aucune vitesse initiale, à leur attraction mutuelle, ils s'avanceront l'un vers l'autre en parcourant, dans le même temps, des espaces qui seront en raison inverse de leurs masses; ils se joindront au centre de gravité de M et m, qui partage leur distance primitive en deux parties réciproquement proportionnelles aux masses.

En général, si la planète est projetée dans l'espace suivant une direction quelconque, et qu'on propose de déterminer son mouvement apparent autour du centre du soleil, regardé comme un point fixe, il faudra concevoir que l'on imprime à chaque instant à cet astre, une vitesse infiniment petite, égale et contraire à celle qu'il reçoit de l'attraction de la planète; mais, afin de ne point altérer le mouvement relatif de ces deux corps, il faudra, en même temps, imprimer cette vitesse à la planète; ce qui revient à lui appliquer une force accélératrice égale et contraire à celle du soleil; donc, dans le mouvement dont il est question, la force accélératrice de la planète m sera constamment dirigée vers le soleil M, et égale à la somme des deux forces $\frac{fM}{r^2}$ et $\frac{fm}{r^2}$; si donc on veut l'exprimer par $\frac{\mu}{r^2}$ comme dans le n° 225, il faudra prendre

$$\mu = f(M + m).$$

Ainsi, l'on devra substituer cette valeur dans les différentes équations du mouvement elliptique qu'on a donné précédemment; par conséquent, l'équation

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu,$$

du n° cité, donnera

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M + m)}; \qquad (1)$$

T étant toujours le temps de la révolution de la planète, et a le demi-grand axe de son orbite.

Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ qui dépend, comme on voit, de la quantité m, différera donc, pour deux planètes dont les masses sont inégales; en sorte qu'on ne peut pas supposer qu'il soit rigoureusement le même pour toutes les planètes. Cependant les observations qui conduisent à la troisième loi de Képler, prouvent que ce rapport est sinon exactement, du moins à très peu près constant; il en faut donc conclure que les masses des planètes sont très petites par rapport à celle du soleil; ce qui fait que le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ du carré du temps au cube de la distance moyenne varie très peu en passant d'une planète à une autre. La masse de Jupiter, le plus considérable de toutes, est effectivement moindre qu'un millième de la masse du soleil.

244. C'est pour cette raison que l'attraction mutuelle des planètes ne produit que des *perturbations*, ou très lentes, ou très peu considérables, dans le mouvement elliptique dû à l'attraction du soleil. En effet, les masses de deux planètes étant m et $m_{,}$, la force motrice dirigée de l'une vers l'autre, est exprimée par $\frac{fmm_{,}}{\rho^2}$, à la distance ρ; la force accélératrice de m provenant de l'attraction de $m_{,}$, sera donc $\frac{fm_{,}}{\rho^2}$; et comme la distance ρ ne devient jamais très petite par rapport à la distance r de m au soleil, il s'ensuit que si $m_{,}$ est une très petite fraction de M, le mouvement de m produit par l'attraction solaire devra être fort peu modifié par l'attraction de $m_{,}$.

Les perturbations planétaires peuvent donc être déterminées par la méthode de la variation des constantes arbitraires, que nous avons expliquée précédemment (n° 229). Elles sont de deux espèces. Les unes consistent en des *inégalités périodiques* généralement très petites, dont les périodes comprennent des multiples peu considérables, en général, des révolutions de la planète troublée et de la planète perturbatrice. Cependant lorsque leurs moyens mouvemens approchent d'être commensurables, ces périodes peuvent devenir beaucoup plus longues, et les inégalités beaucoup plus sensibles. Ainsi, les moyens mouvemens de Saturne et de Jupiter étant à peu près entre eux comme 2 et 5, Laplace a trouvé qu'il résulte de l'attraction mutuelle de ces deux planètes, une inégalité dont la période est de 929 ans, et dont le *maximum* est d'environ 48′ dans la longitude de Saturne, et d'à peu près 20′ dans celle de Jupiter.

Les autres perturbations des planètes sont : 1° les mouvemens progressifs du périhélie et des nœuds de leurs orbites, dans lesquels ces points parcourent la circonférence entière, en des temps extrêmement longs qui peuvent surpasser un millier de siècles; 2° les variations séculaires qui affectent les excentricités et les inclinaisons de ces orbites, ainsi que les longitudes moyennes des planètes, dont les périodes sont semblables aux précédentes, et dont les amplitudes, peu considérables, ne sont pas encore bien connues.

Mais tandis que ces divers élémens du mouvement elliptique varient simultanément en vertu de l'attraction planétaire, il est très remarquable que cette force n'altère aucunement les grands axes des orbites et les moyens mouvemens des planètes qui seront les mêmes à toutes les époques, ainsi que les temps des révolutions, liés aux grands axes par l'équation (1). Toutefois, les variations séculaires des longitudes moyennes en produisent de semblables dans les intervalles entre

deux retours consécutifs à un même point fixe; elles sont insensibles dans le mouvement des planètes, mais non pas dans celui des satellites, et particulièrement dans le mouvement de la lune, qui s'accélère, pour cette raison, de siècle en siècle.

La force accélératrice qui provient de l'attraction d'une planète $m_{,}$, sur une autre planète m, étant indépendante de la masse m et proportionnelle à la masse $m_{,}$, on conçoit que les perturbations dues à cette force et observées dans le mouvement de m autour du soleil, peuvent servir à déterminer le rapport de la masse $m_{,}$ à celle de cet astre. Ainsi, par exemple, d'après la grande inégalité de Saturne, produite par l'action de Jupiter, on a trouvé la masse de cette dernière planète égale à 1/1070 de celle du soleil. Nous indiquerons tout à l'heure un autre moyen de calculer la masse des planètes, quand elles sont accompagnées d'un ou plusieurs satellites.

Les comètes, à cause de la petitesse de leurs masses, ne produisent aucun effet appréciable sur les planètes; mais leurs mouvemens sont troublés par les attractions planétaires, et l'on détermine aussi par la méthode du n° 229, leurs perturbations qui influent considérablement sur les époques de la réapparition de chaque comète, c'est-à-dire, sur l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs à son périhélie.

245. Soient m' et m les masses d'un satellite et de sa planète, et r' la distance de leurs centres; la force motrice du satellite, dirigée vers le centre de la planète, sera aussi exprimée par $\frac{fm\,m'}{r'^2}$ à cette distance r'; le coefficient f étant le même que précédemment. Dans son mouvement apparent autour de la planète, la force accélératrice du satellite aura pour expression $\frac{\mu'}{r'^2}$, en faisant

$$\mu' = f\,(m + m').$$

Je représenterai par a' le demi-grand axe de l'orbite du satellite, et par T' le temps de sa révolution; en appliquant l'équation (1) à son mouvement, on aura

$$\frac{T^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{f(m + m')};$$

et si l'on divise ces deux équations membre à membre, afin d'éliminer le coefficient f, il en résultera

$$\frac{T^2}{T'^2}\,\frac{a'^3}{a^3} = \frac{m + m'}{M + m}$$

Or, si l'on excepte la lune, les masses des satellites sont très petites par rapport à celles de leurs planètes respectives : la masse d'un satellite de Jupiter, par exemple, n'est pas un dix-millième de celle de cette planète; on peut donc mettre m à la place de $m + m'$ dans cette dernière équation, et comme a, a', T, T', sont des données de l'observation, elle pourra servir à déterminer le rapport de m à M. C'est de cette manière que Newton a trouvé pour la masse de Jupiter, 1/1067 de celle du soleil; ce qui diffère peu de la fraction 1/1070 qu'on a obtenue depuis par un autre moyen.

246. L'attraction mutuelle des satellites d'une même planète, quand elle en a plusieurs, et l'inégalité d'action du soleil sur chaque satellite et sur sa planète, produisent dans les mouvemens elliptiques des satellites, des perturbations analogues à celles que nous venons d'indiquer pour les planètes. Les perturbations provenant de l'action réciproque des satellites, font connaître les rapports de leurs masses à celle de la planète, dont l'attraction produit leur mouvement elliptique. Mais ce moyen manquant pour la lune, on y supplée par d'autres considérations, parmi lesquelles je vais indiquer l'action de ce satellite sur les eaux de la mer.

Soient C (fig. 56) le centre de la terre, A celui de la lune, M un point quelconque du sphéroïde terrestre; faisons

$$CA = a, \quad AM = \rho, \quad CM = r,$$

et appelons λ l'angle ACM; nous aurons

$$\rho^2 = a^2 - 2ar\cos\lambda + r^2;$$

et si nous abaissons du point M la perpendiculaire MB sur la droite AC, nous aurons aussi

$$MB = r\sin\lambda, \quad AB = a - r\cos\lambda.$$

Au point M, la force accélératrice provenant de l'attraction de la lune et dirigée suivant MA, aura pour valeur $\frac{fm'}{\rho^2}$, en désignant par m' la masse du satellite, et par f le même coefficient que précédemment. Les composantes de cette force suivant la perpendiculaire MB et la parallèle MD à la droite AC, seront donc

$$\frac{fm'r\sin\lambda}{\rho^3}, \quad \frac{fm'a}{\rho^3} - \frac{fm'r\cos\lambda}{\rho^3}.$$

Je substitue la valeur de ρ dans ces quantités; et la plus grande valeur de r, c'est-à-dire, le rayon du globe terrestre, étant, à peu près, un soixantième de a, je néglige le carré de r; en faisant alors

$$\frac{fm'r\sin\lambda}{a^3} = \varphi, \quad \frac{2fm'r\cos\lambda}{a^3} = \varphi',$$

les deux composantes de l'attraction lunaire seront $\frac{fm'}{a^2}$ et $\varphi + \varphi'$. Tous les points de la terre sont donc

sollicités parallèlement à CA par une force constante et égale à $\frac{fm'}{a^2}$, et, en outre, par des forces φ et φ' dont la résultante varie en grandeur et en direction d'un point M à un autre, et est nulle au centre C. Or, il est évident qu'en vertu de la force $\frac{fm'}{a^2}$, la masse entière de la terre se portera vers la lune, d'un mouvement commun à toutes ses parties, sans que les points de la partie fluide changent de position relative; c'est donc aux forces φ et φ' appliquées aux différens points de la mer, que seront dus le *flux* et le *reflux* produits par l'action de la lune.

La masse du soleil étant M, et a sa distance à la terre, si l'on désigne en outre, par μ, ψ, ψ', ce que deviennent λ, φ, φ', relativement à cet astre, on aura de même

$$\psi = \frac{fMr \sin \mu}{a^3}, \qquad \psi' = \frac{2fMr \cos \mu}{a^3},$$

pour les composantes de la force provenant de l'action du soleil, qui concourent au phénomène des marées. En les comparant aux forces φ et φ', on voit que pour un point de la mer, dont le rayon vecteur r fait le même angle λ ou μ avec le rayon vecteur de la lune ou du soleil, les actions de ces deux astres, qui produisent les oscillations de la mer, sont entre elles comme leurs masses, divisées par le cube de leurs distances au centre de la terre. Or, on conçoit que, toutes choses d'ailleurs égales, les grandeurs de ces oscillations doivent être entre elles comme les forces correspondantes; si donc on désigne par ω le rapport de la marée lunaire à la marée solaire, dans un même lieu de la terre et pour des positions semblables des deux astres, on aura

$$\frac{m'}{\alpha^3} = \frac{\omega M}{a^3};$$

équation dans laquelle on prendra pour α et a les distances moyennes de la lune ou du soleil à la terre, et d'où l'on tire,

$$\frac{m'}{m} = \omega \frac{\alpha^3}{a^3} \frac{M}{m},$$

en appelant m la masse de la terre.

D'après les lois différentes que suivent les marées lunaire et solaire, on peut effectivement, distinguer les unes des autres, et déterminer leur rapport en chaque lieu de la terre. La moyenne d'un grand nombre d'observations, faites dans le le port de Brest, donne *

$$\omega = 2,3533,$$

pour la valeur de ce rapport. La distance α est, à très peu près, 400 fois la distance a, et la masse M, comme on le verra tout à l'heure, aussi à très peu près, 355000 fois la masse m. Au moyen de ces valeurs, on trouve, d'après la formule précédente, la masse de la lune égale à 1/75 de celle de la terre.

Indépendamment des oscillations de la partie fluide de la terre, les actions du soleil et de la lune produisent encore, dans le mouvement du sphéroïde terrestre autour de son centre de gravité, à raison de sa non-sphéricité, des perturbations que nous ferons connaître lorsqu'il sera question du mouvement de rotation d'un corps solide.

247. On peut remarquer que la composante des forces φ et φ', suivant le prolongement ME du rayon CM, est $\varphi' \cos\lambda - \varphi \sin \lambda$; en sorte que sa valeur est

$$(2 \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \frac{fmr}{75a^3}.$$

C'est la diminution de la pesanteur au point M, produite par l'action de la lune. Or, en supposant que M appartienne à la surface de la terre, et désignant par g la gravité en ce point, on a aussi $fm = gr^2$, à très peu près; d'ailleurs, le *maximum* de $2 \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda$ répond à $\lambda = 0$, et est égal à 2. La plus grande valeur de cette diminution de pesanteur sera donc $\frac{2gr^3}{75a^3}$; quantité à peu près égale à un huit-millionième de g, en prenant 60 pour le rapport $\frac{a}{r}$. Pour que l'influence de l'action lunaire sur la longueur du pendule à secondes fût appréciable, il faudrait donc pouvoir porter l'exactitude jusqu'à la seconde décimale au delà des cent-millièmes, où l'on s'arrête ordinairement dans la mesure de sa longueur. Cette influence produirait, dans la mesure du temps, une inégalité réglée sur le mouvement de la lune, dont le *maximum* ne s'élèverait qu'à un demi-centième de seconde en un jour.

248. Abstraction faite de la force centrifuge due à la rotation de la terre, la pesanteur que nous observons à sa surface est la résultante des attractions exercées par tous les points du sphéroïde sur chaque point matériel, laquelle résultante ne dépend que de la position et de la masse de ce point, et nullement de la nature du corps auquel il appartient; c'est, en effet, ce que l'expérience a pleinement confirmé. L'intensité de cette force doit diminuer à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la terre; et c'est aussi ce qui résulte des observations du pendule, faites à différentes hauteurs. De plus, la pesanteur terrestre, diminuée dans le rapport du carré du rayon de la terre au carré du rayon de l'orbite lunaire, doit être la force accélératrice qui retient la lune dans son orbite. Or, la distance du satellite étant, à peu

* *Mécanique céleste*, tome V, page 206.

près, 60 fois le rayon de la terre, il s'ensuit que la lune, si elle n'avait aucune vitesse, devrait tomber vers la terre, de la même quantité en une minute qu'un corps quelconque, dans le vide, en une seconde à la surface de la terre. Cette quantité n'est autre chose que le sinus verse de l'arc que la lune décrit sur son orbite en une minute, ou, à très peu près, le carré de cet arc divisé par le diamètre de cette courbe; et comme la circonférence de l'orbite est 60 fois celle de la terre, on en conclut que la quantité dont il s'agit est égale à 40 millions de mètres, multipliés par $\frac{60\pi}{n^2}$, en désignant par n le nombre de minutes que contient une révolution lunaire. Il faut donc, d'après la valeur de la gravité g qu'on a trouvée par l'expérience du pendule, que ce produit soit à très peu près égal à $4^m,90$; on trouve, effectivement, $4^m,88$ pour sa valeur, en observant que $n=39343$. La différence serait encore moindre, en ayant égard à diverses circonstances dont nous avons fait abstraction pour simplifier la démonstration.

La pesanteur terrestre est donc un cas particulier de l'attraction universelle; et, pour cette raison, l'on appelle aussi cette force générale la *pesanteur* ou la *gravitation universelle*.

249. A cause que la terre s'écarte peu de la forme sphérique, l'attraction qu'elle exerce sur un point de sa surface est à peu près $\frac{fm}{r^2}$, comme celle d'une sphère, en désignant par m sa masse, par r son rayon, et par f le coefficient de l'attraction universelle. Cette valeur approchée doit être tout-à-fait exacte pour les points appartenant à un certain *parallèle*; et, d'après la théorie de l'attraction des sphéroïdes peu différens d'une sphère, ce parallèle est celui dont le carré du sinus de la latitude est 1/3. Sur ce parallèle, la pesanteur a pour mesure $9^m,79386$ (n° 193); mais, pour l'égaler à l'attraction terrestre, il faut préalablement l'augmenter de la composante verticale de la force centrifuge, laquelle composante est égale, sous ce parallèle à la fraction $\frac{2}{3.289}$ de la gravité (n° 178). Donc, en faisant

$$g = (9^m,79386)\left(1 + \frac{2}{3.289}\right) = 9^m,81645,$$

on pourra regarder cette valeur de la gravité, ainsi modifiée, comme égale à l'attraction de la terre, et poser l'équation

$$g = \frac{fm}{r^2}.$$

En la multipliant membre à membre par l'équation (1) du n° 243, appliquée au mouvement de la terre autour du soleil, on en conclut

$$\frac{m}{M+m} = \frac{gT^2 r^2}{4\pi^2 a^3},$$

formule qui va servir à déterminer le rapport de la masse de la terre à celle du soleil.

Si l'on conçoit un triangle rectangle qui ait pour base le rayon de la terre, et pour hauteur sa distance au soleil, le petit angle opposé à la base est la *parallaxe* du soleil, que l'on détermine directement par des observations astronomiques, et que l'on peut aussi déduire d'une certaine inégalité produite dans le mouvement de la lune par l'action du soleil, que l'on appelle l'inégalité *parallactique*. La grandeur de la parallaxe varie avec le rayon de la terre et son éloignement du soleil auxquels elle répond; pour la distance moyenne a et pour le rayon r qui aboutit au parallèle dont le sinus de la latitude est $\sqrt{1/3}$, sa valeur est $8'',60$. On a, par conséquent,

$$\frac{r}{a} = \text{tang } 8'',60, \qquad a = (23984)\, r.$$

Sous ce même parallèle, et en prenant 1/290 pour l'aplatissement de la terre, on a

$$r = 6364551^m,$$

pour son rayon. Le temps de sa révolution autour du soleil, exprimé en secondes, est

$$T = (86400)\,(365,256374).$$

Au moyen de ces valeurs et de celle de g, qui suppose aussi qu'on a pris la seconde pour unité de temps, on trouve

$$m = \frac{M}{354592}.$$

250. Le soleil est une sphère d'un rayon égal à 110 fois celui de la terre; on connaît donc le rapport des volumes de ces deux corps et celui de leurs masses, d'où l'on conclut immédiatement le rapport de leurs densités moyennes : celle du soleil est, à peu près, le quart de la densité de la terre.

A la surface de cet astre, l'attraction est exprimée par

$$\frac{fM}{R^2},$$

en appelant R son rayon. A cause de

$$R = 110r, \qquad g = \frac{fm}{r^2},$$

cette quantité est la même chose que

$$\frac{gM}{(110)^2\, m},$$

et elle a pour valeur (29,5) g, d'après celle de $\frac{M}{m}$. La durée de la rotation du soleil autour de son axe étant de 25j,5, la force centrifuge à son équateur n'est que le sixième de cette force à l'équateur de la terre. En négligeant donc la diminution qu'elle produit dans la pesanteur à la surface du soleil, on voit que le poids d'un corps à cette surface est 29 fois et demie le poids du même corps à la surface de la terre, et que les corps y parcourent à peu près 145 mètres dans la première seconde de leur chute.

En appliquant successivement l'équation (1) du n° 243 à la terre et à une autre planète, et supposant que les quantités m, a, T, relatives à la terre, deviennent m_1, a_1, T_1, par rapport à la planète, on en conclura

$$\frac{a_1^3}{a^3} = \frac{M + m_1}{M + m} \frac{T_1^2}{T^2},$$

par l'élimination de f. Connaissant la valeur de a par l'observation de la parallaxe solaire, ou autrement, ainsi que la masse m de la terre et la durée T de l'année sydérale, cette équation servira à déterminer la valeur du demi-grand axe a, d'une planète quelconque, lorsque sa masse m_1 et le temps T_1 de sa révolution seront donnés. Le procédé du n° 245 pour déterminer cette masse, suppose seulement qu'on connaisse une valeur approchée du demi-grand axe.

251. L'attraction exercée à la surface de la terre par une masse considérable, telle qu'une haute montagne, fera dévier les corps pesans de la direction verticale, et le prolongement du *fil à plomb* n'ira plus rencontrer le ciel au *sénith*. Il s'en écartera en sens contraire des deux côtés opposés de la montagne; en sorte que si tout est semblable de part et d'autre, pour la forme de la montagne et pour l'éloignement du fil à plomb, la distance angulaire des deux étoiles par lesquelles son prolongement ira passer, sera double de sa déviation. Cet effet a été observé, par les astronomes, au Pérou et en Écosse; mais, à cause que les masses des plus hautes montagnes sont encore très petites, eu égard à la masse de la terre, les déviations dont il s'agit sont aussi très peu considérables, et ne s'élèvent qu'à de petits nombres de secondes. Voici un exemple du calcul de la déviation du fil à plomb, due à l'attraction d'une masse donnée.

Soit A (fig. 57) le centre d'une sphère homogène, suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible et inflexible, dont l'autre bout est attaché au point fixe C; soit aussi O le centre fixe d'une autre sphère homogène qui agit sur la première. Le fil CA s'écartera de la verticale CB sans sortir du plan passant par cette droite et la ligne CO; et, dans sa position d'équilibre, il faudra que la résultante du poids de la première sphère et de l'attraction de la seconde vienne passer par le point fixe C. Or, ces deux forces seront appliquées au point A, l'une suivant la verticale AD, l'autre suivant la droite AO; et elles tendront à faire tourner le fil CA en sens opposés autour du point C. Pour que leur résultante passe par le point O, il faudra donc que leurs momens, par rapport à ce même point, soient égaux (n° 46); par conséquent, si l'on appelle P et Q le poids de la première sphère et l'attraction totale de la seconde, et que l'on désigne par p et q les perpendiculaires CE et CF, abaissées du point C sur les prolongemens de DA et de OA, on aura

$$Pp = Qq,$$

pour l'équation d'équilibre qui devra servir à déterminer la déviation inconnue BCA.

J'appelle x cet angle, γ l'angle donné BCO, a et c les distances aussi données CA et CO, et y la distance inconnue AO; nous aurons

$$y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\gamma - x),$$

et, en outre,

$$\sin COA = \frac{a \sin(\gamma - x)}{y}, \quad q = \frac{ac \sin(\gamma - x)}{y}, \quad p = a \sin x.$$

Appelons aussi m la masse de la terre m_1 celle de la sphère mobile, m' celle de la sphère attirante. En désignant toujours par f le coefficient de l'attraction universelle, et représentant par r le rayon de la terre, les forces motrices P et Q auront pour valeurs

$$P = \frac{fmm_1}{r^2}, \qquad Q = \frac{fm'm_1}{y^2};$$

et si ρ est la densité moyenne de la terre, ρ' celle de la sphère attirante, et r' son rayon, on aura aussi

$$m' = \frac{m\rho' r'^3}{\rho r^3}.$$

Au moyen de ces différentes valeurs, l'équation $Pp = Qq$ se changera en celle-ci :

$$\rho r y^3 \sin x = \rho' r'^3 c \sin(\gamma - x),$$

où il ne restera plus qu'à mettre la valeur de y pour en déduire ensuite celle de x.

Je supposerai, ce qui a lieu généralement, la longueur CA du fil à plomb très petite par rapport à la distance CO. En négligeant a par rapport à c dans les valeurs de y, on aura simplement $y = c$; d'où il résultera

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} = \frac{\rho' r'^3}{\rho r c^2}.$$

La densité ρ' et le rayon r' de la sphère attirante restant les mêmes, la valeur de x que l'on tirera de cette équation sera d'autant plus grande que la distance c sera plus petite, et que l'angle γ approchera davantage d'être un angle droit; et comme c ne peut pas être moindre que le rayon r', il s'ensuit qu'on aura le *maximum* de déviation du fil à plomb que puisse produire l'attraction d'une sphère donnée, en prenant $c = r'$ et $\gamma = 90°$; ce qui réduit l'équation précédente à

$$\tang x = \frac{\rho' r'}{\rho r}.$$

Si l'on suppose, par exemple, $\rho' = \rho$, et qu'on demande quel doit être le rayon r' pour que la déviation x s'élève à une seconde, on aura $r' = r \tang 1''$; et, à cause que la circonférence $2\pi r$ de la terre est de 40 millions de mètres, il en résultera $r' = 30^m,856$.... Ainsi, une sphère homogène d'environ 31 mètres de rayon, et d'une densité égale à la densité moyenne de la terre, ne produit qu'une déviation d'une seconde au plus dans la direction du fil à plomb; et pour qu'elle la produise, il faut qu'elle touche l'extrémité inférieure de ce fil, et que son centre soit situé dans le plan horizontal passant par cette extrémité.

252. Cette moyenne densité de la terre, conclue de la déviation du fil à plomb que produit l'attraction des montagnes, a été évaluée à quatre ou cinq fois la densité de l'eau. Cavendish l'a trouvée égale à cinq fois et demie cette densité, en la déduisant de l'attraction exercée par deux globes de plomb de huit pouces anglais de diamètre, qu'il a su rendre sensible par le moyen de la *balance de torsion*. Sans entrer ici dans tous les détails de cette belle expérience, des diverses précautions qu'elle exige, et des calculs qu'il faut faire pour en déduire un résultat exact, je vais seulement indiquer les points principaux de ces calculs (*).

La balance de torsion est l'instrument le plus exact que nous ayons pour servir à la mesure des forces très petites. Coulomb, à qui l'invention en est due, l'a surtout employée à mesurer les forces d'attraction et de répulsion des corps électrisés; et, pour cette raison, elle est aussi connue, en Physique, sous le nom de la *balance électrique*. Elle consiste principalement en un fil métallique très délié, vertical, attaché à un point fixe, et à l'extrémité duquel est suspendu un levier horizontal. Supposons ce levier formé d'une tige très mince ACA′ (fig. 58), partagée en deux parties égales à son point d'attache C, et terminée par deux sphères d'un petit diamètre, dont les centres sont A et A′. Du point C comme centre, et d'un rayon égal à CA, décrivons le cercle horizontal BAB′A′, dont nous diviserons la circonférence en un grand nombre de parties égales. Lorsque le levier tournera autour du point C, ses extrémités A et A′ parcourront cette circonférence, et les points de division auxquels ils répondront à chaque instant feront connaître les arcs qu'ils auront décrits. Tant que le fil de suspension qui aboutit au point C n'est pas tordu, le levier reste en repos dans une certaine position. Je suppose qu'il réponde alors à la ligne BCB′; si l'on vient à l'écarter de cette ligne, pour le mettre dans une autre position quelconque ACA′, le fil de suspension sera tordu sur lui-même, et cette torsion tendra à ramener ce levier vers la ligne BCB′. Pour le retenir dans la direction ACA′, supposons que l'on applique à ses deux extrémités des forces égales et contraires, dirigées dans le plan horizontal, et perpendiculaires à sa longueur, la valeur commune de ces deux forces sera la mesure de la force de torsion qui leur fait équilibre. Or, les expériences de Coulomb ont prouvé que le fil de suspension restant le même, cette force de torsion est proportionnelle à l'angle BCA; en prenant donc l'angle droit pour unité, appelant h la force de torsion qui répond à cet angle, et désignant par θ l'angle BCA, cette force, dans la position ACA′ du levier, sera égale à $h\theta$: ainsi, dans cette position, la torsion du fil de suspension équivaudra à deux forces égales à $h\theta$, horizontales, perpendiculaires à ACA′, appliquées aux points A et A′, et tendantes à ramener le levier à la ligne de repos BCB′.

Cela posé, approchons du levier deux sphères homogènes d'une même matière, d'un même diamètre, et symétriquement placées de part et d'autre de la ligne BCB′. Soient O et O′ leurs centres situés dans le plan horizontal qui contient le levier à égale distance de C, et sur une droite OCO′ menée par ce point. L'attraction de ces deux corps va écarter le levier de la ligne BCB′; et, à cause que tout est semblable autour du centre C, la droite ACA′ tournera autour de ce point, qui restera immobile. A mesure que le levier s'écartera de la ligne de repos, la force de torsion augmentera. Il existe une position dans laquelle cette force fera équilibre à l'attraction des deux sphères; mais comme le levier atteint cette position avec une vitesse acquise, il la dépasse, et il oscille, de part et d'autre, à la manière d'un pendule horizontal. L'observation fait connaître la durée d'une oscillation entière. En comparant la longueur de ce pendule à celle d'un pendule ordinaire qui oscillerait dans le même temps, on en conclut le rapport de la force d'attraction de chaque sphère à la pesanteur; et par suite, on a le rapport de la masse de cette sphère à celle de la terre. L'équation qui sert à déterminer ce rapport est facile à former, ainsi qu'on va le voir.

253. Les deux sphères mobiles dont les centres sont en A et A′, étant sollicitées par les mêmes forces, et ayant le même mouvement autour du point fixe C, il suffira de considérer le mouvement du centre de l'une d'elles, du point A, par exem-

(*) On trouve dans le 17e cahier du *Journal de l'École Polytechnique* une traduction exacte du mémoire de Cavendish.

ple; soient donc comme dans le problème précédent,

$$CA = a, \qquad CO = c, \qquad BCO = \gamma;$$

appelons m' la masse de la sphère attirante dont le centre est en O, et f le coefficient de l'attraction universelle; au bout d'un temps quelconque t, désignons par θ l'angle ACB, et par z la distance AO, nous aurons

$$z^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\gamma - \theta);$$

et la force accélératrice provenant de l'attraction dirigée suivant AO sera $\frac{fm'}{z^2}$. Je la décompose en deux autres forces, l'une dirigée suivant le prolongement de CA, et l'autre perpendiculaire à CA. Cette dernière composante sera égale à $\frac{fm'}{z^2}$ sin CAO, c'est-à-dire, à $\frac{fm'c}{z^3} \sin(\gamma - \theta)$, en y mettant pour sin CAO sa valeur déduite du triangle COA. Si l'on retranche de cette composante tangente à la trajectoire, la force de torsion $h\theta$ qui lui est directement opposée, et si l'on observe que l'arc BA décrit par le mobile est égal à $a\theta$, on aura

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{fm'c}{z^3} \sin(\gamma - \theta) - h\theta,$$

pour l'équation du mouvement (n° 152).

L'attraction de la masse m' étant une très petite force, l'angle θ dont elle écarte le levier ACA' de sa ligne de repos sera très petit. En appelant b la distance BO, on la valeur de z qui répond à $\theta = 0$, de sorte qu'on ait

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\gamma,$$

et développant suivant les puissances de θ, il vient

$$\frac{\sin(\gamma - \theta)}{z^3} = \frac{\sin\gamma}{b^3} - [(a^2 + c^2)\cos\gamma - 2ac - ac\sin^2\gamma]\frac{\theta}{b^5} + \text{etc.}$$

i donc, on fait, pour abréger,

$$[(a^2 + c^2)\cos\gamma - 2ac - ac\sin^2\gamma]\frac{fm'}{b^5}c + h = g',$$

$$\frac{fm'c\sin\gamma}{b^3} = \mathcal{C}g',$$

et qu'on néglige les puissances de θ supérieures à la première, l'équation du mouvement deviendra

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} = g'\mathcal{C} - g'\theta;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\theta = \mathcal{C} + k\cos\left(t\sqrt{\frac{g'}{a}} + k'\right);$$

k et k' étant les deux constantes arbitraires.

D'après cette valeur de θ, le plus petit et le plus grand écart du levier ACA', à partir de la ligne BCB', seront $\mathcal{C} + k$ et $\mathcal{C} - k$; et, si l'on tire la ligne DCD', telle que l'angle BCD soit égal à $\mathcal{C}$, le levier fera, de part et d'autre de cette droite, des oscillations égales et isochrones dont l'amplitude sera la constante k: on déterminera l'angle $\mathcal{C}$ par l'expérience, en mesurant le plus petit et le plus grand écart du levier, et prenant, pour cet angle, la demi-somme de ces valeurs extrêmes de θ. La droite DCD' qui répond à $\theta = \mathcal{C}$ est la position du levier dans laquelle il demeurerait en équilibre, s'il y parvenait sans vitesse acquise. La durée de chaque oscillation entière du levier, de part et d'autre de cette ligne, sera le temps pendant lequel l'angle $t\sqrt{\frac{g'}{a}} + k'$ augmentera de 180°; en le désignant par T, on aura donc

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g'}};$$

et cette durée T sera aussi donnée par l'observation.

Maintenant, si l'on appelle g la gravité, et l la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations infiniment petites dans le temps T, on a (n° 182),

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

on aura donc

$$ga = g'l;$$

par conséquent, à cause de

$$g = \frac{fm}{r^2}, \quad g' = \frac{fm'c\sin\gamma}{\mathcal{C}b^3},$$

nous aurons, finalement,

$$\frac{m'}{m} = \frac{Cab^3}{clr^2 \sin \gamma};$$

m étant la masse de la terre et r son rayon.

Toutes les quantités contenues dans cette formule sont connues dans chaque expérience; elle servira donc à calculer le rapport de la masse m' à celle de la terre; et connaissant, en outre, les volumes de ces deux corps et la densité de m', on en conclura la densité moyenne de la terre.

254. On démontre, dans la *Mécanique céleste*, que pour la stabilité de l'équilibre de la mer, il est nécessaire et il suffit que la densité moyenne de la terre surpasse celle de l'eau. C'est parce que cette condition est remplie, que les forces provenant des actions simultanées du soleil et de la lune ne produisent que de petites oscillations : si elle ne l'était pas, et que la terre, par exemple, en conservant sa densité moyenne, fût recouverte par une mer de mercure, l'action des moindres forces étrangères au sphéroïde terrestre, produirait, dans ce fluide, un mouvement progressif, de sorte que la mer, au lieu d'osciller, parcourrait la surface entière de la terre.

On prouve aussi, par diverses considérations, que la densité des couches concentriques du sphéroïde terrestre, doit croître en allant de la surface au centre; d'où il résulte que sa densité moyenne doit surpasser celle de la couche superficielle; condition qui se trouve effectivement remplie; car si l'on excepte les métaux, qui sont en petite quantité dans cette couche, les densités des autres matières dont elle est formée, sont toutes beaucoup moindres que cinq fois et demie la densité de l'eau. Mais il importe d'observer que cet accroissement de densité ne suppose pas l'existence de matières entièrement différentes de celles que nous voyons à la surface, et dont la densité propre serait excessivement grande : on peut admettre que toutes les couches de la terre sont formées d'une même matière, un peu compressible, ou d'un mélange de différentes matières, comme à sa surface; et dans cette hypothèse, qui paraît la plus naturelle, leur accroissement de densité serait dû à la condensation produite, dans chaque couche, par la pression des couches supérieures, qui va en augmentant de la surface au centre.

Dans l'intérieur de la terre, la loi de l'attraction, dépend de la loi inconnue des densités; en dehors, elle varie sur le prolongement de chaque rayon, à peu près en raison inverse du carré de la distance au centre; et d'un rayon à un autre, elle éprouve en même temps une variation proportionnelle au carré du cosinus de l'angle que chaque rayon fait avec l'axe de figure du sphéroïde terrestre. Il résulte de cette dernière variation qu'à égale distance du centre de la terre, la force appliquée au centre de la lune et provenant de l'attraction de ce sphéroïde, n'est pas la même dans toutes les directions du rayon vecteur; en sorte qu'on peut considérer cette force comme étant composée de deux autres, l'une provenant de la partie sphérique de la terre et qui est constante ou ne varie qu'à raison de la distance à son centre, l'autre due au renflement de la terre à l'équateur et qui varie avec la direction du rayon par rapport à l'axe des pôles. Laplace a déterminé la petite inégalité en longitude et en latitude, que cette seconde force produit dans le mouvement de la lune; on conçoit que sa grandeur doit dépendre de l'aplatissement de la terre; et en la comparant à celle que l'observation a donnée, on en conclut un applatissement 1/305, peu différent de celui qui résulte de l'ensemble des mesures du pendule et des degrés du méridien.

A la surface de la terre, la variation de la pesanteur provenant de celle de l'attraction et de la force centrifuge, suit la même loi qu'à une distance quelconque du centre, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle, comme nous l'avons déjà dit (n° 178), au carré du cosinus de la latitude. Mais pour vérifier cette loi par les mesures du pendule à secondes, il faut que les oscillations ne soient pas observées près d'une montagne; car, en même temps que la composante horizontale de son attraction écarte le pendule de la verticale, dans sa position d'équilibre, la composante verticale de cette force diminue la pesanteur, et, conséquemment, la longueur du pendule simple. En évitant cette cause d'anomalie, on trouve encore qu'en certains lieux la longueur du pendule à secondes s'écarte de la loi de variation donnée par la théorie; ce qu'on doit attribuer à ce qu'en ces lieux, la densité du terrain, dans une étendue et une profondeur considérables, est plus grande ou plus petite que la densité générale de la couche superficielle, d'où il résulte une augmentation ou une diminution de la pesanteur totale, et, par conséquent, de la longueur du pendule simple, qui est proportionnelle à son intensité. Le pendule est donc aussi un instrument de Géologie, qui annonce, par ses anomalies, des variations d'une grande étendue dans la nature du sol.

Au reste, il faut observer que la loi du décroissement de la pesanteur, proportionnel au carré du cosinus de la latitude, en allant du pôle à l'équateur, suppose qu'on prend pour la surface de la terre le prolongement du niveau des mers; et comme les lieux des continens où se font les observations s'élèvent à des hauteurs différentes au-dessus de ce niveau, il est nécessaire de réduire les longueurs observées, à celles qui auraient lieu à ce niveau même sur chaque verticale. Cette réduction se fait ordinairement en augmentant la pesanteur et la longueur du pendule à secondes, dans le rapport du carré de la distance du lieu de l'observation au centre de la terre, au carré de cette même distance diminuée de la hauteur de ce lieu au-dessus du niveau des mers; ce qui

revient à négliger l'attraction de la couche de terre comprise entre la surface du continent et le prolongement de la surface des mers. On va voir, dans le numéro suivant, que cette correction est trop grande de près de moitié.

255. Soient AM'B (fig. 59) la surface d'un continent, DAMBE le niveau des mers et son prolongement, et C le centre de la terre; soient aussi M' le lieu de l'observation, et M le point où le rayon CM' rencontre ce prolongement; M'M sera la hauteur du point M au-dessus de la surface des mers, que je représenterai par h, et qui sera donnée par un nivellement ou par des mesures barométriques. Si M' était très voisin de la mer, la pesanteur pourrait être un peu diminuée et sa direction un peu dérangée, à cause que la densité de l'eau est moindre que celle du terrain; mais je supposerai que cela n'ait pas lieu, et je supposerai aussi qu'autour du point M' la surface du terrain soit horizontale ou sensiblement perpendiculaire au rayon CM', et que sa densité soit uniforme. Il s'agira de calculer l'attraction exercée au point M', par la couche AM'BM, élevée au-dessus du niveau des mers. Dans ce calcul, on pourra faire abstraction de la courbure de cette couche et de la variation de son épaisseur, ou, autrement dit, on pourra considérer l'épaisseur de cette couche comme constante et égale à h, dans toute l'étendue où son attraction peut être sensible. Je représenterai par c le rayon de cette étendue, et par ρ' la densité de la couche.

Cela posé, soit K un point quelconque de la couche attirante; désignons par z et y ses distances à la surface du terrain et au rayon CM'; et décrivons deux surfaces cylindriques qui aient MM' pour axe commun, et dont les rayons soient y et $y+dy$. Le volume compris entre ces deux surfaces aura $2\pi y dy$ pour base et dz pour hauteur; et si on le décompose en anneaux horizontaux d'une épaisseur infiniment petite, le volume de l'anneau qui répondra au point K sera $2\pi y dy dz$, et sa masse $2\pi\rho' y dy dz$. L'attraction de cet anneau sur un point matériel situé en M' se réduira à une force dirigée suivant MM', qui sera égale à la somme des composantes verticales des attractions de tous ses points; et comme, pour le point quelconque K, on a

$$KM' = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad \cos KM'M = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

la force accélératrice provenant de l'attraction de l'anneau entier, aura pour valeur

$$\frac{2\pi f\rho' y z dy dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

f étant toujours le coefficient de l'attraction universelle. Par conséquent, pour avoir l'attraction de la couche que nous considérons, il faudra intégrer cette formule depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, et depuis $y = 0$ jusqu'à $y = c$; ce qui donne

$$k' = 2\pi f\rho'(c + h - \sqrt{c^2 + h^2}),$$

en désignant cette force par k'. Mais, en général, l'épaisseur verticale de la couche attirante est petite, eu égard à son rayon horizontal; si donc on néglige h^2 par rapport à c^2, on aura simplement

$$k' = 2\pi f\rho' h.$$

Soit k l'attraction exercée au point M par la partie de la terre qui se termine au niveau des mers, et r le rayon CM; cette attraction au point M' deviendra

$$\frac{kr^2}{(r + h)^2}.$$

En désignant la pesanteur et la composante verticale de la force centrifuge par g et γ au point M, et par g' et γ' au point M', on aura donc

$$g = k - \gamma, \quad g' = \frac{kr^2}{(r + h)^2} + k' - \gamma'.$$

Je développe le premier terme de g' suivant les puissances de h, puis je retranche g' de g, et je néglige le carré de h et la petite différence $\gamma' - \gamma$; il vient

$$g - g' = \frac{2kh}{r} - k'.$$

A cause de la petitesse du facteur $\frac{h}{r}$, on peut faire $k = g'$ dans le premier terme de cette formule; dans la petite quantité k', on peut aussi supposer

$$\frac{4\pi\rho f r}{3} = g',$$

en désignant par ρ la densité moyenne de la terre, et prenant $\frac{4\pi r^3}{3}$ pour son volume; il en résultera alors

$$k' = \frac{3\rho' h g'}{2\rho r},$$

et, par conséquent,

$$g = g'\left(1 + \frac{2h}{r} - \frac{3\rho' h}{2\rho r}\right).$$

C'est donc par le facteur compris entre les paren-

thèses, et non par le facteur $1 + \frac{2h}{r}$, comme on a coutume de le faire, qu'on devra multiplier la pesanteur g' qui a lieu sur un continent, à une hauteur h au-dessus du niveau des mers, pour la réduire à ce niveau. On peut, en général, évaluer ρ' à la moitié de ρ, et prendre, en conséquence, $1 + \frac{5h}{4r}$ pour ce facteur. A Paris, l'élévation h du point de l'Observatoire où se trouve le baromètre, est de 63 mètres; d'où il résulte que la gravité et la longueur du pendule à secondes y sont moindres qu'au niveau des mers, dans le rapport de l'unité à 1,0000125.

fixe une droite tracée dans le plan des x et y; mais alors les forces comprises dans ce plan seraient détruites, soit parce qu'elles rencontreraient cet axe fixe, soit à cause qu'elles lui seraient parallèles. On pourrait donc les supprimer; et, cela fait, l'équilibre serait rompu, contre l'hypothèse, puisque rien n'empêcherait plus les forces perpendiculaires au plan des x et y de faire tourner le corps solide autour de l'axe fixe; par conséquent, l'équilibre est impossible tant que ces dernières forces ne se détruisent pas séparément. Cela étant, on verra de même que l'équilibre ne peut exister entre les forces comprises dans le plan des x et y, sans que les forces parallèles à l'axe des y ne se détruisent entre elles; car s'il avait lieu, et que cette condition ne fût pas remplie, on fixerait un point de l'axe des x, qui détruirait toutes les forces dirigées suivant cette droite : rien n'empêcherait plus les forces perpendiculaires à cette droite, de faire tourner le système autour de ce point; en sorte que l'équilibre se trouverait détruit par l'addition d'un point fixe, ce qui serait absurde.

Cela posé, si le corps solide que nous considérons est entièrement libre, il faudra d'abord (n° 57), pour l'équilibre des forces parallèles $P\cos\gamma$, $P'\cos\gamma'$, $P''\cos\gamma''$, etc., g et $-g$, g' et $-g'$, g'' et $-g''$, etc., que leur somme soit nulle; ce qui donne

$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{etc.} = 0.$$

Il faudra, en outre, que les sommes de leurs momens par rapport au plan des x et z et à celui des y et z, qui sont parallèles à ces forces, soient aussi nulles. Or, par rapport au premier plan, on a

$$yP\cos\gamma + y'P'\cos\gamma' + y''P''\cos\gamma'' + \text{etc.},$$

pour la somme des momens des forces $P\cos\gamma$; $P'\cos\gamma'$, $P''\cos\gamma''$, etc., celle des momens des forces g, g', g'', etc., est

$$gy + g'y' + g''y'' + \text{etc.};$$

et la somme des momens des forces $-g$, $-g'$, $-g''$, etc., a pour valeur

$$-g\left(y + \frac{zP\cos\zeta}{g}\right) - g'\left(y' + \frac{z'P'\cos\zeta'}{g'}\right) - \text{etc.},$$

d'après les coordonnées des points d'application de ces diverses forces. On a donc, en ajoutant ces trois sommes et réduisant,

$$P(y\cos\gamma - z\cos\zeta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\zeta') + \text{etc.} = 0;$$

et l'on trouvera de même, en formant la somme des momens des mêmes forces, par rapport au plan des y et z, et l'égalant à zéro,

$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + \text{etc.} = 0.$$

Quant aux forces $P\cos\zeta - h$, $P'\cos\zeta' - h'$; $P''\cos\zeta'' - h''$, etc., et h, h', h'', etc., parallèles à l'axe des y, et toutes comprises dans le plan des x et y, il n'y aura que deux équations d'équilibre (n° 57); il suffira que leur somme soit égale à zéro, ce qui donne

$$P\cos\zeta + P'\cos\zeta' + P''\cos\zeta'' + \text{etc.} = 0,$$

et que la somme de leurs momens, par rapport au plan des y et z, soit aussi égale à zéro. Or, par rapport à ce plan, la somme des momens des premières forces est

$$x(P\cos\zeta - h) + x'(P'\cos\zeta' - h') + \text{etc.} = 0;$$

celle des momens des forces h, h', h'', etc., est en même temps,

$$h\left(x - \frac{Py\cos\alpha}{h}\right) + h'\left(x' - \frac{P'y'\cos\alpha'}{h'}\right) + \text{etc.},$$

d'après leurs distances à l'axe des y; par conséquent, en égalant la somme totale à zéro, on aura

$$P(x\cos\zeta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\zeta' - y'\cos\alpha') + \text{etc.} = 0.$$

Enfin, pour l'équilibre des forces dirigées suivant l'axe des x, il suffira que leur somme soit nulle; d'où il résulte

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0.$$

Telles sont les six équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un corps solide entièrement libre et sollicité par des forces quelconques, qu'il s'agissait d'obtenir.

261. En faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
&P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} = X,\\
&P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{etc.} = Y,\\
&P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{etc.} = Z,\\
&P(z\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(z'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \text{etc.} = L,\\
&P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \text{etc.} = M,\\
&P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \text{etc.} = N,
\end{aligned}$$

ces équations d'équilibre deviendront

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,\ L = 0,\ M = 0,\ N = 0. \quad (1)$$

On peut remarquer, que ces quantités L, M, N, ainsi que Z, Y, X, se déduisent les unes des autres par la règle du n° 22.

Ces six équations renferment des conditions d'équilibre communes à tous les systèmes de points matériels entièrement libres; car, quelle que soit la nature d'un pareil système, ou la liaison mutuelle des points qui le composent, il est évident qu'on ne troublera pas leur équilibre en rendant leurs distances invariables, sans changer leurs coordonnées, ni les forces qui les sollicitent. Par conséquent, les équations d'équilibre d'un système de forme invariable, qui ont lieu entre ces quantités, doivent encore subsister pour tout autre système, mais alors elles ne sont plus suffisantes; et il y faut joindre d'autres conditions spéciales pour chaque système en particulier, qui serviront, comme on le verra par la suite, à déterminer les positions relatives de ses différens points dans l'état d'équilibre.

262. Quand les forces données sont toutes parallèles entre elles, les angles qu'elles font avec chacun des axes Ox, Oy, Oz, sont égaux ou supplémentaires, selon que ces forces agissent dans le même sens ou en sens contraire; on peut les supposer égaux, en considérant, en même temps, comme positives les forces qui agissent dans un sens, et comme négatives celles qui agissent dans le sens opposé (n° 11); on aura donc alors

$$\alpha = \alpha' = \alpha'', \text{ etc.},\ \beta = \beta' = \beta'', \text{ etc.},\ \gamma = \gamma' = \gamma'', \text{ etc.};$$

au moyen de quoi les trois premières équations (1) se réduisent à une seule, savoir :

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0,$$

et les trois autres deviendront

$$\begin{aligned}
(Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.})\cos\beta &= (Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.})\cos\alpha,\\
(Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.})\cos\alpha &= (Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.})\cos\gamma,\\
(Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.})\cos y &= (Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.})\cos\beta.
\end{aligned}$$

Mais les équations d'équilibre des forces parallèles étant seulement au nombre de trois, il faut que ces trois dernières équations se réduisent à deux; et, en effet, si on les ajoute après les avoir multipliées par $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$, on trouve une équation identique; en sorte que l'une d'elles est une suite des deux autres.

Quand toutes les forces données sont comprises dans un même plan, on peut prendre ce plan pour celui des x et y; alors les angles γ, γ', γ'', etc., sont droits, et les coordonnées z, z', z'', etc., égales à zéro, ce qui fait évanouir la troisième et les deux dernières équations (1). Dans ce cas particulier, comme dans le cas des forces parallèles, il y a donc seulement trois équations d'équilibre, qui sont

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad L = 0.$$

263. Lorsque les forces données ne se font pas équilibre, on peut demander la condition qu'elles doivent remplir pour avoir une résultante unique, et quelle est cette résultante.

Pour répondre à cette question, je désigne par R cette force; par a, b, c, les angles que sa direction fait avec des parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, menées par un de ses points, qu'on prendra pour son point d'application, et dont les coordonnées, rapportées à ces mêmes axes, seront représentés par x_1, y_1, z_1. Cette force, prise en sens contraire de sa direction, fera équilibre aux forces données. Les équations (1) auront donc lieu en joignant à P, P', P'', etc., une force égale et contraire à R; par conséquent, on aura

$$X = R\cos a,\ Y = R\cos b,\ Z = R\cos c, \quad (2)$$

et, en outre,

$$\begin{aligned}
L &= R(z_1\cos b - y_1\cos a),\\
M &= R(z_1\cos a - x_1\cos c),\\
N &= R(y_1\cos c - z_1\cos b),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu des trois premières équations,

$$\left.\begin{aligned} Xy_1 - Yx_1 + L &= 0, \\ Zx_1 - Xz_1 + M &= 0, \\ Yz_1 - Zy_1 + N &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1, pouvant appartenir à un point quelconque de la droite suivant laquelle est dirigée la résultante, ces trois dernières équations seront celles de ses projections sur les trois plans des coordonnées. Pour que cette droite existe, il faudra donc qu'elles se réduisent à deux; or, en les ajoutant après les avoir multipliées par Z, Y, X, les trois variables x_1, y_1, z_1, disparaissent, et l'on a

$$ZL + YM + XN = 0; \quad (4)$$

par conséquent, il sera nécessaire et il suffira que cette équation (4) soit satisfaite pour que les forces données aient une résultante unique : quand elle aura lieu, cette force sera déterminée, en grandeur et en direction, par les équations (2).

Si les trois sommes X, Y, Z, des composantes parallèles aux axes des x, y, z, sont nulles, l'équation (4) sera satisfaite; mais alors la résultante sera une force infiniment petite, située à une distance infinie des points d'application des forces données, ou, plus exactement, ces forces se réduiront à deux, égales, parallèles, agissant en sens contraire, et non réductibles à une seule (n° 44).

Lorsque les trois sommes L, M, N, sont nulles, l'équation (4) sera aussi satisfaite; et l'on voit, par les équations (3), que la résultante passera par l'origine des coordonnées.

264. Quand la condition exprimée par l'équation (4) ne sera pas remplie, on y pourra satisfaire en joignant aux forces données une force convenable. Je supposerai, pour plus de simplicité, qu'elle passe par l'origine O des coordonnées; je la représenterai par Q, et par λ, μ, ν, les angles qu'elle fait avec les axes Ox, Oy, Oz. Les quantités L, M, N, ne changeront pas par l'addition de cette force, et les sommes X, Y, Z, augmenteront des termes Q cos λ, Q cos μ, Q cos ν. L'équation (4) deviendra donc

$$Q(L\cos\nu + M\cos\mu + N\cos\lambda) + LZ + MY + NZ = 0;$$

en sorte qu'on y satisfera d'une infinité de manières différentes, au moyen de la force Q et des angles λ, μ, ν, relatifs à sa direction.

La résultante R des forces Q, P, P', P'', etc., et sa position, se détermineront au moyen des équations (2) et (3), dans lesquelles on mettra X + Q cos λ, Y + Q cos μ, Z + Q cos ν, au lieu de X, Y, Z. Les forces données P, P', P'', etc., pourront donc être remplacées par cette résultante R et une force égale et directement contraire à la force Q; d'où l'on conclut que quand les forces données ne sont point en équilibre, ni réductibles à une force unique, on peut toujours les réduire, d'une infinité de manières différentes, à deux forces seulement, qui ne seront pas comprises dans un même plan, sans quoi elles se réduiraient à une seule, contre l'hypothèse. C'est d'ailleurs ce qu'on voit immédiatement par la transformation du n° 257; car les forces données P, P', P'', etc., pourront être remplacées par la résultante des forces parallèles à l'axe des z, et par celle des forces comprises dans le plan des x et y; et l'on pourra ensuite transformer, sans difficulté, ces deux résultantes en deux autres forces, d'une infinité de manières différentes. En cherchant la condition pour qu'elles se rencontrent, on trouvera l'équation (4), relative à l'existence d'une résultante unique.

265. Si l'on considère deux corps solides A et A' (fig. 62), qui se touchent en un point K et s'appuient l'un contre l'autre, et si l'on suppose qu'ils soient sollicités par des forces données, il sera facile de déduire de ce qui précède les conditions de leur équilibre.

Pour cela, je suppose que les six quantités X, Y, Z, L, M, N, du n° 261, se rapportent au corps A, et je désigne par X', Y', Z', L', M', N', ce qu'elles deviennent relativement à A'; j'appelle x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point K rapportées aux mêmes axes que celles qui entrent dans ces diverses quantités; par le point K, je mène une droite HKH' perpendiculaire au plan tangent commun aux deux corps; je représente par a, b, c, les angles que fait la partie KH de cette droite, comprise dans A, avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par ce même point K: toutes ces quantités sont données, et il s'agira de former les équations d'équilibre auxquelles elles doivent satisfaire.

Or, le corps A exercera sur A', dans la direction KH', une pression inconnue que je représenterai par R; il en éprouvera, en même temps, une résistance égale et contraire à cette force normale. Si donc on joint aux forces données qui agissent sur A une force R dirigée suivant KH, on pourra ensuite faire abstraction de A', et, de même, si l'on joint aux forces appliquées à A' une force R dirigée suivant KH', on pourra aussi considérer A' isolément. Il résulte de là et des équations (1) qu'on aura pour l'équilibre de ces deux corps les douze équations suivantes :

$$X + R\cos a = 0,\ Y + R\cos b = 0,\ Z + R\cos c = 0,$$
$$X' - R\cos a = 0,\ Y' - R\cos b = 0,\ Z' - R\cos c = 0,$$
$$L + R(x_1\cos b - y_1\cos a) = 0,$$
$$M + R(z_1\cos a - x_1\cos c) = 0,$$
$$N + R(y_1\cos c - z_1\cos b) = 0,$$
$$L' - R(x_1\cos b - y_1\cos a) = 0,$$
$$M' - R(z_1\cos a - x_1\cos c) = 0,$$
$$N' - R(y_1\cos c - z_1\cos b) = 0,$$

qui se réduiront à onze par l'élimination de R. Après que ces onze équations d'équilibre auront été vérifiées, l'une des précédentes fera connaître la valeur de R, qui devra être une quantité positive pour que les deux corps s'appuient réellement l'un contre l'autre.

Ces douze équations donnent immédiatement

$$X + X' = 0,\ Y + Y' = 0,\ Z + Z' = 0,$$
$$L + L' = 0,\ M + M' = 0,\ N + N' = 0;$$

ce qui résulte aussi des conditions d'équilibre communes à tous les systèmes entièrement libres, comme celui des deux corps A et A' (n° 261).

On trouvera pareillement les équations d'équilibre d'un nombre quelconque de corps solides, dont plusieurs s'appuient l'un contre l'autre; et il est aisé de voir que le nombre de ces équations sera égal à six fois celui des corps, moins le nombre de leurs contacts.

266. Les équations d'équilibre d'un corps solide assujetti à des conditions données doivent être comprises parmi celles d'un corps entièrement libre; car l'équilibre de celui-ci ne serait pas troublé, si on l'assujettissait à ces conditions particulières; en sorte qu'aucune nouvelle équation d'équilibre ne peut être introduite par ces conditions. Mais, au contraire, une ou plusieurs des équations (1) deviendront superflues; et il s'agira de déterminer, pour les différens cas qui peuvent se présenter, celles de ces équations qui resteront nécessaires. C'est ce que nous allons faire successivement dans ce numéro, en supposant toujours qu'on ait remplacé les forces données P, P', P'', etc., par les trois groupes de forces du n° 259.

1° Si le corps solide qui doit rester en équilibre renferme un point fixe, on prendra ce point pour l'origine O des coordonnées. Les forces dirigées suivant l'axe Ox seront détruites par ce point; ce qui fera disparaître l'équation $X = 0$. Pour l'équilibre des forces parallèles à l'axe Oy et comprises dans le plan des x et y, il ne sera plus nécessaire qu'on ait $Y = 0$, et il suffira que leur résultante coïncide avec l'axe Oy, ou que la somme L de leurs momens, par rapport au plan des y et z, soit égale à zéro. Enfin, pour l'équilibre des forces parallèles à l'axe des z, l'équation $Z = 0$ ne sera plus nécessaire; il suffira que leur résultante coïncide avec l'axe Oz; ce qui exigera que les sommes de leurs momens, par rapport aux plans des y et z, et des x et z, qui sont les quantités $-M$ et N, soient égales à zéro.

Ainsi, dans ce premier cas, les trois équations d'équilibre qui resteront nécessaires seront

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0.$$

Elles signifient, effectivement, que les forces données ont une résultante unique, et que cette résultante vient passer par le point fixe O. Cette force exprimera, en grandeur et en direction, la pression exercée sur ce point, et sera déterminée par les équations (2).

2° Supposons que le corps solide soit retenu par un axe fixe, autour duquel il est assujetti à tourner, sans pouvoir glisser dans le sens de sa longueur. Prenons cet axe pour celui des z; les forces parallèles à cette droite Oz ne pourront produire aucun mouvement, et les trois équations $Z = 0$, $M = 0$, $N = 0$, relatives à leur équilibre, ne seront plus nécessaires. Les équations $X = 0$ et $Y = 0$ ne le seront pas non plus pour l'équilibre des forces comprises dans le plan des x et y; en sorte que, dans ce cas, il n'y aura plus qu'une seule équation d'équilibre, qui sera $L = 0$, c'est-à-dire,

$$P(x\cos c - y\cos a) + P'(x'\cos c' - y'\cos a') + \text{etc.} = 0. \quad (5)$$

Mais si le corps avait la liberté de glisser le long de l'axe fixe, il faudrait en outre, pour empêcher ce mouvement, que la somme Z des forces parallèles à Oz fût égale à zéro; et il y aurait alors les deux équations d'équilibre

$$Z = 0,\quad L = 0.$$

La pression que l'axe fixe éprouvera perpendiculairement à sa direction sera la résultante des forces comprises dans le plan des x et y, déterminée, en grandeur et en direction, par les deux premières équations (2), et passant par le point O, en vertu de l'équation (5). Les forces parallèles à cet axe tendront en même temps à le faire tourner sur lui-même.

En comparant les quantités M et N à L, on conclut de leur composition que l'équation d'équilibre autour de l'axe Oy sera $M = 0$, et qu'elle sera $N = 0$ autour de l'axe Ox. Il en résulte aussi que

la condition d'équilibre autour d'un point fixe consiste en ce que l'équilibre ait lieu successivement autour de trois axes fixes et rectangulaires, menés arbitrairement par ce point. Par conséquent, si l'équilibre existe autour de trois axes rectangulaires qui se coupent en un même point, il aura aussi lieu autour de toute autre droite passant par ce point.

3° Je suppose que trois ou un plus grand nombre de points non en ligne droite, appartenant au corps solide, soient assujettis à demeurer sur un plan fixe dont la position est donnée; et je prends ce plan pour celui des x et y. Les forces parallèles à l'axe des z ne pouvant produire aucun mouvement, les équations relatives à leur équilibre n'auront pas lieu; mais les trois équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad L = 0,$$

qui répondent aux forces comprises dans le plan des x et y, seront nécessaires pour empêcher le corps de glisser ou de tourner parallèlement à ce plan fixe.

La force Z exprimera la pression totale que le plan fixe éprouvera. Si le corps est seulement posé sur ce plan, de sorte qu'il s'agisse, par exemple, d'un polyèdre dont une face soit en contact avec le plan des x et y, il faudra que le signe de Z soit tel, que cette force appuie le corps contre ce plan. Il faudra, en outre, que cette résultante des forces parallèles à l'axe des z vienne percer le plan des x et y dans l'étendue de la base du corps, sans quoi elle le détacherait de ce plan, en le faisant tourner autour de l'un des côtés de cette base. Or, si l'on appelle x_1 et y_1 les coordonnées du point ou cette résultante rencontre le plan des x et y, ses momens par rapport aux plans des x et z et des y et z seront $Z\,y_1$ et $Z\,x_1$; ils devront être égaux aux sommes des momens des composantes par rapport aux mêmes plans; et, d'après les valeurs de ces deux sommes qu'on a trouvées précédemment (n° 260), on aura

$$Zx_1 = -M, \quad Zy_1 = N.$$

Il faudra donc vérifier, dans chaque cas particulier, que les valeurs de x_1 et y_1, tirées de ces équations, appartiennent à un point de la base du corps; condition d'équilibre qui ne peut être exprimée par des équations, non plus que celle qui est relative au signe de Z.

4° Si les points du corps assujettis à rester sur le plan fixe des x et y sont seulement au nombre de deux, ou bien s'ils sont tous situés sur une même droite, on prendra cette ligne pour l'axe des y; la résultante Z devra alors rencontrer le plan des x et y en un point de cet axe; et, indépendamment des trois équations du cas précédent, on aura cette quatrième équilibre $M = 0$.

5° Enfin, lorsque le corps solide ne touchera le plan fixe des x et y qu'en un seul point, où l'on placera l'origine O des coordonnées, on verra, sans difficulté, que les équations d'équilibre seront au nombre de cinq, savoir :

$$X = 0, \; Y = 0, \; L = 0, \; M = 0, \; N = 0,$$

La force Z exprimera toujours la pression exercée sur le plan fixe au point O, et devra avoir un signe convenable.

Ce résultat coïncide avec celui du numéro précédent; car si l'on suppose le corps A' fixe et terminé par un plan, que l'on prenne ce plan pour celui des x et y, et le point K (fig. 62) pour origine des coordonnées, on devra faire, dans les équations de ce numéro, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $a = 90°$, $b = 90°$; ce qui réduira aux cinq équations précédentes, un pareil nombre des six équations relatives à l'équilibre du corps A. La sixième de ces équations deviendra, en même temps,

$$R + Z = 0,$$

en supposant qu'on ait $c = 0$, ou que la partie KH de la normale soit l'axe des z positives; par conséquent, la pression exercée sur A', qui est égale et contraire à la résistance R, sera la force Z en grandeur et en direction.

On peut remarquer, d'après cette énumération des différens cas d'équilibre, que les nombres d'équations relatives à un corps solide gêné par des obstacles fixes peuvent être tous ceux qui sont inférieurs au nombre six, correspondant à un corps entièrement libre.

267. L'équation (5) relative à l'équilibre autour de l'axe des z supposé fixe, ne contient ni les composantes parallèles à cet axe, des forces données P, P', P'', etc., ni les coordonnées parallèles au même axe, de leurs points d'application M, M', M'', etc.; en sorte que l'équilibre ne serait pas troublé, si l'on remplaçait ces forces et leurs points d'application par leurs projections sur le plan des x et y; ce qu'on démontrerait d'ailleurs facilement *à priori*.

Soient donc Q, Q', Q'', etc., les forces P, P', P'', etc., projetées sur le plan des x et y, c'est-à-dire, décomposées parallèlement à ce plan et transportées aux projections des points M, M', M'', etc., sur ce même plan. Désignons par q, q', q'', etc., les perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées, supposée fixe, sur les directions des forces Q, Q', Q'', etc.; et, pour fixer les idées, supposons que Q, Q', Q'', tendent à faire tourner, dans le même sens, autour de cette origine, et que Q''', Q^{IV}, etc., tendent à faire tourner dans le sens opposé. Pour l'équilibre de toutes ces forces, il faudra, d'après le n° 47, que l'on ait

$$Qq + Q'q' + Q''q'' - Q'''q''' - Q^{\text{IV}}q^{\text{IV}} - \text{etc.} = 0, \quad (6)$$

en considérant q, q', q'', q''', etc., comme des quantités positives, aussi bien que Q, Q', Q'', Q''', etc.; par conséquent, cette équation devra coïncider avec l'équation (5); ce qu'on vérifie, en effet, de la manière suivante.

Soient H (fig. 63) la projection du point M, OG et HG ses coordonnées x et y, HA la direction de la force Q, λ et μ les angles que fait cette droite avec des parallèles aux axes Ox et Oy, menées par le point H. Par le point O, menons deux autres axes Ox_1 et Oy_1, le premier suivant la direction HA, et le second perpendiculaire à cette droite et tel que l'angle yOy_1 soit aigu ou obtus en même temps que xOx_1; appelons x_1 et y_1 les coordonnées OF et FH du point H, rapportées à ces nouveaux axes; nous aurons, comme on sait,

$$x_1 = y \cos \mu + x \cos \lambda, \quad y_1 = y \cos \lambda - x \cos \mu.$$

Or, la perpendiculaire OK ou q, abaissée du point O sur HA, devant être une quantité positive, on aura

$$q = \pm y_1 = \pm (y \cos \lambda - x \cos \mu),$$

selon que l'ordonnée y_1 sera positive ou négative, ou, ce qui est la même chose, d'après le sens qu'on a supposé à l'axe Oy_1, selon que la force Q tendra à faire tourner, dans un sens ou dans le sens opposé, autour du point O. On a d'ailleurs

$$Q = P \sin \gamma,$$

et, de plus (n° 8)

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \lambda, \quad \cos \beta = \sin \gamma \cos \mu;$$

il en résultera donc

$$Qq = \pm P (y \cos \alpha - x \cos \beta).$$

Les forces Q' et Q'' tendant, par hypothèse, à faire tourner dans le même sens que Q, on aura de même

$$Q'q' = \pm P' (y' \cos \alpha' - x' \cos \beta'),$$
$$Q''q'' = \pm P'' (y'' \cos \alpha'' - x'' \cos \beta'');$$

et les autres forces Q''', Q^{IV}, etc., tendant à faire tourner en sens opposé, on aura, au contraire,

$$Q'''q''' = \mp P''' (y''' \cos \alpha''' - x''' \cos \beta'''),$$
$$Q^{\text{IV}} q^{\text{IV}} = \mp P^{\text{IV}} (y^{\text{IV}} \cos \alpha^{\text{IV}} - x^{\text{IV}} \cos \beta^{\text{IV}}),$$
etc.

On prendra donc, en même temps, les signes supérieurs ou les signes inférieurs dans toutes ces valeurs; et en les substituant dans l'équation (6), elle deviendra l'équation (5); ce qu'il s'agissait de vérifier.

268. Le corps en équilibre étant toujours soumis à la pesanteur, il faudra comprendre parmi les forces données P, P', P'', etc., son poids appliqué suivant la verticale à son centre de gravité. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un corps pesant posé sur un plan incliné et soutenu par une seule force. La figure 64 représente une section du corps passant par le centre de gravité G, et perpendiculaire au plan incliné; la longueur de ce plan est AB, sa base BC, et sa hauteur AC. On place l'origine O des coordonnées sur la verticale GH passant par le centre de gravité, et l'on prend les axes Oz et Ox perpendiculaire et parallèle à AB : le troisième axe Oy, qui n'est pas représenté, serait perpendiculaire au plan de la figure. La force P sera le poids du corps, la verticale GH sa direction, et HOx l'angle α. On aura, en outre, $z = 0$, $y = 0$, $\beta = 90°$. En prenant donc P' pour la force donnée qui soutient le corps pesant, les équations d'équilibre du troisième cas du n° 266 se réduiront à

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' = 0, \; P' \cos \beta' = 0, \; P' (z' \cos \beta' - y' \cos \alpha') = 0.$$

D'après les deux dernières, on aura $\beta' = 90°$ et $y' = 0$; ce qui montre d'abord que la force P' devra être comprise dans le plan des x et z; et en effet, cela est évidemment nécessaire pour que cette force et le poids du corps aient une résultante unique, perpendiculaire au plan incliné. Je supposerai que O soit le point où la direction de P' rencontre la verticale GH, et je représenterai par OD cette direction. L'angle α' ou DOx devra être obtus pour satisfaire à la première des trois équations précédentes; j'appellerai δ l'angle aigu DOx' que fait la force P' avec le prolongement de Ox, de sorte qu'on ait

$$\cos \alpha' = - \cos \delta.$$

L'angle α ou HOx est le complément de l'inclinaison ABC du plan; en désignant la hauteur AC par h, et la longueur AB par l, on aura donc

$$\cos \alpha = \frac{h}{l};$$

d'où il résultera finalement

$$\frac{Ph}{l} = P' \cos \delta;$$

équation d'équilibre qui fera connaître l'une des deux quantités P' et δ, quand l'autre sera donnée.

Lorsque, par exemple, la force P' sera parallèle au plan incliné, on aura $\delta = 0$, et, conséquemment,

$$P' : P :: h : l,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P' = P \sin \gamma,$$

en appelant i l'inclinaison du plan. Si l'on appelle Q la pression que le plan éprouvera, et qui sera, dans ce cas, la composante du poids P suivant la perpendiculaire Os, on aura, en même temps,

$$Q = P \cos i.$$

269. On fait ici abstraction du frottement qui s'ajoute à la force P' parallèle au plan incliné, pour empêcher le corps de glisser le long de ce plan. Si cette force P' est nulle, le frottement seul peut retenir le corps tant que l'inclinaison i n'a pas atteint une certaine limite. En désignant par λ cette limite, c'est-à-dire, l'angle i qui a lieu lorsque l'équilibre va commencer à se rompre, et supposant qu'à cet instant le frottement est une fraction f de la pression, il faudra que la force fQ fasse exactement équilibre à la composante P sin λ du poids du corps, parallèle au plan incliné. Par conséquent, on aura, à la fois,

$$Q = P \cos \lambda, \quad fQ = P \sin \lambda;$$

d'où l'on tire

$$f = \text{tang } \lambda;$$

ce qui fera connaître la valeur de f, d'après l'observation de l'angle λ, sous lequel le mouvement commence, et qu'on appelle l'*angle du frottement*.

Toutes choses d'ailleurs égales, l'expérience prouve qu'à l'instant qui précède la rupture de l'équilibre, le frottement est proportionnel à la pression; en sorte que le coefficient f et l'angle λ sont indépendans de la pression Q, et par suite du poids P. Ce coefficient varie avec la nature du corps et le poli des surfaces : on a aussi remarqué qu'il n'atteint le *maximum* de sa valeur qu'après que le contact du corps et du plan a eu lieu pendant un certain temps, différent pour les corps de nature diverse; et ce n'est qu'à partir de ce *maximum* que le frottement est proportionnel à la pression.

En admettant cette loi expérimentale, il en résulte que si plusieurs corps de même nature, et dont les surfaces ont le même poli, sont placés sur un plan horizontal, et qu'après un certain temps on incline ce plan graduellement, tous ces corps commenceront à glisser sous un même angle λ, quels que soient leurs poids et l'étendue de leurs surfaces en contact avec le plan.

270. Lorsqu'un corps est posé sur un plan horizontal, la pression exercée par son poids P se distribue entre les points d'appui de ce plan; mais quand leur nombre surpasse trois, cette distribution semble d'abord indéterminée; ce qui présenterait une difficulté que nous allons examiner.

Pour fixer les idées, supposons que ce plan horizontal soit la surface d'une table dont les pieds sont verticaux. Dans ce plan, menons deux axes rectangulaires Ox et Oy (fig. 65). Soient C la projection du centre de gravité du corps sur ce plan, et A, A', A'', etc., les points de ce même plan qui répondent aux pieds de la table. Désignons par x_1 et y_1, x et y, x' et y', x'' et y'', etc., les coordonnées de ces points C, A, A', A'', etc., rapportées aux axes Ox et Oy. Pour que la table ne soit pas renversée, il faudra que le point C soit situé dans l'intérieur du polygone A A' A'' A''' etc. Cette condition étant remplie, le poids P appliqué au point C se décomposera en forces parallèles, dirigées dans le sens de la pesanteur, et passant par les points d'appui A, A', A'', etc., lesquelles forces seront les charges que les pieds de la table auront à supporter. Soient Q, Q', Q'', etc., ces charges inconnues; d'après la théorie des forces parallèles, nous aurons

$$\begin{aligned} P &= Q + Q' + Q'' + \text{etc.}, \\ Px_1 &= Qx + Q'x' + Q''x'' + \text{etc.}, \\ Py_1 &= Qy + Q'y' + Q''y'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, s'il n'existe que trois points d'appui A, A', A'', ces trois équations suffiront pour déterminer les charges Q, Q', Q'', mais s'il y en a quatre ou un plus grand nombre, le problème sera indéterminé, et l'on pourra prendre à volonté les valeurs de toutes les inconnues, moins trois, pourvu qu'il n'en résulte, pour ces trois inconnues, que des valeurs positives.

Cette indétermination aurait lieu, en effet, si la table était rigoureusement inflexible; mais cela n'arrive jamais; et, quelque peu flexible qu'on la suppose, elle se déformera un tant soit peu et se comprimera inégalement dans ses différentes parties. Or, la figure qu'elle prendra et la quantité dont elle sera comprimée en chaque point dépendront non seulement du poids P, mais aussi du nombre et de la disposition des points d'appui A, A', A'', etc.; et l'une et l'autre, ainsi que la pression qui aura lieu en chacun de ces points, seront complètement déterminées dans chaque cas particulier. Toutefois, cette détermination est un problème très difficile, dont la solution générale n'a pas encore été donnée, et qui appartient à la Physique mathématique. Nous nous bornerons ici à remarquer que tout est nécessairement déterminé dans la nature, et que quand quelque chose nous semble indéterminé, c'est que nous avons fait abstraction de quelque donnée du problème, c'est-à-dire, de quelque propriété de la matière, comme le degré de flexibilité de la table, dans la question présente.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES MOMENS.

271. Les momens que nous allons considérer dans ce chapitre sont ceux dont il a été question dans le n° 42. Ainsi, le moment d'une force P est le produit Pp de cette force et de la perpendiculaire p abaissée du centre des momens sur sa direction. Si donc ce centre est C (fig. 66), et que la force P soit représentée par la droite MA prise sur sa direction, son moment aura pour expression le double du triangle CAM qui a pour base cette force et son sommet au point C. D'après cela, le théorème du n° 46, relatif au moment de la résultante de deux forces, n'est plus qu'une proposition de Géométrie facile à démontrer.

En effet, soient MA et MB les deux composantes; la diagonale MD du parallélogramme MADB sera leur résultante; et le point C étant en dehors de l'angle AMB et de son opposé au sommet, il s'agira de prouver que le triangle CMD est la somme des triangles CMA et CMB. Or, on a d'abord

$$\text{CMD} = \text{CMA} + \text{CAD} + \text{MAD};$$

en abaissant du point C une perpendiculaire CE sur la droite MB, qui rencontre en F sa parallèle AD, on aura

$$\text{CMB} = \tfrac{1}{2}\,\text{MB.CE}, \quad \text{CAD} = \tfrac{1}{2}\,\text{AD.CF};$$

et à cause de

$$\text{MB} = \text{AD}, \quad \text{CF} = \text{CE} - \text{EF},$$

il en résultera

$$\text{CAD} = \text{CMB} - \tfrac{1}{2}\,\text{MB.EF};$$

mais le produit MB. EF est la surface du parallélogramme MADB, ou le double du triangle MAD; on aura donc

$$\text{CAD} = \text{CMB} - \text{MAD},$$

et, par conséquent,

$$\text{CMD} = \text{CMA} + \text{CMB};$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

La figure suppose que la droite EF soit la différence des perpendiculaires CE et CF; elle pourrait être leur somme, et l'on modifierait sans difficulté la démonstration précédente pour l'appliquer à cet autre cas. On prouvera aussi, de la même manière, que le triangle CMD est la différence des triangles CMA et CMB, quand le point C est placé dans l'angle AMB ou dans son opposé au sommet.

272. Par le centre des momens (fig. 67), menons un plan quelconque; projetons sur ce plan la droite AB qui représente la force P en grandeur et en direction; soit Q la force représentée de même par la projection A'B' de AB; le moment de la force P sera le double du triangle CAB, et celui de la force Q le double du triangle CA'B'; par conséquent, le centre des momens restant le même, le moment de la projection d'une force sur un plan passant par ce point, est la projection, sur ce même plan, du moment de cette force.

Si l'on appelle H le moment de la force P, et K celui de sa projection Q; que l'on élève sur les plans de ces deux momens des perpendiculaires CD et CE, et qu'on appelle δ l'angle DCE, cet angle sera aussi l'inclinaison de H sur K, et l'on aura (n° 10)

$$\text{K} = \text{H} \cos \delta.$$

Pour une même force P, l'angle δ et le moment H changeront avec la position du point C sur la droite CE; mais cette droite restant la même, le produit H cos δ ne variera pas; car K ou le triangle CA'B' ne fera que se déplacer parallèlement à lui-même, sans changer de grandeur.

273. Au lieu d'une seule force, considérons un système de forces quelconques P, P', P'', etc. Soient H, H', H'', etc., leurs momens par rapport au point C (fig. 68). Désignons par δ, δ', δ'', etc., les angles que les perpendiculaires CD, CD', CD'', etc., aux plans de ces momens, font avec un même axe CE; par Q, Q', Q'', etc., les projections de P, P', P'', etc., sur le plan mené par le point C et perpendiculaire à cet axe; et par K, K', K'', etc., les projections de H, H', H'', etc., sur ce même plan. Nous aurons

$$\text{K} = \text{H} \cos \delta, \ \text{K}' = \text{H}' \cos \delta', \ \text{K}'' = \text{H}'' \cos \delta'', \text{etc.}$$

Si l'on voulait seulement connaître les aires des projections d'après celles des surfaces projetées, il faudrait considérer les inclinaisons δ, δ', δ'', etc.,

comme des angles aigus; mais dans les usages que nous ferons des projections des momens, nous regarderons ces angles comme aigus ou obtus, ou, autrement dit, nous prendrons pour les droites CD, CD', CD'', etc., les parties des perpendiculaires aux plans des momens H, H', H'', etc., qui font des angles aigus ou obtus avec l'axe CE, selon que les projections Q, Q', Q'', etc., des forces P, P', P'', etc., tendront à faire tourner autour du point C, dans un sens convenu, ou dans le sens opposé. Ainsi, dans la figure, les angles DCE, D'CE, D''CE, étant aigus, et les angles D'''CE, D^{IV}CE, etc., étant obtus, cela suppose que les forces Q, Q', Q'', tendent à faire tourner dans un même sens, et les forces Q''', Q^{IV}, etc., dans le sens opposé. Les droites CD'' et CD''' étant le prolongement l'une de l'autre, cela signifie que les forces P'' et P''' sont comprises dans un même plan passant par le point C, mais qu'elles tendent, ainsi que leurs projections Q'' et Q''', à faire tourner en des sens opposés.

En appelant S la somme des valeurs positives ou négatives de K, K', K'', etc., nous aurons

$$S = H \cos \delta + H' \cos \delta' + H'' \cos \delta'' + \text{etc.};$$

abstraction faite du signe, S sera la somme des momens des forces Q, Q', Q'', etc., qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner dans le sens opposé; d'après le théorème du n° 47, la quantité $\pm$ S exprimera donc le moment de leur résultante qui tendra à faire tourner dans le sens des forces qui répondent aux angles aigus δ, δ', δ'', ou aux angles obtus δ''', δ^{IV}, etc., selon que la valeur précédente de S sera positive ou négative.

Si l'on change à la fois toutes les droites CD, CD', CD'', etc., dans leurs prolongemens, les angles δ, δ', δ'', etc., se changeront dans leurs suppléments, et S deviendra — S. Il en sera de même lorsqu'on remplacera l'axe CE par son prolongement CE'.

La somme S, comme chacune de ses parties, sera indépendante de la position du point C sur l'axe CE; elle ne dépendra que du système des forces P, P', P'', etc., de la position de cet axe et de sa direction perpendiculaire au plan de projection. Dorénavant nous appellerons cette quantité S le moment des forces P, P', P'', etc., par rapport à l'axe CE.

274. D'après cette définition, les trois quantités L, M, N, du n° 261, seront les momens des forces P, P', P'', etc., par rapport aux axes des coordonnées positives de leurs points d'application.

Pour le faire voir, soit Q la projection de la force P sur le plan des x et y, et q la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur sa direction, de sorte que son moment par rapport à ce point ait Qq pour valeur. Supposons que la force Q agisse de A vers B (fig. 69), et que AC et AD soient les coordonnées x et y de son point d'application A, rapportées aux axes rectangulaires Ox et Oy. Soient aussi λ et μ les angles BAC' et BAD' que fait la force Q avec les prolongemens de x et y; les composantes dirigées suivant AC' et AD' seront $Q \cos \lambda$ et $Q \cos \mu$, et leurs momens par rapport au point O, $yQ \cos \lambda$ et $xQ \cos \mu$; d'après la figure, elles tendront à faire tourner en sens contraire l'une de l'autre, et la force Q, dans le sens de $Q \cos \mu$; on aura donc

$$Qq = xQ \cos \mu - yQ \cos \lambda.$$

En examinant les différentes positions que peut avoir le point A, et les diverses directions qu'on peut supposer à la force Q, il est aisé de voir que cette équation subsistera quels que soient les signes de x, y, $\cos \lambda$, $\cos \mu$, pourvu que la force Q, transportée au point E ou F, où sa direction rencontre l'axe des x ou des y, tende à faire tourner l'axe Ox des x positives, dans l'angle des x et y positives, et, conséquemment, l'axe Oy des y positives, en dehors de cet angle, comme cela est indiqué par les flèches s et s'. Si le contraire avait lieu, c'est-à-dire, si la force Q, ainsi transportée, tendait à faire tourner l'axe des y positives, dans l'angle des x et y positives, et, par conséquent, l'axe des x positives, en dehors de cet angle, on aurait

$$Qq = yQ \cos \lambda - xQ \cos \mu,$$

quels que soient aussi les signes de x, y, $\cos \lambda$, $\cos \mu$.

Il suit de là que si S est le moment des forces P, P', P'', etc., par rapport à l'axe des z positives, et que l'on regarde les angles δ, δ', δ'', etc., du numéro précédent, comme aigus ou obtus, selon que les projections Q, Q', Q'', etc., de ces forces tendent à faire tourner l'axe des z positives, dans l'angle des coordonnées x et y positives, ou en dehors de cet angle, on aura

$$S = Q\,(x \cos \mu - y \cos \lambda) + Q'\,(x' \cos \mu' - y' \cos \lambda') + Q''\,(x'' \cos \mu'' - y'' \cos \lambda'') + \text{etc.};$$

x', y', λ', μ'; x'', y'', λ'', μ''; etc., étant ce que deviennent x, y, λ, μ, relativement aux forces Q', Q'', etc.

Soient, de plus, α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; etc., les angles que font les directions des forces, P, P', P'', etc., avec des parallèles aux axes des x, y, z; on aura

$$Q = P \sin \gamma, \qquad Q' = P' \sin \gamma', \qquad Q'' = P'' \sin \gamma'', \text{ etc.},$$
$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \lambda, \ \cos \alpha' = \sin \gamma' \cos \lambda', \ \cos \alpha'' = \sin \gamma'' \cos \lambda'', \text{ etc.},$$
$$\cos \beta = \sin \gamma \cos \mu, \ \cos \beta' = \sin \gamma' \cos \mu', \ \cos \beta'' = \sin \gamma'' \cos \mu'', \text{ etc.};$$

et d'après ces valeurs, celle de S coïncidera avec la quantité L du n° 261. Ainsi L est le moment des forces P, P′, P″, etc., par rapport à l'axe des z positives; et selon qu'il est positif ou négatif, ce système de forces tend à faire tourner le plan des x et z positives autour de cet axe, dans l'angle trièdre des coordonnées positives, ou en dehors de cet angle.

Maintenant, si l'on substitue respectivement les axes des z, x, y, positives, à ceux des x, y, z, positives, L se changera dans M; il s'ensuit donc que M est le moment des forces P, P′, P″, etc., par rapport à l'axe des y positives, et que, selon qu'il sera positif ou négatif, ce système de forces tendra à faire tourner le plan des z et y positives autour de cet axe, dans l'angle trièdre des coordonnées positives, ou en dehors de cet angle. Cela fait, si l'on remplace de même les axes des z, x, y, positives, par ceux des y, z, x, positives, M se changera en N; par conséquent, N sera le moment des forces P, P′, P″, etc., par rapport à l'axe des x positives; et suivant qu'il sera positif ou négatif, ce système de forces tendra à faire tourner le plan des y et x positives autour de cet axe, dans l'angle des coordonnées positives, ou en dehors de cet angle trièdre.

Les trois quantités L, M, N, sont donc, comme on l'a dit, les momens d'un même système de force par rapport aux trois axes des coordonnées positives de leurs points d'application; et les signes de leurs valeurs, telles qu'elles sont écrites dans le n° 261, répondent à un sens de rotation connu, autour de chaque axe supposé fixe.

275. La première valeur de Qq du numéro précédent, est la même chose que

$$Qq = xP \cos \beta - Py \cos \alpha.$$

En appelant H le moment de P par rapport à l'origine des coordonnées, et δ l'angle compris entre une partie de la perpendiculaire au plan de ce moment et l'axe des z positives, on aura donc (n° 272)

$$H \cos \delta = P(x \cos \beta - y \cos \alpha);$$

ce qui suppose que cette partie de la perpendiculaire au plan de H, soit celle qui fait un angle aigu ou obtus avec l'axe des z positives, selon que la quantité comprise entre les parenthèses est positive ou négative.

Soient δ_1 et δ_2 les angles que fait la même partie de cette perpendiculaire avec les axes des y et des x positives; on aura de même

$$H \cos \delta_1 = P(z \cos \alpha - x \cos \gamma),$$
$$H \cos \delta_2 = P(y \cos \gamma - z \cos \beta).$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$(x \cos \beta - y \cos \alpha)^2 + (z \cos \alpha - x \cos \gamma)^2 + (y \cos \gamma - z \cos \beta)^2 = p^2,$$

et qu'on regarde p comme une quantité positive, il en résultera

$$H = Pp,$$

à cause de

$$\cos^2 \delta + \cos^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_2 = 1;$$

par conséquent, on aura

$$\cos \delta = \frac{1}{p}(x \cos \beta - y \cos \alpha),$$

$$\cos \delta_1 = \frac{1}{p}(z \cos \alpha - x \cos \gamma),$$

$$\cos \delta_2 = \frac{1}{p}(y \cos \gamma - z \cos \beta),$$

pour déterminer sans ambiguité les trois angles δ, δ_1, δ_2. L'angle δ sera aigu ou obtus, comme on l'a supposé, selon le signe de $x \cos \beta - y \cos \alpha$, et les angles δ_1 et δ_2 selon les signes de $z \cos \alpha - x \cos \gamma$ et $y \cos \gamma - z \cos \beta$.

On vérifiera aisément ces formules. En effet, représentons l'équation du plan qui comprend l'origine des coordonnées et la force P, par

$$Au + Bv + Cw = 0;$$

u, v, w, étant les coordonnées courantes. Les coordonnées du point d'application de cette force étant x, y, z, il faudra qu'on ait

$$Ax + By + Cz = 0;$$

de plus les équations d'une droite menée par l'origine des coordonnées et parallèle à cette force, seront

$$v \cos \alpha = u \cos \beta, \qquad w \cos \alpha = u \cos \gamma;$$

et comme cette parallèle est aussi comprise dans le plan que l'on considère, il en résultera cette seconde équation de condition :

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0.$$

De ces deux équations, on tire

$$C = \frac{A(x \cos \beta - y \cos \alpha)}{y \cos \gamma - z \cos \beta},$$

$$B = \frac{A(z \cos \alpha - x \cos \gamma)}{y \cos \gamma - z \cos \beta};$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation du plan, elle devient

$$u(y \cos \gamma - z \cos \beta) + v(z \cos \alpha - x \cos \gamma) + w(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0.$$

Or, d'après les formules connues (n° 17), les cosinus des angles δ, δ_1, δ_2, que fait la normale à ce plan avec les axes des u, v, w, qui sont aussi ceux des x, y, z, auront pour valeurs les formules qu'il s'agissait de vérifier.

En vertu de l'équation $H = Pp$, la quantité p est la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la direction de la force P. C'est aussi ce qui se vérifiera sansdifficulté, en prenant le pied de cette perpendiculaire pour le point d'application de P; car, si l'on appelle r le rayon vecteur de ce point, qui sera alors cette perpendiculaire, et λ, μ, ν, les angles que fait sa direction avec les axes des x, y, z, on aura

$$x = r\cos\lambda, \quad y = r\cos\mu, \quad z = r\cos\gamma;$$

et en substituant ces valeurs dans celle de p^2, et ayant égard aux équations (nos 6 et 9)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$
$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

on trouvera

$$p^2 = r^2 \text{ ou } p = r.$$

276. Les momens d'un même système de forces par rapport à différens axes, jouissent de propriétés remarquables qui sont une conséquence immédiate de celles des projections des surfaces planes sur différens plans, que nous allons maintenant exposer.

Soient Ox, Oy, Oz, trois axes rectangulaires qui se coupent en un point O (fig. 70). Menons par ce point trois autres axes Ox', Oy', Oz', aussi rectangulaires. Pour déterminer les directions de ces nouveaux axes par rapport aux premiers, faisons

$$xOx' = \alpha, \quad yOx' = \beta, \quad zOx' = \gamma,$$
$$xOy' = \alpha', \quad yOy' = \beta', \quad zOy' = \gamma',$$
$$xOz' = \alpha'', \quad yOz' = \beta'', \quad zOz' = \gamma'';$$

et considérons α, β, γ, etc., comme étant neuf angles donnés, aigus ou obtus. Leurs cosinus seront liés entre eux par six équations. En considérant successivement les trois droites Ox', Oy', Oz', on aura d'abord

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1,\\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1,\\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1;\end{aligned}\right\}(1)$$

et à cause que $x'Oy'$, $x'Oz'$, $y'Oz'$, sont des angles droits, on aura aussi

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' &= 0,\\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' &= 0,\\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' &= 0.\end{aligned}\right\}(2)$$

Les neuf angles α, α', α'', etc., détermineront réciproquement les directions des premiers axes Ox, Oy, Oz, par rapport aux seconds Ox', Oy', Oz'. De cette manière on aura d'abord

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' &= 1,\\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' &= 1,\\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' &= 1,\end{aligned}\right\}(3)$$

et, en outre,

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' &= 0,\\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' &= 0,\\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' &= 0;\end{aligned}\right\}(4)$$

équations qui seront équivalentes aux six précédentes, et pourront leur être substituées.

Soit a l'aire d'une surface plane terminée par un contour quelconque, et située dans un plan passant par le point O; par ce point, élevons sur ce plan une perpendiculaire OD, et faisons

$$xOD = q, \quad yOD = q', \quad zOD = q''.$$

Ces trois angles aigus ou obtus, détermineront la direction de OD et celle du plan a; s'ils se changent tous les trois dans leurs supplémens, la droite OD se changera dans son prolongement, et le plan de a restera le même.

Appelons aussi p, p', p'', les projections de a sur les plans yOz, xOz, xOy, nous aurons (n° 10)

$$p = a\cos q, \quad p' = a\cos q', \quad p'' = a\cos q''.$$

Soit, enfin, b la projection de a sur un quatrième plan, qui sera, si l'on veut, le plan $y'Oz'$, et c l'angle $x'OD$; on aura aussi

$$b = a\cos c,$$

et, d'après la formule (2) du n° 9,

$$\cos c = \cos q\cos\alpha + \cos q'\cos\beta + \cos q''\cos\gamma; \quad (5)$$

d'où l'on conclut

$$b = p\cos\alpha + p'\cos\beta + p''\cos\gamma; \quad (6)$$

équation qui fera connaître la projection d'une aire a sur un plan quelconque, lorsque l'on connaîtra ses projections sur trois plans rectangulaires.

Comme l'équation (5) n'a lieu qu'en tenant compte des signes des cosinus qu'elle renferme, il s'ensuit qu'il faut de même avoir égard, dans l'équation (6), aux signes des projections p, p', p'', et les considérer comme des quantités positives ou négatives, selon que la perpendiculaire OD au plan de a fait des angles aigus ou obtus avec les axes Ox, Oy, Oz.

277. Cela posé, considérons de même un nombre quelconque d'aires planes a, a', a'', etc., situées dans des plans différens; projetons toutes ces aires sur les trois plans xOy, xOz, yOz et ajoutons ensemble les projections faites sur un même plan, et ayant égard à leurs signes, ainsi qu'il vient d'être dit. Soient A, A', A'', les trois sommes qu'on obtiendra de cette manière; soit aussi B la somme des projections de a, a', a'', etc., sur le plan $y'Oz'$; en formant pour chacune de ces aires, une

équation semblable à l'équation (6), et ajoutant ensuite toutes ces équations, on aura

$$B = A \cos \alpha + A' \cos \beta + A'' \cos \gamma.$$

Représentons encore par B' la somme des projections de a, a', a'', etc., sur le plan $x'Oz'$. Il est évident que la valeur de B' se déduira de celle de B, par la substitution de l'axe Oy' perpendiculaire à ce plan, à l'axe Ox' perpendiculaire au plan $y'Oz'$, c'est-à-dire, en mettant dans la formule précédente α', β', γ', au lieu de α, β, γ; ce qui donne

$$B' = A \cos \alpha' + B \cos \beta' + C \cos \gamma'.$$

Si l'on représente de même par B'' la somme des projections de a, a', a'', etc., sur le plan $x'Oy'$, sa valeur se déduira de celle de B, en y substituant α'', β'', γ'', au lieu de α, β, γ; d'où il résultera

$$B'' = A \cos \alpha'' + B \cos \beta'' + C \cos \gamma''.$$

De ces valeurs de B, B', B'', et en ayant égard aux équations (3) et (4), on tire réciproquement

$$\left.\begin{aligned} A &= B \cos \alpha + B' \cos \alpha' + B'' \cos \alpha'', \\ A' &= B \cos \beta + B' \cos \beta' + B'' \cos \beta'', \\ A'' &= B \cos \gamma + B' \cos \gamma' + B'' \cos \gamma''. \end{aligned}\right\} (7)$$

Ces différentes équations nous montrent que les projections des surfaces planes sur différens plans, suivent les mêmes lois que celles des lignes droites sur des droites différentes.

278. En faisant la somme des carrés des valeurs de B, B', B'', il vient, d'après les équations (3) et (4),

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2 ; \quad (8)$$

ce qui fait voir que la somme des carrés de ces trois quantités B, B', B'', ne varie pas avec la direction des trois plans rectangulaires de projection auxquels elles se rapportent. Dans le cas particulier où toutes les aires a, a', a'', etc., sont dans un même plan, cette somme n'est autre chose que le carré de l'aire totale $a + a' + a'' +$ etc.; et si l'on prend ce plan pour celui des axes Oy et Oz, par exemple, on aura évidemment

$$A = a + a' + a'' + \text{etc.}, \quad A' = 0, \quad A'' = 0.$$

Cherchons actuellement ce que la même somme représente dans le cas général où les aires a, a', a'', etc., sont situées dans des plans quelconques.

L'équation (8) donne

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2} ;$$

la somme B, qui varie en passant d'un plan de projection à un autre, est donc la plus grande possible, quand on a $B' = 0$ et $B'' = 0$; et alors elle est égale à $\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}$. Ainsi, la quantité constante dont il s'agit représente, dans le cas général, la plus grande somme des projections sur un même plan, des aires planes que l'on considère dans l'espace.

279. Le plan $y'Oz'$ qui répond à cette plus grande projection, jouit de propriétés importantes en mécanique, que nous ferons connaître dans la suite de ce traité. Sa position est facile à déterminer, d'après les équations $B' = 0$ et $B'' = 0$, qui le caractérisent.

En effet, les équations (7) se réduisent alors à

$$A = B \cos \alpha, \quad A' = B \cos \beta, \quad A'' = B \cos \gamma ;$$

d'où l'on tire

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}.$$

Lors donc que l'on connaîtra les sommes A, A', A'', des projections sur trois plans rectangulaires yOx, zOz, xOy, choisis arbitrairement, on pourra immédiatement déterminer la direction du plan $y'Oz'$ de la plus grande projection, au moyen des trois angles α, β, γ, qui se rapportent à la droite Ox' perpendiculaire à ce plan. Quant à sa position absolue dans l'espace, il est évident qu'elle est indéterminée; car les projections de chacune des aires a, a', a'', etc., et, par conséquent, la somme de ces projections, sont les mêmes sur tous les plans parallèles.

280. La somme des projections des aires a, a', a'', etc., est égale sur tous les plans également inclinés sur celui de la plus grande projection.

Pour le démontrer, prenons le plan perpendiculaire à la droite OD; désignons par C la somme des projections de a, a', a'', etc., sur ce plan; soient toujours q, q', q'', les angles que cette droite OD fait avec les axes Ox, Oy, Oz, et c l'angle x'OD qui mesure l'inclinaison de ce plan sur celui de la plus grande projection. On aura, d'après ce qu'on vient de trouver (n° 277),

$$C = A \cos q + A' \cos q' + A'' \cos q''.$$

En substituant $B \cos \alpha$, $B \cos \beta$, $B \cos \gamma$, à la place de A, A', A'', on aura donc

$$C = B (\cos \alpha \cos q + \cos \beta \cos q' + \cos \gamma \cos q''),$$

ou bien, en vertu de la formule (5), $C = B \cos c$, et en mettant pour B sa valeur,

$$C = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2} \cos c ;$$

par conséquent, la valeur de C est la même pour tous les plans qui font le même angle c avec le plan $y'Oz'$ de la plus grande projection.

Cette valeur diminue à mesure que l'angle c approche de 90°; elle est nulle pour tous les plans perpendiculaires à $y'Oz'$.

281. Pour appliquer maintenant à la théorie des moments ces propositions relatives aux projections

des surfaces planes, il suffit de supposer que les aires a, a', a'', etc., sont les doubles des triangles qui ont pour soumet commun le point O, et pour bases les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les forces P, P', P'', etc., que l'on a considérées précédemment. Leurs momens L, M, N, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, des coordonnées positives de leurs points d'application (n° 274), seront alors les sommes des projections de a, a', a'', etc., sur les plans xOy, zOx, yOz; et voici les conséquences qui résultent des propositions qu'on vient de démontrer :

1° En appelant E le moment des forces P, P', P'', etc., par rapport à un axe passant par le point O, qui fait avec les axes Ox, Oy, Oz, des angles ε, ε', ε'', aigus ou obtus, on aura

$$E = N \cos \varepsilon + M \cos \varepsilon' + L \cos \varepsilon''.$$

2° Parmi toutes les directions autour du point O, de l'axe du moment E, il en est une pour laquelle ce moment est le plus grand possible et égal à $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$. Par rapport à tout autre axe, passant toujours par le point O et perpendiculaire à celui du plus grand moment, le moment E est zéro, et il est égal à $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \cos \delta$, relativement à un axe qui fait l'angle δ avec celui du plus grand moment.

3° Enfin, si l'on appelle α, β, γ, les angles que fait l'axe du plus grand moment passant par le point O, avec les axes Ox, Oy, Oz, des momens N, M, L, et que l'on désigne par G la grandeur de ce plus grand moment, on aura

$$\cos \alpha = \frac{N}{G}, \quad \cos \beta = \frac{M}{G}, \quad \cos \gamma = \frac{L}{G},$$

et, en même temps,

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

d'où il résulte qu'en prenant sur les axes Ox, Oy, Oz, à partir du point O, des droites proportionnelles aux momens N, M, L, et achevant le parallélipipède dont ces droites seront les trois côtés adjacens, la longueur de sa diagonale représentera la grandeur du plus grand moment, et cette droite sera l'axe de ce moment principal.

Ces théorèmes remarquables sont dus à Euler. Ils établissent une parfaite analogie entre la composition des momens et celle des forces; analogie qui tient à ce que les forces étant représentées par des lignes droites, les momens sont exprimés par des surfaces planes, qui se projettent sur des plans différens, de la même manière que les lignes sur des droites différentes (n° 277).

282. Le point O et le système des forces P, P', P'', etc., étant donnés, j'appellerai *moment principal* de ces forces, leur plus grand moment G. Si l'on transporte toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes, en ce point O, elles auront une résultante que je désignerai par R, et dont les composantes, suivant les axes Ox, Oy, Oz, seront les trois quantités X, Y, Z, du n° 261. La considération de cette résultante et du moment principal, fournit un énoncé très simple des résultats du chapitre précédent.

Pour l'équilibre des forces P, P', P'', etc., appliquées à un corps solide entièrement libre, il suffira que la résultante R et le moment principal G soient égaux à zéro; car, à cause de

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

les équations $R = 0$ et $G = 0$, entraîneront les six équations d'équilibre du n° 261.

On en peut conclure que pour qu'un système de forces fasse équilibre à un autre, il est nécessaire et il suffit : 1° que les résultantes R qui ont lieu dans ces deux systèmes soient égales et contraires; 2° que, pour un même point O, leurs momens principaux soient égaux et répondent à des axes dirigés en sens contraire, ou dont l'un soit le prolongement de l'autre. La résultante R et sa direction, le moment principal et la direction de son axe, resteront les mêmes, dans toutes les transformations qu'on peut faire subir à un même système de forces, et, généralement, pour deux systèmes de forces équivalens.

Soient a, b, c, les angles que la force R fait avec les axes Ox, Oy, Oz: on aura

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Soient aussi ω l'angle compris entre sa direction et l'axe du moment principal; α, β, γ, étant les angles que fait cet axe avec Ox, Oy, Oz, nous aurons

$$\cos \omega = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\cos \omega = \frac{XN + YM + ZL}{RG}.$$

Il s'ensuit donc que la condition d'une résultante unique qui est exprimée (n° 263) par l'équation

$$XN + YM + ZL = 0,$$

consiste en ce que l'axe du moment principal G et la direction de la résultante R doivent se couper à angle droit. C'est ce qu'on vérifie, en effet, en observant que si les forces P, P', P'', etc., dans leur véritable position, ont une résultante unique, cette force doit être égale et parallèle à R, et que son moment par rapport au point O, doit aussi être le moment principal G; en sorte que l'axe du moment principal est alors perpendiculaire à cette résultante transportée au point O parallèlement à elle-même; mais ce raisonnement ne suffirait pas pour prouver que réciproquement, quand l'équation précédente a lieu, les forces données ont une résultante unique.

283. Je transporte le point O en un autre point quelconque que j'appelle O_1 ; je désigne par x_1, y_1, z_1, les coordonnées de O_1, rapportées aux axes Ox, Oy, Oz, et par L_1, M_1, N_1, ce que deviennent L, M, N, relativement à ce point O_1 : les valeurs de ces dernières quantités se déduiront des premières (n° 561), en y mettant $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, à la place de x, y, z; et il en résultera

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L + Xy_1 - Yx_1, \\ M_1 &= M + Zx_1 - Xz_1, \\ N_1 &= N + Yz_1 - Zy_1. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Ces formules montrent que quand P, P', P'', etc., se réduisent à des forces égales, parallèles et dirigées en sens contraire, mais non directement opposées, auquel cas on a $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, les quantités L_1, M_1, N_1, sont indépendantes des coordonnées du point O_1 ; en sorte que la grandeur du moment principal et la direction de son axe ne varient pas avec la position de ce point. En effet, quelque part que soit placé le point O_1, il est évident que l'axe du moment principal des deux forces parallèles qu'on peut substituer aux forces données P, P', P'', etc., est la perpendiculaire à leur plan ; et nous savons d'ailleurs (n° 48) que la somme des momens de ces deux forces qui sera le moment principal des forces données, est une quantité constante.

Dans tout autre cas, le moment principal change avec la position du point O_1 ; et l'on peut demander quel doit être ce point, ou ces points, s'il y en a plusieurs, pour lesquels ce moment est un *minimum*. En le désignant généralement par G_1, c'est-à-dire, en faisant

$$G_1^2 = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2,$$

nous aurons

$$G_1^2 = (L + Xy_1 - Yx_1)^2 + (M + Zx_1 - Xz_1)^2 + (N + Yz_1 - Zy_1)^2.$$

Si l'on égale à zéro ses trois différences partielles par rapport à x_1, y_1, z_1, afin de déterminer sa valeur *minima*, et si l'on observe que

$$R^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

on obtient trois équations qu'il est facile d'écrire sous cette forme :

$$\begin{aligned} R^2x_1 &= X(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1) + YL - ZM, \\ R^2y_1 &= Y(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1) + ZN - XL, \\ R^2z_1 &= Z(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1) + XM - YN. \end{aligned}$$

Or, si l'on ajoute ces trois équations après les avoir multipliées par X, Y, Z, on trouve une équation identique; il s'ensuit donc que l'une d'elles est une suite des deux autres ; et comme les coordonnées x_1, y_1, z_1, ne s'y montrent qu'au premier degré, elles appartiennent à une ligne droite qui est le lieu des centres des momens, par rapport auxquels le moment principal est au *minimum*. Il n'est pas nécessaire d'examiner lequel a lieu du *maximum* ou du *minimum*; car il est évident que la valeur de G_1 croît indéfiniment avec les variables x_1, y_1, z_1, et n'est pas susceptible de *maximum*.

284. En éliminant la quantité $Xx_1 + Yy_1 + Zz_1$, entre les équations précédentes, prises successivement deux à deux, on trouve

$$\left.\begin{aligned} Xy_1 - Yx_1 + L &= \frac{Z(NX + MY + LZ)}{R^2}, \\ Zx_1 - Xz_1 + M &= \frac{Y(NX + MY + LZ)}{R^2}, \\ Yz_1 - Zy_1 + N &= \frac{X(NX + MY + LZ)}{R^2}, \end{aligned}\right\} (b)$$

équations qui appartiendront aux projections sur les trois plans des coordonnées du lieu des centres des momens principaux *minima*.

On en déduit

$$G_1 = \frac{NX + MY + LZ}{R}, \qquad (c)$$

pour la valeur du moment principal *minimum*, qui est ainsi la même pour tous les centres O_1.

Si l'on appelle α_1, β_1, γ_1, les angles que l'axe du moment G_1 fait avec des parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, menées par le point O_1, on aura

$$\cos\alpha_1 = \frac{N_1}{G_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{M_1}{G_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{L_1}{G_1},$$

quel que soit le centre des momens; et, d'après les équations (a), (b), (c), il en résultera, en particulier, pour un point O_1 appartenant à la droite déterminée par les équations (b),

$$\cos\alpha_1 = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta_1 = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{Z}{R};$$

ce qui montre que les axes de tous les momens principaux *minima*, dont la valeur commune est donnée par la formule (c), sont parallèles entre eux et à la direction de la force R.

Quand les forces données ont une résultante unique, il est évident que la plus petite valeur de G_1 doit avoir lieu lorsque le point O_1 est pris sur sa direction; ce qui rend cette valeur égale à zéro. Réciproquement, si la valeur de G_1 est nulle par rapport à un point O_1, on en conclura que les forces données P, P', P'', etc., ont une résultante unique, passant par ce point; car si elles se réduisaient à deux forces non comprises dans un même plan, on pourrait faire passer l'une d'elles par le point O_1, et réduire leur moment principal à celui de l'autre force, lequel ne serait pas zéro, contre l'hypothèse. On conclut de là que la condition nécessaire et suffisante pour que les forces

données aient une résultante unique, consiste en ce que leur moment principal puisse être égal à zéro. Ce moment étant alors un *minimum*, la condition dont il s'agit sera exprimée par l'équation

$$LZ + MY + NX = 0,$$

d'après la formule (*o*); et le point O, auquel il se rapporte, appartenant à cette résultante, les équations de la droite suivant laquelle elle est dirigée, seront

$$Xy_1 - Yx_1 + L = 0,$$
$$Zx_1 - Xz_1 + M = 0,$$
$$Yz_1 - Zy_1 + N = 0,$$

en vertu des équations (*b*). Ces résultats coïncident avec ceux du n° 263 qu'on a trouvés par d'autres considérations.

CHAPITRE III.

EXEMPLES DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS FLEXIBLE.

§ 1er. *Équilibre du polygone funiculaire.*

285. On appelle, en général, *machine funiculaire*, tout assemblage de cordes liées entre elles par des nœuds fixes, ou simplement passées dans des anneaux qui peuvent couler le long de ces cordes. Le nombre des cordons qui viennent aboutir à un même nœud peut être quelconque; mais pour simplifier la question, nous supposons que chaque nœud n'assemble jamais que trois cordons; et, en premier lieu, nous exclurons les anneaux mobiles.

Prenons donc une corde parfaitement flexible et d'une longueur quelconque, dont A et B (fig. 71) soient les deux extrémités. Soient M, M', M'', etc., différens point de cette corde; attachons à ces points des cordons MC, M'C', M''C'', etc., suivant lesquels agiront des forces données P, P', P'', etc.; appliquons aussi au point M une force donnée H, agissant dans la direction du cordon MA, et au dernier des points M, M', M'', etc., une autre force donnée K, dirigée vers le point B. Dans l'état d'équilibre, cette corde flexible formera un polygone dont les sommets seront les points A, M, M', M'',... B, et que nous appellerons spécialement un *polygone funiculaire*. Il s'agit de trouver les conditions que les forces données H, P, P', P'',... K, doivent remplir pour que cet équilibre soit possible, et de déterminer la figure du polygone qui convient à cet état.

Pour trouver ces conditions, je pars de ce principe évident que si l'équilibre existe, chacun des cordons MM', M'M'', etc., doit être tiré, à ses deux extrémités, par des forces égales, dirigées suivant ses prolongemens; car si ces deux forces n'avaient pas la même direction que le cordon, rien ne les empêcherait de le faire tourner; et si elles n'étaient pas égales et contraires, elles feraient avancer le cordon suivant sa direction.

Il s'ensuit d'abord que la résultante des deux forces H et P, appliquées au point M, doit coïncider avec le prolongement MD du cordon M'M. On peut donc transporter le point d'application de cette force au point M' situé sur sa direction (n° 41); en la composant ensuite avec la force P', appliquée à ce point, il faudra que cette seconde résultante, qui sera celle des trois forces H, P, P', coïncide avec le prolongement M'D' du cordon M'' M'; et par conséquent, il sera permis de la transporter au point M''. Je prends encore la résultante de cette force et de P'' qui agit en ce même point M''; j'ai, de cette manière, la force qui tire le cordon M''M''' à son extrémité M'', et qui doit être dirigée suivant son prolongement M''D''. Cette force est, comme on voit, la résultante des forces H, P, P', P''; un raisonnement semblable prouverait que la force qui tire le même cordon à son extrémité M''' et qui doit coïncider avec son autre prolongement M'''D''', est la résultante des forces P'''; Piv,..., K; ces deux résultantes sont donc égales et directement opposées; et, conséquemment, la résultante de toutes les forces données H, P, P', P'.... K, doit être égale à zéro. On parviendrait évidemment au même résultat, en considérant les forces qui agissent aux deux extrémités de tout autre côté du polygone.

Ainsi, les forces appliquées au polygone funiculaire doivent être telles qu'en les transportant en un même point parallèlement à elles-mêmes, elles s'y fassent équilibre; ce qui donne, comme on sait, trois équations entre les grandeurs de ces forces et les angles que font leurs directions avec trois axes rectangulaires menés par ce point. Ces équations sont (n° 35)

$$\left.\begin{array}{l} H\cos a + K\cos e + P\cos \alpha + P'\cos \alpha' + \text{etc.} = 0, \\ H\cos b + K\cos f + P\cos \beta + P'\cos \beta' + \text{etc.} = 0, \\ H\cos c + K\cos g + P\cos \gamma + P'\cos \gamma' + \text{etc.} = 0; \end{array}\right\} \quad (a)$$

a, e, α, α', etc., désignant les angles relatifs à l'un des axes; b, f, β, β', etc., les angles relatifs à un autre axe; et c, g, γ, γ', etc., ceux qui répondent au troisième.

286. Lorsque les forces H, P, P', P'',... K, et les directions des cordons par lesquels elles agissent, ne satisferont pas à ces équations, il sera impossible qu'elles se fassent équilibre par le moyen du polygone funiculaire, quelque figure qu'on lui donne; mais toutes les fois que ces équations seront satisfaites, on pourra donner au polygone une figure telle que l'équilibre ait lieu. Les grandeurs et les directions des forces H, P, P', P'',... K, étant données, cette figure est déterminée, et sa construction résulte de la suite de compositions de forces que nous venons d'indiquer.

En effet, connaissant les directions des cordons MA et MC, par lesquels agissent les forces H et P, on déterminera la grandeur et la direction de leur résultante. Sur le prolongement de cette direction, à partir du point M, je porte la longueur donnée du côté MM'; cela fait, j'applique au point M' la résultante de H et P suivant la ligne M'M, et la force P' suivant la direction donnée du cordon M'C'. Je prends la résultante de ces deux forces, et sur le prolongement de sa direction, à partir du point M', je porte la longueur donnée du côté M'M''. Maintenant, je fais au point M'' une construction semblable à celle que je viens d'indiquer pour le point M; j'applique en M'' la dernière résultante sur le côté M''M', et la force P'' suivant la direction donnée du cordon M''C''; je compose ensuite ces deux forces en une seule, et, sur le prolongement de celle-ci, je porte la longueur donnée du côté M''M'.

Je continue ainsi jusqu'à ce que je sois parvenu au dernier des nœuds M, M', M'', etc., qui sera, je suppose, le point M^iv, de sorte que M^iv B soit le dernier côté du polygone. Sa direction est connue, puisqu'elle représente celle de la force extrême K, qui est donnée par hypothèse. Il faudra donc que la direction prolongée de la résultante des deux forces appliquées au point M^iv, suivant le côté M'''M^iv et suivant le cordon M^iv C^iv, coïncide avec la direction donnée du côté M^iv B. C'est, effectivement, ce qui arrivera toujours; car, d'après notre construction, la force dirigée suivant M^iv M''' n'est autre chose que la résultante des cinq forces H, P, P', P'', P''', transportées au point M^iv parallèlement à leurs directions; en la composant avec la force P^iv, dirigée suivant M^iv C^iv, on aura la résultante de toutes les forces données, moins la force K; or, en vertu des équations (a), qu'on suppose satisfaites, cette résultante est égale et directement opposée à la force K (n° 35).

Si l'on mène par le point A, les trois axes auxquels se rapportent les angles a, e, α, α', etc., b, f, β, β', etc., c, g, γ, γ', etc., les coordonnées de chacun des sommets du polygone, rapportées à ces axes, seront les projections sur ces mêmes axes de la partie du polygone comprise depuis le point A jusqu'à ce sommet. On pourrait les calculer, en fonctions de ces angles, des longueurs des côtés du polygone et des forces données; les formules générales que l'on obtiendrait de cette manière serviraient, dans chaque cas, à construire directement tous les sommets du polygone, ou seulement un ou plusieurs de ces points; mais il est plus simple de déterminer successivement, et les uns au moyen des autres, les différens côtés du polygone, ainsi qu'on vient de l'indiquer.

287. Quand les forces données remplissent les conditions exprimées par les équations (a), et qu'on a fait prendre au polygone la figure propre à l'équilibre, l'intensité commune des deux forces égales et contraires qui tirent chacun des côtés suivant son prolongement, est la *tension* que ce cordon éprouve; il est donc important, dans la pratique, de calculer cette tension, et de s'assurer, par l'expérience, qu'elle ne dépasse pas celle qu'un cordon du même diamètre et de la même matière peut supporter sans se rompre.

Or, d'après ce qu'on vient de voir, cette tension variera d'un côté à l'autre du polygone; la tension du côté MM' sera égale à la résultante des forces H et P, ou à celle des forces P', P'', P''',... K; la tension du côté M'M'' sera égale à la résultante des forces H, P, P', ou à celle des forces P'', P''',... K; et ainsi de suite. Il sera donc aisé, dans chaque cas particulier, de déterminer les tensions qu'éprouvent tous les côtés du polygone en équilibre, lorsque les grandeurs et les directions des forces H, P, P', P'',... K, seront toutes données.

Si les points extrêmes A et B du polygone sont fixes, les forces H et K représenteront à la fois les tensions des cordons qui aboutissent à ces points et les pressions que ces points éprouvent. Dans ce cas, les valeurs de H et K, et des angles a, b, c, e, f, g, qui déterminent les directions des deux côtés extrêmes du polygone, ne seront plus données; mais on

aura huit équations pour déterminer ces huit inconnues, savoir, les équations (a), les équations (n° 6) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, $\cos^2 e + \cos^2 f + \cos^2 g = 1$, et trois équations résultant de ce que la position des deux points fixes A et B est donnée. On formera celles-ci en calculant les valeurs des trois coordonnées de l'un de ces points, rapportées à des axes passant par l'autre point, c'est-à-dire, les projections du polygone entier sur ces trois axes, et les égalant aux valeurs données de ces mêmes coordonnées.

La détermination de ces huit inconnues sera généralement très compliquée; mais après que le polygone funiculaire aura pris de lui-même la figure propre à l'équilibre des forces appliquées à ses sommets, on obtiendra sans difficulté les tensions de ses différens côtés; ce qui suffira pour la pratique. Ainsi, en décomposant la force P appliquée au point M en deux autres forces dirigées suivant les prolongemens des côtés AM et MM', les composantes, données immédiatement par la règle du parallélogramme des forces, seront les tensions de ces deux côtés. Celle qui agira suivant le prolongement de AM devra être égale à la force agissant suivant ce premier côté, lorsque le point A sera libre; et quand il sera fixe, elle exprimera la pression exercée sur ce point. Pareillement, les composantes de la force P' suivant les prolongemens de MM' et M'M'', exprimeront la tension de MM', déjà connue par la décomposition de P, et celle du côté adjacent M'M''; et ainsi de suite.

288. Les cordons qui forment les différens côtés d'un polygone funiculaire sont toujours un peu extensibles; chacun d'eux s'allonge d'une petite quantité, en raison de la tension qu'il éprouve dans l'état d'équilibre; et lorsque cette tension est connue, on peut calculer l'allongement correspondant.

En effet, l'expérience prouve que tant que la tension d'un fil homogène et d'une épaisseur constante n'approche pas de la force nécessaire pour le rompre, son allongement est proportionnel à sa longueur et à la tension qu'il éprouve; il varie d'ailleurs, d'un fil à un autre, avec l'épaisseur et la matière du fil. Cela étant, je suppose que l'on attache à un point fixe un fil de la même épaisseur et de la même matière que le cordon AM, et que l'on suspende à son extrémité inférieure un poids donné Π, très grand par rapport à celui du fil. Soient l et $l(1+\alpha)$ ses longueurs avant et après la suspension du poids Π; cette quantité α sera une fraction très petite, indépendante de l et proportionnelle à Π, en négligeant le poids du fil; en sorte que si, dans une autre expérience, les trois quantités l, α, Π, sont l', α', Π', on aura

$$\alpha' = \frac{\alpha \Pi'}{\Pi},$$

quels que soient l et l'. Or, il est évident qu'un fil attaché à un point fixe et tiré à son autre extrémité par une force dirigée suivant son prolongement, est dans le même état que s'il était tiré par cette même force suivant ses deux prolongemens. Si donc on appelle T la tension du cordon AM, et si l'on suppose qu'il se soit allongé dans le rapport de $1+r$ à l'unité, on aura

$$r = \frac{\alpha T}{\Pi},$$

pour déterminer cet allongement; et il en sera de même pour tous les autres côtés du polygone.

289. Soit que les points extrêmes A et B du polygone soient fixes, ou qu'ils soient libres, si l'un ou plusieurs des nœuds M, M', M'', etc., sont remplacés par des anneaux, cette circonstance donnera lieu à de nouvelles conditions d'équilibre. Supposons, par exemple, que M'' soit un anneau mobile qui puisse glisser le long du cordon M'M''M'''; il est clair que dans ce mouvement la somme des distances M'M'' et M''M''', du point M'' aux points M' et M''', restera constante. Or, si l'équilibre existe, cet état ne sera pas troublé en rendant fixes ces deux derniers points; mais alors le point M'' sera dans le même cas que s'il était astreint à demeurer sur la surface d'un ellipsoïde de révolution, dont M' et M''' sont les deux foyers, et dont le grand axe est égal à la longueur donnée du cordon M'M''M'''; donc ce point ne peut rester en équilibre (n° 36), à moins que la force P'' qui lui est appliquée ne soit perpendiculaire à cette surface; d'où il suit, d'après une propriété connue de l'ellipse, que la direction de cette force doit couper en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs M''M' et M''M'''.

Lors donc qu'en exécutant la construction du n° 286, on sera parvenu à un anneau mobile tel que M'' et que l'on aura pris la résultante des deux forces dirigées suivant M''M' et M''C'', dont le prolongement sera le côté M''M'''; si l'on trouve que les angles C''M''M' et C''M''M''' ne sont pas égaux entre eux, il en faudra conclure que l'équilibre n'existe pas. En général, il faudra que la direction du cordon M''C'', attaché à un anneau mobile, ne soit pas donnée d'avance, afin qu'on puisse, en la déterminant d'une manière convenable, remplir la condition de l'égalité des deux angles M'M''C'' et M'''M''C''.

Observons que dans l'état d'équilibre, les tensions des deux côtés adjacens à un anneau mobile seront égales entre elles; cela résulte de ce que ces deux côtés font des angles égaux avec la direction de la force appliquée à cet anneau, et que leurs tensions sont les composantes de cette force suivant leurs propres directions; mais cette égalité de tension peut aussi être considérée comme évidente en elle-même, puisque les deux côtés le long desquels l'anneau peut glisser ne forment qu'un cordon, qui doit nécessairement éprouver la même tension dans toute son étendue.

290. Ce que nous disons à l'égard d'un anneau obligé de glisser le long d'un fil considéré comme inextensible et parfaitement flexible, peut s'étendre à tous les points d'un système de points matériels en équilibre. Quelle que soit la liaison de ces points entre eux, on ne troublera pas cet équilibre en fixant tous les points du système, excepté un seul. Or, si la liaison de ce point avec les autres est telle qu'il puisse encore décrire une surface ou seulement une ligne courbe autour de ces points fixes, il est évident que le point mobile sera dans le même cas que si la surface ou la ligne courbe existait réellement; par conséquent, la direction de la force qui lui est appliquée doit être normale à cette surface ou à cette ligne.

Concluons donc que dans tout système de points matériels en équilibre, la force appliquée à chacun de ces points est perpendiculaire à la surface ou à la ligne sur laquelle ce point serait obligé de rester, si tous les autres points auxquels il est lié étaient regardés, pour un moment, comme des points fixes.

Quand cette condition, relative à la direction des forces et à la liaison des parties du système, n'est pas remplie, on peut être certain que l'équilibre n'existe pas; mais elle ne suffit pas à elle seule pour assurer l'équilibre du système.

291. Si toutes les forces qui agissent sur un polygone funiculaire suspendu aux deux points fixes A et B, sont des poids donnés, il résulte de la construction du n° 286, que ce polygone tout entier sera contenu dans le plan vertical passant par ces deux points; et cela est d'ailleurs évident en soi-même, puisqu'il n'y aurait aucune raison pour qu'il s'écartât de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. En prenant alors la perpendiculaire à ce plan pour l'axe auquel répondent c, g, γ, γ', etc., tous ces angles seront droits, et la troisième équation (a) disparaîtra; les deux autres se réduiront à

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}\cos a + \mathrm{K}\cos e &= 0, \\ \mathrm{H}\cos b + \mathrm{K}\cos f + \Pi &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

en supposant que les angles a, e, a', etc., répondent à un axe horizontal, et les angles b, f, c, c', etc., à un axe dirigé dans le sens de la pesanteur, et en représentant par Π la somme des poids P, P', P'', etc., appliqués au polygone.

L'équilibre de ce polygone ne sera pas troublé si l'on rend sa forme invariable; par conséquent, la force Π devra être égale et directement opposée à la résultante des forces H et K. En vertu des équations (b), elle est déjà égale et contraire à cette résultante; il faudra donc encore qu'elle passe par le point O (fig. 72), où les prolongemens des cordons extrêmes AM et BN viennent se couper, et qu'on peut prendre pour le point d'application commun aux deux forces H et K. Ainsi, dans l'état d'équilibre, la résultante Π des forces verticales P, P', P'', etc., sera dirigée suivant la verticale OD; et, cela étant, on aura les proportions (n° 29)

$$\mathrm{H} : \Pi :: \sin \mathrm{BOD} : \sin \mathrm{AOB},$$
$$\mathrm{K} : \Pi :: \sin \mathrm{AOD} : \sin \mathrm{AOB},$$

qui feront connaître les tensions des cordons extrêmes, ou les pressions H et K exercées sur les deux points fixes A et B, quand on aura mesuré les angles AOD et BOD.

292. On peut faire sur les tensions des cordons qui supportent un poids donné, la même remarque que l'on a déjà faite à l'égard des pressions éprouvées par les points d'appui d'un plan horizontal sur lequel un poids est placé (n° 270).

Supposons que les trois cordons attachés aux points fixes A, B, C (fig. 73), se réunissent au point M, et qu'en ce point un poids P soit suspendu et agisse suivant la verticale MD. Prenons un point D' sur le prolongement de cette droite, et construisons le parallélipipède dont MD' est la diagonale, et qui a ses trois côtés adjacens MA', MB', MC', sur les directions des trois cordons. Si l'on représente la force P par la droite MD', ses composantes suivant ces directions seront représentées par les droites MA', MB', MC', et elles exprimeront les tensions des trois cordons MA, MB, MC, ou les charges des trois points fixes A, B, C, lesquelles se trouveront, dans ce cas, complètement déterminées. Mais, lorsque les cordons aboutissant au point M seront au nombre de quatre, ou en plus grand nombre, on pourra décomposer la force P d'une infinité de manières différentes, suivant leurs directions; en sorte que leurs tensions et les charges des points fixes ne seront plus déterminées, et une ou plusieurs d'entre elles pourront être nulles ou prises arbitrairement. Or, cette indétermination aurait réellement lieu dans la question abstraite, où l'on n'a tenu aucun compte de l'extensibilité des cordons; mais elle n'existe plus dès qu'on a égard à cette propriété de la matière : alors tous les cordons s'allongent un tant soit peu; leurs extensions dépendent de leur nombre et de leurs positions relatives; et si l'on mesurait ces petits allongemens, on en pourrait conclure la tension de chaque cordon, ou la charge de chaque point fixe qui a réellement lieu.

Ainsi, en supposant que le cordon AM, par exemple, se soit allongé dans le rapport de $1 + \delta$ à l'unité, et sachant, d'ailleurs, qu'un cordon de même matière et de même diamètre s'allonge dans le rapport de $1 + \varpi$ à l'unité, quand on le suspend verticalement à un point fixe, et qu'on attache le poids P à son extrémité inférieure, on en conclura (n° 288) que la tension éprouvée par ce cordon, ou la charge que supporte le point A, est égale au produit $\frac{\delta}{\varpi}$ P.

Si l'on désigne par ϖ' et δ', ϖ'' et δ'', etc., ce que deviennent les fractions ϖ et δ relativement aux cordons MB, MC, etc., et par $\gamma, \gamma', \gamma''$, etc., les angles aigus que font les cordons MA, MB, MC, etc.,

avec la verticale MD', il faudra qu'on ait

$$\frac{s}{\alpha}\cos\gamma + \frac{s'}{\alpha'}\cos\gamma' + \frac{s''}{\alpha''}\cos\gamma'' + \text{etc.} = 1,$$

afin que la somme des composantes verticales de toutes les tensions soit égale au poids P. En projetant les mêmes cordons sur un plan horizontal mené par le point M, et désignant ω, ω', ω'', etc., les angles que les projections de MA, MB, MC, etc., font avec une droite MO tracée arbitrairement dans ce plan, on aura aussi

$$\frac{s}{\alpha}\sin\gamma\sin\omega + \frac{s'}{\alpha'}\sin\gamma'\sin\omega' + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{s}{\alpha}\sin\gamma\cos\omega + \frac{s'}{\alpha'}\sin\gamma'\cos\omega' + \text{etc.} = 0,$$

pour exprimer que la résultante de toutes les tensions est une force verticale.

Quand il n'y a que trois cordons, ces trois équations suffisent pour déterminer les rapports de leurs tensions au poids P, ou les valeurs de $\frac{s}{\alpha}$, $\frac{s'}{\alpha'}$, $\frac{s''}{\alpha''}$, au moyen des angles que ces trois cordons font avec la verticale MD', et des angles compris entre les plans de cette droite et de leurs directions. Quand il n'y en a que deux, leurs directions et cette verticale sont comprises dans un même plan; ce qui réduit à une seule les deux dernières équations.

§ II. *Équilibre d'un fil flexible.*

293 Considérons d'abord un fil pesant, homogène et d'un diamètre constant; supposons-le parfaitement flexible et attaché par ses extrémités A et C (fig. 74) à deux points fixes; et proposons-nous de déterminer la courbe ABC qu'il forme dans son état d'équilibre. On nomme cette courbe la *chaînette*; elle est évidemment comprise dans le plan vertical passant par les deux points fixes A et C; car il n'y aurait aucune raison pour qu'elle s'en écartât plutôt d'un côté que de l'autre.

Par un point O, menons dans ce plan deux axes rectangulaires Ox et Oy, qui seront ceux des coordonnées positives; prenons Ox horizontal et dirigé du côté du point A, et Oy vertical, dirigé en sens contraire de la pesanteur, et passant par le point B, le plus bas de la courbe. Soient x et y les coordonnées OP et PM, rapportées à ces deux axes, d'un point quelconque M de la chaînette, et s l'arc BM aboutissant en ce point et compté du point B; et désignons par x', y', s', ce que deviendront x, y, s, relativement à un autre point M' de cette courbe, tel que l'on ait $s' > s$.

Si l'on appelle p le poids de l'unité de longueur du fil, lorsqu'il est couché sur un plan horizontal, $p(s'-s)$ sera, dans cet état, le poids d'une longueur $s'-s$ du même fil, puisqu'on le suppose homogène et d'une épaisseur constante. Quand il sera suspendu aux deux points fixes A et B, ses différentes parties s'allongeront inégalement, à raison de leurs tensions respectives; et, en même temps, leurs densités ou leurs épaisseurs diminueront de manière que leurs masses ne changent pas; par conséquent, le poids de cette longueur $s'-s$ ne sera plus exactement le même qu'auparavant; mais si la matière du fil est très peu extensible, et qu'on néglige les petites dilatations de ses parties, on pourra encore prendre $p(s'-s)$ pour le poids correspondant à l'arc MM' de la chaînette.

Soient, en outre, T et T' les forces inconnues qui agissent à ses extrémités M et M', et proviennent de ce que ces points sont liés aux parties CM et AM' de cette courbe. En joignant ces forces au poids $p(s'-s)$, on pourra considérer MM' comme entièrement libre; par conséquent, si l'on représente par α et β les angles que fait la direction de la force T avec les prolongemens des coordonnées x et y de son point d'application, et par α' et β' les angles analogues relativement à la force T', nous aurons

$$\left.\begin{aligned} T\cos\alpha + T'\cos\alpha' &= 0,\\ T\cos\beta + T'\cos\beta' &= p(s'-s),\\ T(x\cos\beta - y\cos\alpha) + T'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') &= p(s'-s)\,x_1, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

pour l'équilibre de ces trois forces comprises dans un même plan (n° 262); x_1 étant l'abscisse horizontale du centre de gravité de l'arc MM'. Elles auront lieu, quelle que soit la longueur de cet arc : si on la suppose infiniment petite, on pourra négliger, dans ces équations, les quantités infiniment petites du second ordre; mais il faudra conserver les quantités du premier ordre; ce qui n'empêchera pas qu'on ne doive considérer la force T comme étant dirigée suivant la partie MH de la tangente, à l'extrémité M, et la force T', suivant la partie M'H' de la tangente, à l'autre extrémité M'.

Pour le faire voir, prenons sur MM' un point m tel que l'arc Mm soit infiniment petit du second ordre; ce qui permettra de négliger le poids de cette partie de la chaînette. Si l'on fixe le point m, l'équilibre ne sera pas troublé; or, le fil étant supposé parfaitement flexible, il n'y aurait rien qui empêchât la force T de faire tourner l'arc Mm au-

tour de m, si elle n'était pas dirigée suivant son prolongement MH. On verra de même que la force T' doit être dirigée suivant M'H'.

D'après cela, nous aurons

$$\cos \alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = -\frac{dy}{ds},$$

$$\cos \alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \quad \cos \beta' = \frac{dy'}{ds'};$$

et en négligeant les infiniment petits du second ordre, ces dernières valeurs seront

$$\cos \alpha' = \frac{dx}{ds} + d.\frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta' = \frac{dy}{ds} + d.\frac{dy}{ds}.$$

On peut aussi prouver qu'on a $T' = T + dT$. En effet, la quantité T est une fonction des coordonnées du point quelconque M auquel elle répond, qui devient, conséquemment, $T + dT$ au point M'; en ce point, elle exprime la force qui agit sur la partie supérieure AM' de la chaînette, suivant la direction M'H', prolongement de H'M'. Or, si m' est un point de la courbe dont la distance à M' est infiniment petite du second ordre, la force qui agit en m' sur la partie Am', sera la même, en grandeur et en direction, que celle qui agit en M' sur AM'; par conséquent, la partie M'm' de la chaînette est tirée en sens contraire, suivant M'H' et m'H', par des forces T' et $T + dT$, qui doivent être égales pour que M'm' demeure en équilibre.

Cela posé, je substitue ces différentes valeurs dans les deux premières équations (a), et j'y fais $s' - s = ds$; elles deviennent

$$d.\,T\frac{dx}{ds} = 0, \quad d.\,T\frac{dy}{ds} = p\,ds. \qquad (b)$$

Quant à la troisième, elle prendra la forme

$$d.\,T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = px\,ds,$$

en y négligeant les infiniment petits du second ordre, ce qui permet de remplacer x_1 par x dans son second membre. Or, cette équation est la même chose que

$$x\,d.\,T\frac{dy}{ds} - y\,d.\,T\frac{dx}{ds} = px\,ds;$$

et, comme on voit, elle est une suite des deux autres. Effectivement, le problème ne peut dépendre que de deux équations, puisqu'il n'y a que deux inconnues y et T à déterminer en fonctions de x; la première, pour connaître l'équation de la courbe, et la seconde, pour savoir quelle est la tension en un point quelconque M, c'est-à-dire, la grandeur des forces égales qui tirent l'élément Mm suivant ses deux prolongemens.

294. L'intégrale de la première équation (b) est

$$T\frac{dx}{ds} = c,$$

en désignant par c la constante arbitraire. Au point B, on a $\frac{dx}{ds} = 1$ et $T = c$; si donc on représente la tension en ce point le plus bas, par le poids d'une longueur h du fil, on aura $c = ph$, et, en un point quelconque,

$$T = ph\frac{ds}{dx}.$$

La seconde équation (b) deviendra donc

$$hd.\frac{dy}{dx} = ds;$$

d'où l'on tire

$$s = h\frac{dy}{dx},$$

en observant qu'on a, en même temps, $s = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$ au point B. Ces équations feront connaître immédiatement l'arc s et la tension T, lorsque l'ordonnée y aura été déterminée en fonction de x.

En mettant dans l'équation précédente, à la place de ds, sa valeur

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

on en déduit

$$dx = \frac{hd.\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

En intégrant et observant qu'on a $x = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$ au point B, on en déduit

$$x = h\log\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = e^{\frac{x}{h}};$$

e étant, à l'ordinaire, la base des logarithmes népériens. Je multiplie cette équation par

$$\left(\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{dy}{dx}\right)e^{-\frac{x}{h}};$$

il en résulte

$$e^{-\frac{x}{k}} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{dy}{dx};$$

on aura donc

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)dx,$$

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)dx;$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right), \\ y &= \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right), \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

en observant que $s = 0$ et $x = 0$, au point B, et prenant l'origine O des coordonnées à la distance k au-dessous de ce point, de sorte qu'on ait $y = k$ quand $x = 0$.

Ces équations (c) donnent $s = k\frac{dy}{dx}$, comme plus haut. La seconde est l'équation de la chaînette, sous la forme la plus simple; elle montre que cette courbe est symétrique de part et d'autre de son point le plus bas.

La valeur précédente de T deviendra

$$T = pk\frac{ds}{dx} = py;$$

en sorte que la tension en un point quelconque M est exprimée par le poids d'une longueur du fil, égale à la perpendiculaire MP abaissée de ce point sur la droite horizontale, passant par le point O. C'est au point B que cette tension est la plus potite; et sa valeur en ce point est pk, comme on l'a supposé.

295. Il ne reste plus qu'à déterminer la constante k qui entre dans ces formules. L'expression de y fera ensuite connaître la figure de la chaînette; mais pour que sa position soit connue dans le plan vertical passant par les points A et C, il faudra aussi déterminer la distance de l'axe Oy à l'un de ces points fixes.

Pour cela, je mène par le point A une horizontale qui coupe l'axe Oy en un point Q, et par le point C, une verticale qui rencontre cette horizontale au point D. La position du point C, par rapport au point A, étant connue, les distances AD et DC seront données. Je les représente par a et b; je désigne aussi par k la distance AQ; en sorte qu'on ait

$$AD = a, \quad DC = b, \quad AQ = k, \quad OB = k;$$

a et b étant des quantités données, et k et k les deux inconnues qu'il s'agira de déterminer.

J'appellerai k' la distance QD, l la longueur donnée de la courbe ABC, g et g' ses parties AB et BC, f la flèche BQ; on aura

$$k + k' = a, \quad g + g' = l,$$

en regardant k' et g' comme des quantités positives ou négatives, selon que le point C appartiendra au prolongement de AB ou à AB même. Les ordonnées des points A et C seront $k + f$ et $k + f - b$, en considérant aussi la quantité b comme positive ou comme négative, selon que C sera au-dessous ou au-dessus de la droite horizontale, menée par le point A.

Si l'on fait dans les équations (c), d'abord

$$x = k, \quad s = g, \quad y = k + f,$$

et ensuite

$$x = -k', \quad s = -g', \quad y = k + f - b,$$

il en résultera

$$g = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{k}{k}} - e^{-\frac{k}{k}}\right), \quad k + f = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{k}{k}} + e^{-\frac{k}{k}}\right),$$

$$g' = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{k'}{k}} - e^{-\frac{k'}{k}}\right), \quad k + f - b = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{k'}{k}} + e^{-\frac{k'}{k}}\right);$$

d'où l'on tire

$$l = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{k}{k}} - e^{-\frac{k}{k}} + e^{\frac{k'}{k}} - e^{-\frac{k'}{k}}\right),$$

$$b = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{k}{k}} + e^{-\frac{k}{k}} - e^{\frac{k'}{k}} - e^{-\frac{k'}{k}}\right),$$

De là et de $k + k' = a$, on conclut

$$l^2 - b^2 = k^2\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}} - 2\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}\right) = n, \quad (d)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{a}{2h} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{a^2}} = n.$$

Cette quantité n étant composée de quantités données, l'équation (d) fera connaître la valeur de α, et par suite celle de h. En général, cette équation se résoudra par des essais; et l'on en déduira la valeur numérique de α d'après celle de n, aussi exactement qu'on voudra. Si n diffère très peu de l'unité, la valeur de α sera très petite; en développant alors les exponentielles, et négligeant la quatrième puissance de α, on aura simplement $\alpha^2 = 6(n - 1)$.

Si nous faisons aussi

$$\frac{k - k'}{h} = 2\mathfrak{C},$$

nous aurons

$$k = \tfrac{1}{2}a + h\mathfrak{C}, \quad k' = \tfrac{1}{2}a - h\mathfrak{C};$$

et la valeur précédente de b deviendra

$$b = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right)\left(e^{\mathfrak{C}} - e^{-\mathfrak{C}}\right); \quad (e)$$

ce qui fera connaître la valeur de $\mathfrak{C}$, d'après celle de h, et, conséquemment, les quantités k et k'. Le signe de k' décidera de quel côté de Oy, le point C sera placé.

Le cas le plus simple aura lieu quand les points fixes A et C seront situés sur une même droite horizontale. On aura alors $b = 0$; l'équation (e) donnera $\mathfrak{C} = 0$, et, par suite, $k = k' = \frac{1}{2}a$, comme cela doit être. On aura, en même temps,

$$k + f = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{a}{2h}} + e^{-\frac{a}{2h}}\right);$$

ce qui fera connaître les tensions aux points A et C, ou les charges que ces points fixes auront à supporter, après que la valeur de h aura été calculée. Dans le cas général, ces tensions extrêmes se déduiront des valeurs de y, correspondantes à $x = k$ et $x = -k'$.

296. Parmi toutes les courbes de même longueur, qui aboutissent aux points donnés A et C, la chaînette est celle dont le centre de gravité est le plus bas.

En effet, menons par le point A (fig. 75) un axe horizontal Ay', et un axe Ax' vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Soient x' et y' les coordonnées d'un point quelconque M, rapportées à ces axes. En appelant x_1 la distance du centre de gravité d'une courbe quelconque AMC, à l'axe Ay', nous aurons

$$lx_1 = \int_0^b x' \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}\, dx';$$

b étant la valeur de x' qui répond au point C, et l désignant la longueur donnée de cette courbe, de sorte qu'on ait

$$l = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}\, dx'.$$

Or, d'après la formule (e) du n° 201, la courbe dans laquelle la première intégrale est un *maximum* entre toutes les courbes de même longueur, a pour équation différentielle

$$dy' = \frac{c'dx'}{\sqrt{(x' + c)^2 - c'^2}};$$

c et c' étant des constantes arbitraires. En intégrant et observant que les variables x' et y' sont nulles en même temps, il vient

$$y' = c' \log \frac{x' + c + \sqrt{(x' + c)^2 - c'^2}}{c + \sqrt{c^2 - c'^2}},$$

et, par conséquent,

$$x' + c + \sqrt{(x' + c)^2 - c'^2} = \gamma\, e^{\frac{y'}{c'}},$$

en faisant, pour abréger,

$$c + \sqrt{c^2 - c'^2} = \gamma.$$

On tire de là

$$x' + c - \sqrt{(x' + c)^2 - c'^2} = \gamma'\, e^{-\frac{y'}{c'}},$$

en faisant aussi

$$c - \sqrt{c^2 - c'^2} = \gamma'.$$

On aura donc

$$x' + c = \tfrac{1}{2}\gamma\, e^{\frac{y'}{c'}} + \tfrac{1}{2}\gamma'\, e^{-\frac{y'}{c'}}, \quad (f)$$

pour l'équation de la courbe qui jouit de la propriété demandée. Au point C, on aura

$$b + c = \tfrac{1}{2}\gamma\, e^{\frac{a}{c'}} + \tfrac{1}{2}\gamma'\, e^{-\frac{a}{c'}};$$

a étant la distance donnée de ce point à l'axe Ax', de sorte qu'on ait à la fois $x' = b$ et $y' = a$. Cette équation particulière et la longueur l de la courbe serviront à déterminer les deux constantes c et c'.

Maintenant, pour faire coïncider l'équation (f) avec celle de la chaînette, désignons par s une constante indéterminée, et changeons les coor-

données x' et y' en d'autres, telles que l'on ait

$$x' + c = -y, \quad y' = s - x;$$

de manière que ces nouvelles coordonnées x et y soient dirigées en sens contraire de y' et x', et rapportées à une autre origine. Par ce changement, l'équation (f) deviendra

$$y = -\frac{1}{2}\gamma e^{\frac{s}{c'}} e^{-\frac{x}{c'}} - \frac{1}{2}\gamma' e^{-\frac{s}{c'}} e^{\frac{x}{c'}}.$$

Déterminons la quantité s, en posant l'équation

$$\gamma e^{\frac{s}{c'}} = \gamma' e^{-\frac{s}{c'}};$$

et désignons par $-h$, la valeur commune de ces deux quantités égales, de sorte qu'on ait

$$\gamma e^{\frac{s}{c'}} = -h, \quad \gamma' e^{-\frac{s}{c'}} = -h.$$

Comme on a $\gamma\gamma' = c'^2$, il en résultera $h = c'$; et l'équation précédente de la courbe deviendra

$$y = \frac{1}{2} h \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right);$$

ce qui coïncide avec la seconde équation (c) que nous avons trouvée pour la chaînette.

297. Si la force verticale qui agit sur chaque élément du fil suspendu aux points A et C (fig. 74), au lieu d'être proportionnelle à la longueur de l'élément ds, est proportionnelle à sa projection horizontale dx, la seconde équation (b) deviendra

$$d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} = p dx;$$

p étant une constante donnée qui représente le poids d'un prisme dont la hauteur est l'unité linéaire. En vertu de la première équation (b), qui ne changera pas, on aura toujours

$$\mathrm{T} = ph\frac{ds}{dx},$$

en désignant par h une ligne de longueur inconnue, et par ph un poids équivalent à la tension au point B, le plus bas de la courbe. Il en résultera donc

$$hd.\frac{dy}{dx} = dx;$$

d'où l'on tire

$$h\frac{dy}{dx} = x, \quad 2hy = x^2,$$

en plaçant l'origine des coordonnées x et y au point B. Dans ce cas, la courbe sera, comme on voit, une parabole qui aura son sommet au point le plus bas; et l'on aura

$$\mathrm{T} = p\sqrt{h^2 + x^2},$$

pour la tension en un point quelconque.

En employant les notations du n° 295, on aura, aux points A et C,

$$2hf = k^2, \quad 2h(f - b) = k'^2,$$

et à cause de $k + k' = a$, on en conclura

$$2hb = a(k - k');$$

ce qui fera connaître k, k', f, quand on aura déterminé h, dont la valeur se déduira de la longueur l du fil. On aura, en effet,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\sqrt{h^2 + x^2}, \quad hl = \int_{-k'}^{k} \sqrt{h^2 + x^2}dx;$$

ce qui donne, en effectuant l'intégration par les règles ordinaires,

$$2hl = h^2 \log \frac{\sqrt{h^2 + k^2} + k}{\sqrt{h^2 + k'^2} - k'} + k\sqrt{h^2 + k^2} + k'\sqrt{h^2 + k'^2}.$$

En supposant, pour plus de simplicité, les deux points A et C dans une même droite horizontale, on aura

$$b = 0, \quad k = k' = \frac{1}{2}a;$$

l'équation précédente se réduira à

$$hl = h^2 \log \frac{k + \sqrt{h^2 + k^2}}{h} + k\sqrt{h^2 + k^2};$$

et l'on en déduira, par des essais, la valeur approchée de h, lorsque les valeurs numériques de l et k seront données.

Cette inconnue h se déterminera plus facilement quand la longueur l de la courbe différera très peu de sa projection a; ce qui rendra la valeur de h très grande par rapport à a. On aura alors, en séries très convergentes,

$$\sqrt{h^2 + k^2} = h + \frac{1}{2}\frac{k^2}{h} - \frac{1}{8}\frac{k^4}{h^3} + \text{etc.},$$

$$\log \frac{k + \sqrt{h^2 + k^2}}{h} = \frac{k}{h} - \frac{1}{6}\frac{k^3}{h^3} + \text{etc.}$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation précédente devient, à très peu près,

$$h^2(l - 2k) = \frac{1}{3}k^3;$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{a\sqrt{2a}}{4\sqrt{3(l - a)}}.$$

On a choisi cet exemple, parce qu'il trouve une application utile dans la construction des ponts suspendus, où il est important de calculer la tension de la chaîne de suspension et la charge de ses points d'appui.

298. Supposons actuellement que tous les points du fil soient sollicités par des forces quelconques. Il formera, en général, une courbe à double courbure; les équations d'équilibre de chacun de ses élémens seront au nombre de trois; et, en supposant toujours le fil parfaitement flexible, on obtiendra ces équations par les considérations que nous avons exposées en détail dans le n° 293. De cette manière, on trouve

$$\left.\begin{aligned} d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} + \mathrm{X}\,\iota\,ds = 0,\\ d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} + \mathrm{Y}\,\iota\,ds = 0,\\ d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} + \mathrm{Z}\,\iota\,ds = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M de la courbe, ds l'élément différentiel de sa longueur, ι le produit de la densité du fil et de la section perpendiculaire à sa longueur, qui ont lieu au point M, de sorte que ιds soit l'élément de la masse du fil; T la tension en ce même point, ou la force, de grandeur inconnue, qui tire cet élément ιds suivant chacun de ses prolongemens; X, Y, Z, les forces rapportées à l'unité de masse et parallèles aux axes des x, y, z, qui répondent au point M et seront des fonctions données de ses trois coordonnées.

En vertu de la tension T, l'élément ds aura éprouvé une extension et la quantité ι une diminution, telles que la masse ιds n'ait pas changé; en désignant donc par ds' et ι', ce que ces quantités étaient dans l'état naturel du fil, on aura

$$\iota ds = \iota' ds';$$

et en supposant l'extension proportionnelle à la force qui la produit (n° 288), nous aurons, en même temps,

$$ds = (1 + \omega\,\mathrm{T})\,ds'; \qquad (2)$$

ω étant un coefficient très petit, dépendant de la matière et de l'épaisseur du fil au point M. Quand le fil sera homogène et d'une épaisseur constante dans toute sa longueur, ι' et ω seront des quantités constantes; mais, en général, ces deux quantités pourront être regardées comme des fonctions données de l'arc s', compté d'un point déterminé du fil et aboutissant au point M.

299. Si le fil, de nature quelconque, est seulement soumis à la pesanteur et suspendu verticalement à un point fixe que j'appellerai A, les deux dernières équations (1) disparaîtront, et la troisième se réduira à

$$d\mathrm{T} + g\iota dz = 0,$$

en prenant l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, et désignant cette force par g. Je place au point A l'origine des z, et j'appelle Q la valeur de T qui répond à $z = 0$, c'est-à-dire, la charge que ce point aura à supporter. Au point quelconque M, on aura

$$\mathrm{T} = \mathrm{Q} - g\int \iota dz;$$

l'intégrale étant nulle en même temps que z.

Appelons B l'extrémité inférieure du fil; attachons en ce point un poids P, et désignons par l la longueur de AB. Il est évident que P sera la tension au point B; on aura donc, en même temps, $z = l$, et $\mathrm{T} = \mathrm{P}$; ce qui donne

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P} + g\int_0^l \iota dz,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{T} = \mathrm{P} + g\int_0^l \iota dz - g\int \iota dz.$$

Or, le second et le troisième terme de cette formule sont les poids du fil entier et de sa partie AM; il s'ensuit donc que la tension au point M est le poids de la partie BM, augmenté du poids P; ce qui est d'ailleurs évident.

La loi de l'allongement du fil dans toute son étendue, dépend de sa nature et de son épaisseur. Je suppose, par exemple, qu'il soit homogène et partout d'une même épaisseur, ce qui rendra constant le coefficient ω. En appelant z' la longueur de la partie AM, avant que le fil soit tendu, laquelle longueur devient z par l'effet de la tension, et mettant, en conséquence, dz' et dz au lieu de ds' et ds; dans l'équation (2), on aura

$$dz = (1 + \omega\mathrm{T})\,dz'.$$

Soient aussi l' la longueur totale du fil avant son allongement, et p son poids entier. Le poids de la partie BM sera $\frac{p(l' - z')}{l'}$, et la tension au point M aura pour valeur

$$\mathrm{T} = \mathrm{P} + \frac{p(l' - z')}{l'}.$$

En la substituant dans l'équation précédente, intégrant et observant qu'on a $z' = 0$ et $z = 0$ au point A, il vient

$$z - z' = \omega\mathrm{P}z' + \frac{\omega p(2l'z' - z'^2)}{2l'},$$

pour l'allongement de la partie AM. On en déduit l'allongement total en faisant $z' = l'$ et $z = l$; ce qui donne

$$l - l' = \omega l'\left(\mathrm{P} + \tfrac{1}{2}p\right);$$

en sorte que pour avoir égard au poids du fil dans le calcul de cet allongement, il faut ajouter la moitié de ce poids à celui qui est attaché à son extrémité inférieure.

300. Dans le cas général, j'ajoute les équations (1), après les avoir multipliées par $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; il en résulte

$$dT + \varepsilon(Xdx + Ydy + Zdz) = 0, \quad (2)$$

à cause de

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d.\frac{dz}{ds} = 0.$$

Si l'on suppose le fil homogène et son épaisseur constante, et qu'on néglige la petite dilatation de ses élémens, la qualité ε sera constante; de plus, la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ est, en général, la différentielle exacte d'une fonction des trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes; en faisant donc

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\,d.\,\varphi(x, y, z),$$

nous aurons

$$dT = \varepsilon\,d\varphi(x, y, z),$$

et, par conséquent,

$$T = \varepsilon\varphi(x, y, z),$$

en comprenant la constante arbitraire dans la fonction φ. Cette constante disparaîtra dans la différence des valeurs de T relatives à deux points du fil; il s'ensuit donc que sans avoir déterminé la figure d'équilibre, on connaîtra l'accroissement de la tension d'un point à un autre; en sorte qu'il suffira que la tension soit connue en un point déterminé pour qu'elle le soit aussi dans toute la longueur du fil.

Quant à la courbe formée par le fil, elle sera déterminée par deux des trois équations (1), ou par deux combinaisons quelconques de ces trois équations, dans lesquelles on substituera la valeur précédente de T; en sorte qu'il faudra généralement intégrer le système de deux équations différentielles du second ordre pour connaître cette courbe. Son rayon de courbure au point quelconque M, s'exprimera au moyen de la formule différentielle suivante, qui n'est que du premier ordre, et qui suppose seulement connue la direction de la tangente en ce point.

Les équations (1) peuvent être remplacées par celles-ci :

$$\frac{dz}{ds}\,d.T\,\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d.T\,\frac{dz}{ds} = \varepsilon(Xdy - Ydx),$$

$$\frac{dx}{ds}\,d.T\,\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d.T\,\frac{dx}{ds} = \varepsilon(Zdx - Xdz),$$

$$\frac{dy}{ds}\,d.T\,\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d.T\,\frac{dy}{ds} = \varepsilon(Ydz - Zdy),$$

qui sont la même chose que

$$\left.\begin{aligned} dzd^2y - dyd^2z &= (Xdy - Ydx)\frac{\varepsilon ds^2}{T}, \\ dxd^2z - dzd^2x &= (Zdx - Xdz)\frac{\varepsilon ds^2}{T}, \\ dyd^2x - dxd^2y &= (Ydz - Zdy)\frac{\varepsilon ds^2}{T}, \end{aligned}\right\} (4)$$

en effectuant les différentiations et prenant l'arc s pour la variable indépendante. Or, si l'on appelle ρ le rayon de courbure au point M, on a (n° 18)

$$\rho = \frac{ds^3}{[(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

d'après les équations précédentes et la valeur de T, on aura donc

$$\rho = \frac{\varphi(x, y, z)\,ds}{[(Xdy - Ydx)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Ydz - Zdy)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5)$$

Dans le cas de la chaînette, on a

$$X = 0, \quad Y = -g, \quad Z = 0, \quad \varphi = gy,$$

en prenant les axes et l'origine des coordonnées que supposent les équations (c) du n° 294. On aura donc

$$\rho = y\frac{ds}{dx};$$

ce qu'il est aisé de vérifier, d'après ces équations.

301. Appliquons ces formules au cas d'un fil tendu sur la surface d'un corps solide, et supposons, pour plus de simplicité, qu'il ne soit soumis à aucune force donnée, de sorte que la seule force qui agisse sur ses différens points soit la résistance inconnue du solide sur lequel il s'appuie.

Au point quelconque M du fil, soit Nds la grandeur de cette force appliquée à l'élément εds du fil, et dont les trois composantes seront $X\varepsilon ds$, $Y\varepsilon ds$, $Z\varepsilon ds$; sa direction sera normale à la surface du solide, et dirigée de dehors en dedans. La pression qui aura lieu sur la partie du solide correspondant

à ds sera égale et contraire à cette force Nds, de manière que N exprimera la mesure de la pression rapportée à l'unité de longueur.

En appelant λ, μ, ν, les angles que fait la partie extérieure de la normale en M avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par ce point, on aura

$$\iota X = N\cos\lambda,\quad \iota Y = N\cos\mu,\quad \iota Z = N\cos\nu.$$

De plus, si $L = 0$ est l'équation de la surface du solide, et qu'on fasse, pour abréger,

$$V = \left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

on aura aussi (n° 21)

$$\cos\lambda = V\frac{dL}{dx},\quad \cos\mu = V\frac{dL}{dy},\quad \cos\nu = V\frac{dL}{dz},$$

en prenant convenablement le signe de V.

Cela étant, nous aurons

$$Xdx + Ydy + Zdz = NVdL = 0;$$

ce qui rendra nulle la valeur de dT donnée par l'équation (3). La tension sera donc la même dans toute la longueur du fil, quelle que soit la forme du corps solide. Je supposerai sa valeur donnée, et je la représenterai par k. Si le fil est attaché par une de ses extrémités à un point du corps, et qu'un poids considérable, par rapport à celui du fil qu'on a négligé, soit suspendu verticalement à son autre bout, ce poids sera la tension k et la pression que le point fixe éprouvera. Si le fil est libre par ses deux bouts, et que des poids considérables y soient suspendus, ils exprimeront les tensions extrêmes; par conséquent, ils devront être égaux, et chacun d'eux sera la tension k. Enfin, si les deux bouts du fil sont supposés fixes, sa tension k se déduira de son extension, qui sera constante dans toute sa longueur.

303. Je désigne par λ', μ', ν', les angles que fait la perpendiculaire au plan osculateur au point M, avec des parallèles aux axes des x, y, z. Le rayon de courbure en ce point étant ρ, on aura (n° 19)

$$\frac{dzd^2y - dyd^2z}{ds^3} = \rho\cos\nu',$$

$$\frac{dxd^2x - dzd^2z}{ds^3} = \rho\cos\mu',$$

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3} = \rho\cos\lambda'.$$

Si donc on ajoute les équations (4) après les avoir multipliées par $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$, et qu'on ait égard aux valeurs de X, Y, Z, qui ont lieu dans le cas que nous considérons, il en résultera

$$\cos\nu\cos\nu' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\lambda\cos\lambda' = 0;$$

par conséquent, les normales à la surface du corps solide et au plan osculateur de la courbe formée par le fil, en chaque point M, sont perpendiculaires l'une à l'autre; ce qui est la propriété caractéristique de la ligne dont la longueur est un *minimum* ou un *maximum* sur une surface donnée (n° 161). Il s'ensuit donc qu'un fil tendu sur un corps solide, trace, en général, la plus courte distance d'un point à un autre sur la surface. A la rigueur, il est possible que cette distance soit, au contraire, un *maximum*; ainsi, par exemple, deux points donnés sur une sphère sont les extrémités communes à deux arcs de grands cercles, dont l'un est la plus courte distance entre ces points, et l'autre la courbe plane la plus longue; or, il est évident que l'équilibre du fil tendu sera rigoureusement possible sur ces deux arcs de cercle, puisqu'en le plaçant sur l'un des deux, il n'y aurait aucune raison pour qu'il s'en écartât plutôt d'un côté que de l'autre; mais sur le petit arc l'équilibre sera stable, et sur le grand il ne sera qu'instantané, de sorte qu'il ne pourra subsister, *physiquement*, qu'à l'aide du frottement du fil contre le corps solide.

Si l'on substitue encore les valeurs de ιX, ιY, ιZ, du numéro précédent, dans la formule (5), on aura

$$N\left[\left(\frac{dy}{ds}\cos\lambda - \frac{dx}{ds}\cos\mu\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\cos\nu - \frac{dx}{ds}\cos\lambda\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\cos\mu - \frac{dy}{ds}\cos\nu\right)^2\right] = \frac{k}{\rho},$$

à cause de $\varphi(x, y, z) = k$. En même temps, on a

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1,$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1;$$

La normale à la surface du corps et la tangente à la courbe du fil, en chaque point M, étant perpendiculaires l'une à l'autre, on a aussi

$$\frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu = 0;$$

or, au moyen de ces trois dernières équations, on

réduit sans difficulté le coefficient de N, dans la précédente, à l'unité. On a donc simplement

$$N = \frac{k}{\rho};$$

ce qui montre que la pression rapportée à l'unité de longueur, exercée par un fil tendu sur la surface d'un corps solide, est égale, en chaque point M, à la tension divisée par le rayon de courbure du fil, c'est-à-dire, par le rayon de la section normale à la surface et tangente à la courbe du fil.

303. Ces résultats seront modifiés par le frottement du fil contre la surface du corps sur lequel il s'appuie. Pour montrer comment on doit avoir égard à cette force dans l'équilibre d'un fil flexible, je vais considérer l'équilibre d'un cordon ABMCD (fig. 76), dont la partie BMC est appliquée sur la gorge d'une poulie fixe, et qui est tiré, suivant les prolongemens BA et CD de cette partie, par des forces données. La poulie et la droite AB seront supposées verticales; la force agissant suivant BA sera un poids k, et je représenterai par F celle qui agit suivant CD. Les tensions qui ont lieu aux points B et C suivant les tangentes BA et CD, auront k et F pour valeurs. Je supposerai aussi, pour simplifier la question, que la poulie soit circulaire; j'appellerai c son rayon, et je prendrai son centre O pour l'origine des coordonnées : l'axe des x sera perpendiculaire à la poulie, l'axe des y vertical et dirigé de bas en haut, l'axe des z horizontal et passant par le point B. Enfin, je fixerai au point C l'origine de l'arc s aboutissant au point quelconque M du cordon, de sorte qu'on ait $CM = s$.

Cela posé, si le frottement était nul, il faudrait qu'on eût $k = F$ dans le cas de l'équilibre; mais, à raison du frottement, l'équilibre peut subsister tant que la différence de ces deux forces k et F n'a pas dépassé une certaine limite. Concevons donc que l'équilibre soit sur le point de se rompre dans le sens du poids k; ce qui suppose qu'on ait $k > F$. A cet instant, le frottement du cordon contre la poulie, qui a lieu au point quelconque M, sera dirigé, suivant la partie MH de la tangente, en ce point. Je représente par μ son intensité, et, comme précédemment, par N la résistance normale qui a lieu au même point M, suivant le prolongement MO' de MO, de manière que μds et Nds soient les forces tangente et normale qui agissent sur l'élément ds du cordon aboutissant au point M, et que μ et N représentent ces mêmes forces, rapportées à l'unité de longueur. Si l'on mène par ce point M des parallèles Mx' et My' aux axes Ox et Oy, on aura

$$\cos x'MH = -\frac{y}{c}, \quad \cos y'MH = \frac{x}{c},$$

$$\cos x'MO' = \frac{x}{c}, \quad \cos y'MO' = \frac{y}{c};$$

de là on conclut

$$_sX = \frac{Nx}{c} - \frac{\mu y}{c}, \quad _sY = \frac{Ny}{c} + \frac{\mu x}{c},$$

pour les valeurs de $_sX$ et $_sY$ qu'il faudra substituer dans les équations (1). La force $_sZ$ sera évidemment nulle; la troisième équation (1) disparaîtra, et les deux premières deviendront

$$d.\,T\frac{dx}{ds} + \frac{Nxds}{c} - \frac{\mu yds}{c} = 0,$$

$$d.\,T\frac{dy}{ds} + \frac{Nyds}{c} + \frac{\mu xds}{c} = 0.$$

Le point M appartenant à la circonférence de la poulie, on a

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad xdx + ydy = 0;$$

au moyen de quoi les deux équations précédentes peuvent être changées en celles-ci;

$$\left.\begin{aligned} &xd.\,T\frac{dx}{ds} + yd.\,T\frac{dy}{ds} + Ncds = 0,\\ &\frac{dx}{ds}d.\,T\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\,T\frac{dy}{ds} - \frac{\mu}{c}(ydx - xdy) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Mais $\frac{1}{2}(ydx - xdy)$ est la différentielle du secteur décrit par le rayon OM, à partir d'une ligne fixe (n° 156), qui sera OC, par exemple. Ce secteur étant circulaire et répondant à l'arc s, sa valeur est $\frac{1}{2}cs$; on a donc

$$ydx - xdy = cds.$$

D'ailleurs, on a aussi

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = 0, \quad xd.\frac{dx}{ds} + yd.\frac{dy}{ds} = -ds,$$

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1, \quad \frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} = 0;$$

ce qui réduit les équations (6) à

$$T = cN, \quad dT = \mu ds;$$

d'où l'on tire

$$cdN = \mu ds;$$

La pression qui a lieu au point M, sur la gorge de la poulie, est égale et contraire à la force N; si donc on suppose le frottement proportionnel à la pression (n° 269), on aura

$$\mu = fN;$$

f étant un coefficient constant qui dépendra de la

nature des deux surfaces en contact. On aura donc

$$cdN = fN\,ds,$$

et, en intégrant,

$$N = Ae^{\frac{fs}{c}};$$

A désignant la constante arbitraire, et e la base des logarithmes népériens. On aura, en même temps,

$$T = Ace^{\frac{fs}{c}}, \quad \mu = Afe^{\frac{fs}{c}}.$$

Au point C, on a $s = 0$ et $T = F$; on a donc $A = \frac{F}{c}$; et si l'on appelle l la longueur de l'arc CMB, on aura $s = l$ et $T = k$, à son autre extrémité B. Nous aurons donc finalement

$$N = \frac{F}{c}e^{\frac{fs}{c}}, \quad T = Fe^{\frac{fs}{c}} \quad \mu = \frac{fF}{c}e^{\frac{fs}{c}},$$

en un point quelconque M, et, de plus,

$$k = Fe^{\frac{fl}{c}},$$

pour l'équation d'équilibre.

En représentant par F' le frottement total qui a lieu dans toute la longueur de CMB, on aura

$$F' = \int_0^l \mu\,ds = F\left(e^{\frac{fl}{c}} - 1\right),$$

et l'équation d'équilibre pourra s'écrire ainsi :

$$k = F + F'.$$

Si nous faisons

$$e^{\frac{fl}{c}} - 1 = f',$$

nous aurons

$$F' = f'F, \qquad f' = \frac{k}{F} - 1;$$

où l'on voit que le frottement total F' est égal à la plus petite des deux forces k et F, multipliée par un coefficient f', qui varie non seulement avec la quantité f, mais aussi avec l'étendue l du contact et le rayon c de la poulie. La différence des forces k et F, à l'instant où l'équilibre se rompt, fera connaître la valeur de F', et leur rapport, diminué de l'unité, sera la valeur du coefficient f' d'où l'on pourra ensuite déduire celle de f. Lorsque F sera un poids, ainsi que k, on devra, pour plus d'exactitude, comprendre dans ces poids k et F, ceux des parties verticales BA et CD du cordon.

304. D'après les trois équations (1), il est facile de vérifier que les six équations générales de l'équilibre (n° 261) ont lieu dans le cas d'un fil parfaitement flexible.

Pour cela, j'appelle K et K' les deux extrémités du fil, et l sa longueur; et je fixe au point K l'origine de l'arc s. En intégrant les premiers membres des équations (1), depuis le point K jusqu'au point K', on aura

$$\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \left[T\frac{dx}{ds}\right] + \int_0^l Xds = 0,$$

$$\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \left[T\frac{dy}{ds}\right] + \int_0^l Yds = 0,$$

$$\left(T\frac{dz}{ds}\right) - \left[T\frac{dz}{ds}\right] + \int_0^l Zds = 0;$$

les quantités comprises entre les crochets répondant au point K, et celles qui sont renfermées entre deux parenthèses, au point K'. Indépendamment des forces X, Y, Z, qui agissent dans toute la longueur du fil, je suppose que des forces particulières, données en grandeur et en direction, soient appliquées à ses deux bouts : j'appelle k celle qui agit au point K, et α, β, γ, les angles que fait sa direction avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par ce point; et je désigne par k', α', β', γ', les quantités analogues relativement au point K'. Ces forces k et k' seront les tensions extrêmes, en grandeur et en direction; et d'après les parties des tangentes en K et K', avec lesquelles leurs directions devront coïncider, nous aurons

$$\left.\begin{array}{lll} \left[T\frac{dx}{ds}\right] = -k\cos\alpha, & \left[T\frac{dy}{ds}\right] = -k\cos\beta, & \left[T\frac{dz}{ds}\right] = -k\cos\gamma, \\ \left(T\frac{dx}{ds}\right) = k'\cos\alpha', & \left(T\frac{dy}{ds}\right) = k'\cos\beta', & \left(T\frac{dz}{ds}\right) = k'\cos\gamma', \end{array}\right\} (7)$$

les équations précédentes deviendront donc

$$\left.\begin{aligned} k\cos\alpha + k'\cos\alpha' + \int_0^l X\,ds &= 0,\\ k\cos\beta + k'\cos\beta' + \int_0^l Y\,ds &= 0,\\ k\cos\gamma + k'\cos\gamma' + \int_0^l Z\,ds &= 0; \end{aligned}\right\} (8)$$

et elles expriment, comme on voit, les conditions d'équilibre renfermées dans les trois premières équations (1) du n° 261.

En observant qu'on a identiquement

$$x\,d.\,\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - y\,d.\,\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = d.\,\mathrm{T}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right),$$

$$z\,d.\,\mathrm{T}\frac{dx}{ds} - x\,d.\,\mathrm{T}\frac{dz}{ds} = d.\,\mathrm{T}\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right),$$

$$y\,d.\,\mathrm{T}\frac{dz}{ds} - z\,d.\,\mathrm{T}\frac{dy}{ds} = d.\,\mathrm{T}\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right),$$

on déduira des équations (1) du n° 268

$$d.\,\mathrm{T}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) + (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,ds = 0,$$

$$d.\,\mathrm{T}\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) + (z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})\,ds = 0,$$

$$d.\,\mathrm{T}\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) + (y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\,ds = 0.$$

Si donc on intègre ces quantités nulles depuis le point K jusqu'au point K', et que l'on désigne par a, b, c, les valeurs de x, y, z, relatives à K, et par a', b', c', celles qui répondent à K', on aura, en ayant égard aux équations (7),

$$\left.\begin{aligned} a\cos\beta - b\cos\alpha) + k'(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha') + \int_0^l (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,ds &= 0,\\ k(c\cos\alpha - a\cos\gamma) + k'(c'\cos\alpha' - a'\cos\gamma') + \int_0^l (z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})\,ds &= 0,\\ k(b\cos\gamma - c\cos b) + k'(b'\cos c' - c'\cos\beta') + \int_0^l (y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\,ds &= 0; \end{aligned}\right\} (9)$$

ce qui exprime les conditions d'équilibre relatives aux momens des forces données, qui sont renfermées dans les trois dernières équations (1) du n° 261.

305. Ces équations (8) et (9) serviront, en général, à déterminer les coordonnées a, b, c, a', b', c', des deux points extrêmes K et K'; toutefois, il y aura des cas où une partie de ces quantités devra rester indéterminée. Si, par exemple, les forces données qui agissent sur le fil sont la pesanteur et d'autres forces indépendantes des coordonnées de leurs points d'application, il est évident que la position absolue du fil dans l'espace ne pourra pas être déterminée : on pourra alors prendre arbitrairement les trois coordonnées de l'un des points K et K'; les équations (9) détermineront les trois coordonnées de l'autre point; et, pour que l'équilibre soit possible, il faudra que les forces données satisfassent aux équations (8).

Lorsque l'un des points K et K' sera fixe, le premier par exemple, les équations (8) et (9) auront encore lieu, pourvu que l'on regarde la force k comme inconnue, en grandeur et en direction, et représentant la pression que le point K aura à supporter. Dans ce cas les valeurs de a, b, c, seront données; les équations (9) détermineront celles de a', b', c', et les équations (8) feront connaître les trois composantes de la force k. Quand les deux points K et K' seront fixes et donnés de position, on connaîtra leurs coordonnées, et les équations (8) et (9) serviront à déterminer, en grandeur et en direction, les pressions k et k' exercées sur K et K'.

Dans tous les cas, soit que les coordonnées de K et K' aient été données, soit qu'on les ait déduites des équations (8) et (9), on assujettira la courbe formée par le fil à passer par ces deux points; ce qui servira à déterminer les quatre constantes arbitraires que renfermeront les intégrales complètes de ses deux équations différentielles du second ordre. Quant à la constante arbitraire que contiendra la fonction φ du n° 300, on déduira sa valeur de la longueur donnée du fil, c'est-à-dire, de l'équation

$$\int_a^{a'} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\,dx = l,$$

dans laquelle on regarde y et z comme des fonctions de x. De cette manière, le problème sera complètement résolu.

§ III. *Équilibre d'une verge élastique.*

306. Nous entendons par cette dénomination une verge droite ou courbe, dont on ne peut changer la courbure sans y appliquer une ou plusieurs forces, et qui reprend sa forme naturelle dès que ces forces ont cessé d'agir, tandis qu'au contraire un fil parfaitement flexible conserve, sans le secours d'aucune force, la courbure qu'on lui a fait prendre, et n'est élastique que dans le sens de sa longueur. Pour qu'une verge soit élastique par rapport à la

flexion, il faut qu'elle soit formée d'une matière fort peu extensible et contractible; mais cela ne suffit pas : il faut encore que les dimensions de son épaisseur, quoique très petites par rapport à sa longueur, aient cependant une grandeur convenable; car, quelle que soit la matière de la verge, on peut toujours diminuer assez son épaisseur pour qu'elle n'ait plus aucune tendance sensible à reprendre la figure dont on l'a écartée, et qu'elle soit ainsi réduite à l'état d'un fil parfaitement flexible.

Lorsqu'une verge élastique est écartée de sa forme naturelle par des forces données, chacun des filets longitudinaux dont elle se compose peut éprouver trois effets différens : chaque partie, d'une longueur aussi petite qu'on voudra, peut être contractée ou dilatée, sa courbure naturelle peut être augmentée ou diminuée, et cette partie peut avoir été tordue sur elle-même. La tendance de chaque partie à reprendre son état naturel, dépend des attractions et répulsions mutuelles qui ont lieu entre les molécules de tous les corps et ne s'étendent qu'à des distances insensibles. Le calcul des forces totales qui en résultent et doivent faire équilibre aux forces données, appartient à la Physique mathématique : je renverrai, pour cet objet, à mon Mémoire sur l'*équilibre et le mouvement des Corps élastiques* *. Dans ce Traité, on formera les équations d'équilibre d'une verge élastique, en partant de principes secondaires qui sont généralement admis.

On appelle, en particulier, *lame élastique* un parallélipipède rectangle d'une petite épaisseur, que l'on courbe dans le sens de sa longueur, de manière qu'il se trouve compris entre deux surfaces cylindriques, dont les arêtes sont égales à sa largeur. Cette dimension peut avoir une grandeur quelconque; en la divisant par des plans très rapprochés et perpendiculaires à sa direction, la lame sera partagée en verges élastiques rectangulaires. Jacques Bernouilli a déterminé, le premier, la figure de la lame élastique en équilibre, d'après des considérations que nous allons développer, et qui serviront ensuite à la solution complète du problème, dans le cas d'une verge élastique quelconque.

307. Considérons une lame élastique *encastrée* par une de ses extrémités, c'est-à-dire, fixée de manière que l'un des deux petits rectangles qui la terminent perpendiculairement à sa longueur, ne puisse prendre aucun mouvement. Supposons qu'on la plie dans le sens de sa longueur au moyen d'une force appliquée à son autre bout, et qui sera la seule qui agisse sur la lame. Pour que la lame prenne une figure cylindrique, comme on vient de le dire, il faudra qu'elle soit terminée, à son extrémité libre, par un rectangle inflexible, au milieu duquel on appliquera la force donnée, dans un plan perpendiculaire à la largeur de la lame. Toutes les coupes longitudinales ou perpendiculaires à cette largeur seront égales; celle qui renferme la direction de la force donnée est représentée par la figure 77; et les courbes AMB et A'M'B' sont les sections des deux surfaces cylindriques de la lame, qui formaient ses deux faces planes dans son état naturel.

On suppose que tous les points qui appartenaient, dans cet état, à une même perpendiculaire à ces deux faces, sont encore situés, après que la lame a été pliée, sur une même normale aux deux surfaces cylindriques; ce qui est effectivement conforme à ce qu'on observe dans son changement de figure. Il en résulte que si MM' est une normale à la courbe AMB, elle sera aussi perpendiculaire à A'M'B', et contiendra tous les points de la lame qui étaient situés primitivement sur une des perpendiculaires à ses deux faces; il s'ensuit aussi que si l'on décompose la lame, dans son état naturel, en filets longitudinaux, et que la courbe CND représente un de ces filets après le changement de figure, elle coupera à angle droit en N la normale MM'.

Soit m un point de la courbe AMB, infiniment voisin de M; menons la normale mnm' aux trois lignes AMB, CND, A'M'B', qui les coupe en m, n, m'; les prolongemens de MNM', et mnm' se rencontreront en un point O, qui sera le centre de courbure commun à ces trois courbes. Appelons ρ le rayon de courbure du filet moyen, ou également éloigné de AMB et A'M'B'; σ la partie de ce filet comprise entre les deux normales MNM' et mnm'; u la distance du filet quelconque CND au filet moyen, et σ' la longueur de Nn. En considérant cette distance u comme positive ou comme négative, selon que CND se trouve, par rapport au filet moyen, du côté de la convexité AMB de la lame, ou du côté de sa concavité A'M'B', le rayon de courbure NO de CND sera égal à $\rho + u$, et les longueurs infiniment petites σ' et σ seront entre elles comme $\rho + u$ et ρ, de sorte que l'on aura

$$\sigma' = \sigma + \frac{u\sigma}{\rho}.$$

En se courbant, les filets longitudinaux auront éprouvé de très petites extensions ou contractions, et les longueurs σ' et σ, qui étaient égales auparavant, seront devenues inégales. Désignons par γ leur grandeur primitive, et faisons

$$\sigma = \gamma\,(1 + \delta), \qquad \sigma' = \gamma\,(1 + \delta');$$

δ et δ' étant de très petites fractions, positives ou négatives, selon que le filet moyen et le filet CND se seront allongés ou raccourcis. La fraction $\frac{u}{\rho}$ est aussi supposée très petite; si donc on néglige le

* *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome VIII.

produit de δ et $\frac{u}{\rho}$, on aura

$$\delta' = \delta + \frac{u}{\rho}$$

ce qui montre que quand le filet moyen n'aura pas changé de longueur, les filets situés du côté de la convexité se seront tous allongés, et les filets situés du côté de la concavité se seront tous raccourcis, les uns et les autres proportionnellement à leurs distances au filet moyen.

Cela posé, rendons invariable la forme de chacune des deux parties de la lame qui répondent à AMM'A' et Bmm'B', et que nous appellerons H et K, pour abréger. La partie H sera immobile; la partie K sera tirée vers H, ou en sera repoussée, par la tendance de la partie intermédiaire Mmm'M' à reprendre son état naturel et redevenir une tranche d'une épaisseur constante γ. Le filet Nn de cette tranche tendra à se contracter ou à se dilater, selon qu'il aura été allongé ou raccourci, c'est-à-dire, selon que la quantité δ' sera positive ou négative. La partie K sera donc tirée dans le premier cas, et poussée dans le second cas, par une force appliquée au point n; or, on suppose que cette force, provenant de l'action de Nn, est proportionnelle à la quantité δ' et normale à mnm', comme si ce filet Nn était isolé.

En adoptant cette hypothèse, je représenterai par $\alpha\delta'$ la force dont il s'agit, rapportée à l'unité de surface, et, conséquemment, par $\alpha\delta'\lambda\, du$ la force normale exercée sur l'élément transversal de la surface K, qui répond au point n; α étant une constante dépendante de la matière de la lame, λ sa largeur, et $\lambda\, du$ l'aire de cet élément. Si donc on désigne par 2ε l'épaisseur de la lame, et qu'on représente par T la force totale qui tirera ou poussera K, selon qu'elle sera positive ou négative, on aura

$$T = \alpha\lambda \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta'\, du,$$

et, en mettant pour δ' sa valeur,

$$T = 2\alpha\lambda\varepsilon\delta.$$

Soit, en outre, μ le moment des forces normales à la surface de K, pris par rapport à l'axe transversal également éloigné des deux faces de la lame; nous aurons aussi

$$\mu = \alpha\lambda \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta' u\, du,$$

et, par conséquent,

$$\mu = \frac{2\alpha\lambda\varepsilon^3}{3\rho}.$$

On voit par là 1°, que la force T, qui tend à contracter ou à dilater une tranche quelconque de la lame, est proportionnelle à l'extension positive ou négative du filet moyen, et indépendante de sa courbure; 2° que son moment μ est, au contraire, indépendant de cette extension, et en raison inverse du rayon de courbure; 3°, que la matière et la largeur de la lame restant les mêmes, la valeur de T est proportionnelle à son épaisseur, et celle de μ, au cube de cette dimension.

Quand le filet moyen n'a pas changé de longueur, on a $\delta = 0$ et $T = 0$, les forces parallèles qui tirent ou poussent K se réduisent à deux, égales et contraires, mais non directement opposées, dont le moment, par rapport à l'axe transversal perpendiculaire à ces forces, est toujours égal à μ. Cette quantité μ est ce qu'on appelle le *moment de l'élasticité*, lequel est proportionnel, en chaque point, à la courbure de la lame, ou à l'angle de contingence de son filet moyen.

308. Il est facile actuellement de former les équations d'équilibre de cette lame. D'abord, si l'on appelle T' ce que devient la force T au point M, on voit que la tranche infiniment petite qui répond à Mmm'M', sera tirée ou poussée, d'un côté par cette force T', et de l'autre par une force égale et contraire à T; et puisque, par hypothèse, aucune force donnée n'agit sur cette tranche, il faudra donc qu'on ait $T' = T$. Ainsi la force T est constante dans toute la longueur de la lame, et, par conséquent, égale à la composante suivant cette longueur, de la force donnée qui agit à son extrémité libre. La dilatation δ sera aussi constante, proportionnelle à cette force, et positive ou négative selon que cette force tendra à allonger ou à contracter les filets longitudinaux. Elle n'aura aucune influence sur la figure de la lame; mais quand on l'aura mesurée, elle pourra servir à déterminer la valeur de la constante α, relative à la matière de la lame. En représentant par ϖ un poids équivalent à la force qui tire la lame dans le sens de sa longueur, et par ω l'aire de chaque section transversale de la lame, on aura

$$\omega = 2\lambda\varepsilon, \qquad T = \varpi = \alpha\omega\delta, \qquad \alpha = \frac{\varpi}{\omega\delta}.$$

Pour déterminer la figure de la lame, menons par le point A, dans le plan du filet moyen, deux axes rectangulaires Ax et Ay, dont le premier sera tangent à la courbe AMB, et représentera la direction de la lame dans son état naturel, et dont le second sera tourné du côté de sa concavité. Soient x et y les coordonnées rapportées à ces deux axes, d'un point quelconque du filet moyen; a et b, celles de son extrémité libre, que nous prendrons pour le point d'application de la force donnée qui tient la lame en équilibre; P et Q les composantes de cette force, suivant les prolongemens de a et b. Par le point qui répond à x et y, menons l'axe perpendiculaire au plan de la figure, auquel répond le moment désigné par μ et faisons une section perpendiculaire au filet moyen. Pour l'équilibre de la partie de la lame comprise entre cette section et son extrémité libre, il faudra que le mo-

ment μ, ajouté aux momens de P et Q, par rapport au même axe, donne une somme égale à zéro, en ayant égard au sens dans lequel les forces dont μ est le moment, et les forces P et Q, tendent à faire tourner cette partie de la lame; on aura de cette manière

$$\mu + P(b - y) - Q(a - x) = 0.$$

En prenant l'abscisse x pour la variable indépendante, et observant que la lame est convexe vers l'axe Ax, on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} : \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

où l'on regardera le radical comme une quantité positive. Si donc on substitue cette valeur dans celle de μ, et celle-ci dans l'équation précédente, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{2}{3}\alpha\lambda\epsilon^3 = \zeta,$$

il en résultera

$$\zeta \frac{d^2 y}{dx^2} = [Q(a - x) - P(b - y)] \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1)$$

pour l'équation de la courbe formée par la lame élastique en équilibre.

Son intégrale contiendra deux constantes arbitraires que l'on déterminera par les conditions $y = \epsilon$ et $\frac{dy}{dx} = 0$, quand $x = 0$, où, si l'on veut $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$, pour cette valeur de x, à cause de la petitesse de ϵ. En faisant ensuite $x = a$ et $y = b$ dans cette intégrale, on aura une équation en a et b, que l'on joindra à celle qui résultera de la longueur donnée de la lame; on aura alors les deux équations nécessaires pour déterminer ces inconnues a et b; et la *courbe élastique* proprement dite, sera complètement déterminée.

309. Si la lame, au lieu d'être encastrée, est entièrement libre à son extrémité A, il faudra pour la maintentr en équilibre, appliquer à cette extrémité une force dont les composantes soient égales et contraires à P et Q; en prenant l'extrémité correspondante du filet moyen pour son point d'application, il faudra, de plus, que la résultante de P et Q vienne passer par ce point; ce qui exigera qu'on ait

$$Qa = P(b - \epsilon).$$

Cette équation suffira, quand la lame sera retenue par un axe fixe, passant par cette extrémité du filet moyen, et dirigé dans le sens de sa largeur. Si elle est simplement posée sur un plan perpendiculaire à sa longueur, qui ne l'empêche pas de tourner autour de l'arête d'une de ses deux faces, il faudra que le frottement de cette arête contre le plan, ou une autre force, empêche la lame de glisser.

La lame n'étant point encastrée, la direction de son plan tangent en A ne sera plus connue; si l'on place toujours en ce point l'origine des coordonnées x et y, on aura encore $y = \epsilon$ ou $y = 0$, quand $x = 0$; mais on ne pourra plus prendre l'axe des x sur la tangente en A, dont la direction ne sera pas donnée *à priori*. Cet axe sera alors la direction donnée de la force P, et l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$, quand $x = 0$, devra être remplacée, pour la détermination des constantes arbitraires, par l'équation précédente, relative aux momens des forces P et Q, qu'on pourra réduire à $Qa = Pb$.

310. Supposons qu'on ait $P = 0$; en sorte que la lame soit pliée par une force Q perpendiculaire à sa direction primitive; ce qui est, par exemple, le cas d'une lame horizontale, encastrée par un bout, et à l'autre bout de laquelle on suspend un poids donné Q.

Je fais en ce cas

$$\zeta = c^2 Q;$$

c étant une ligne dont la longueur donnée sera généralement très grande, à moins que le poids Q ne soit aussi très considérable. L'équation (1) deviendra

$$c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} : \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = a - x; \quad (2)$$

et en intégrant de manière qu'on ait $\frac{dy}{dx} = 0$ quand $x = 0$, on aura

$$2c^2 \frac{dy}{dx} : \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 2ax - x^2.$$

On en déduit

$$dy = \frac{(2ax - x^2)\, dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}},$$

$$ds = \frac{2c^2\, dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}};$$

ds étant l'élément différentiel de la courbe. Ces formules s'intégreront exactement par le moyen des fonctions elliptiques; mais à cause de la grandeur

de c, on a $s = x$, à très peu près, et l'on peut réduire à

$$dy = \frac{1}{2c^2}\left(2ax - x^2\right) dx,$$

la valeur de dy; d'où l'on tire

$$6c^2 y = 3ax^2 - x^3,$$

pour l'équation de la courbe.

La lame s'écartera peu de la direction horizontale; l'abscisse a pourra être prise pour sa longueur, et l'ordonnée b exprimera son plus grand écart. A cause de

$$3Qc^2 = a\omega\varepsilon^2,$$

si l'on fait $2\varepsilon\lambda = \omega$, comme précédemment, nous aurons

$$a\omega\varepsilon^2 b = a^3 Q,$$

dans le cas de $x = a$ et $y = b$. Il en résulte donc que la nature de la lame restant la même, la quantité b dont elle fléchira sera proportionnelle au poids Q et au cube de la longueur a, et en raison inverse du carré de son épaisseur ε et de l'aire ω de sa section transversale.

Si l'on substitue pour $a\omega$ sa valeur $\frac{\varpi}{\delta}$ du n° 308, et qu'on appelle h l'allongement total $a\delta$ de la lame, produit par un poids ϖ, on aura

$$b = \frac{ha^2 Q}{\varepsilon^2 \varpi}.$$

En supposant $\varpi = Q$, on en conclura que si un même poids Q, appliqué à l'extrémité libre d'une lame élastique, agit successivement dans le sens de sa longueur et perpendiculairement à sa longueur, l'extension h et la flexion b, supposées très petites par rapport à la longueur a, seront entre elles comme les carrés de l'épaisseur et de cette longueur.

311. Quelles que soient les forces P et Q, on obtiendra toujours une intégrale première de l'équation (1) en la réduisant à la forme de l'équation (2) par la transformation des coordonnées. Nous nous bornerons à considérer le cas où la lame, appuyée contre un plan et non encastrée, s'écarte peu de sa forme naturelle. Ce sera, par exemple, un ressort posé sur un plan horizontal par son extrémité inférieure A, et chargé d'un poids donné à son extrémité supérieure B. On suppose qu'en se pliant sous cette charge, le ressort s'écarte très peu de la verticale AB, et que dans toute sa longueur, la tangente à la courbe qu'il forme dans son état d'équilibre, fait un très petit angle avec cette ligne droite. La figure 78 représente différentes formes qu'il peut prendre dans cet état.

Prenons pour axes des x et des y, la verticale Ax dirigée en sens contraire de la pesanteur, et l'horizontale Ay. La quantité $\frac{dy}{dx}$ sera très petite, par hypothèse; nous négligerons son carré dans l'équation (1); on aura aussi $Q = 0$, puisque la force qui agit à l'extrémité B est verticale; en vertu de l'équation $Qa = Pb$ du n° 309, il s'ensuivra $b = 0$; et comme le poids P sera dirigé de B vers A, il faudra changer le signe de cette force dans l'équation (1), qui la suppose dirigée en sens contraire. De cette manière, cette équation deviendra simplement

$$c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -\pi^2 y,$$

en faisant, pour abréger,

$$c = \frac{1}{3} a\omega\varepsilon^2 = -\frac{c^2}{\pi^2} P.$$

On représente ici par ω l'aire de la section du ressort, perpendiculaire à sa longueur; par ε sa demi-épaisseur, dans le sens où il est plié; et par a une quantité dépendante de la matière dont il est formé. Ces trois quantités sont supposées constantes, et par suite c est une ligne de grandeur constante et donnée.

A cause que l'on a $y = 0$, quand $x = 0$, on déduit de cette équation

$$y = k \sin \frac{\pi x}{c}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pi k}{c} \cos \frac{\pi x}{c};$$

k étant une constante arbitraire qui doit être nulle ou très petite par rapport à c.

Quand on aura $k = 0$, le ressort restera droit, et sa longueur AB sera un peu diminuée par la pression du poids P. Lorsque ce coefficient k ne sera pas nul, le ressort se pliera; au point B, on aura $x = a$ et $y = b = 0$; en désignant par i un nombre entier, il faudra donc qu'on ait

$$a = ic,$$

pour la valeur de a ou de AB. Si l'on appelle l la longueur du ressort, on aura aussi

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{\pi^2 k^2}{c^2} \cos^2 \frac{\pi x}{c}}\, dx;$$

en négligeant la quatrième puissance de $\frac{k}{c}$, et mettant pour a sa valeur, il vient

$$l = ic\left(1 + \frac{\pi^2 k^2}{4c^2}\right);$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{2c}{\pi}\sqrt{\frac{l}{ic} - 1}. \qquad (3)$$

Ainsi le coefficient k sera nul ou exprimé par cette formule.

312. Voici les conséquences remarquables qui se déduisent de ce résultat.

1° Tant que l sera moindre que c, la formule (3) sera imaginaire pour toutes les valeurs du nombre entier i; on ne pourra pas prendre le coefficient k différent de zéro, et le ressort ne sera pas plié par le poids P.

2° soit parce qu'on aura augmenté la longueur du ressort, soit parce qu'on aura diminué la quantité c en faisant croître le poids P, supposons que l surpasse c; la valeur de k, différente de zéro et qui répond à $i = 1$, sera réelle, et le ressort pourra être plié par ce poids. En désignant par f une fraction très petite, et faisant

$$l = c\left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4}\right),$$

on aura

$$i = 1, \quad a = c, \quad k = fa;$$

l'équation de la courbe du ressort sera donc

$$y = fa \sin\frac{\pi x}{a},$$

où l'on voit qu'elle ne coupera pas la verticale entre les deux points A et B.

3° Le rapport $\frac{l}{c}$ continuant à croître, s'il vient à surpasser 2, la valeur de k qui répond à $i = 2$ sera réelle, et le ressort pourra prendre une figure différente de la précédente. En désignant par f' une fraction très petite, et faisant

$$l = 2c\,(1 + \pi^2 f'^2),$$

nous aurons

$$i = 2, \quad a = 2c, \quad k = f'a;$$

d'où il résultera

$$y = f'a \sin\frac{2\pi x}{a};$$

ce qui montre que, dans ce cas, la courbe coupera la verticale au milieu de AB, qui répond à $x = \frac{1}{2}a$.

4° En continuant ainsi, on voit que si l surpasse un peu ic, et qu'en désignant par φ une très petite fraction, on ait

$$l = ic\left(1 + \frac{i^2\pi^2\varphi^2}{4}\right),$$

on pourra prendre

$$a = ic, \qquad k = \varphi a;$$

ce qui donnera

$$y = \varphi a \sin\frac{i\pi x}{a};$$

équation d'une courbe qui coupera la droite AB en un nombre $i + 1$ de points équidistans, y compris A et B.

Lorsque l surpasse un multiple de c d'une quantité qui n'est pas très petite, la valeur de k, donnée par la formule (3), cesse d'être très petite par rapport à c; et celle de $\frac{dy}{dx}$ n'étant plus alors une très petite fraction, la figure du ressort ne peut plus être déterminée par l'analyse précédente. Il faut observer que, dans tous les cas, la figure rectiligne, qui répond à $k = 0$, est possible; mais elle n'est stable et nécessaire que quand l est moindre que c.

313. On entend par la *force* d'un ressort, supposé vertical pour fixer les idées, le plus grand poids qu'il peut supporter sans fléchir. Ce poids P est déterminé par l'équation $c = l$, qui donne

$$P = \frac{\pi^2 \alpha\omega t^2}{3l^2};$$

où l'on voit que, toutes choses d'ailleurs égales, la force d'un ressort est en raison inverse du carré de sa longueur. Le ressort étant un parallélipipède rectangle, on voit aussi que si l'on essaie de plier successivement les faces adjacentes, sa force sera proportionnelle au carré de l'épaisseur perpendiculaire à la face qu'on voudra plier.

Quant à la grandeur absolue de P, on la calculera en mettant dans la formule précédente la valeur de α, que l'on déduit soit de l'extension h de ce ressort, soit de sa flexion b, que produirait un poids ϖ; or, d'après les nos 308 et 310, et à cause de $a\delta = h$ et $a = l$, ces valeurs sont

$$\alpha = \frac{\varpi l}{\omega h}, \quad \alpha = \frac{\varpi l^3}{\omega t^2 b};$$

par conséquent, on aura

$$P = \frac{\pi\varpi t^2}{3lh}; \quad P = \frac{\pi\varpi l}{3b}.$$

314. Les résultats du n° 307 s'étendent aisément à une verge élastique, lorsqu'on la suppose droite ou à simple courbure dans son état naturel, et qu'en la pliant elle reste encore à simple courbure et n'éprouve aucune torsion.

On prendra, dans ce cas, pour le filet moyen, celui qui passe par les centres de gravité de toutes les sections perpendiculaires à sa longueur, lesquelles pourront être constantes ou variables, pourvu qu'en chaque point leurs dimensions soient très petites par rapport au rayon de courbure de la verge. Soit ω l'aire de l'une de ces sections, faite par un point quelconque du filet moyen; décomposons ω en élémens perpendiculaires au plan de ce filet; et soit vdu l'aire de l'élément qui répond à la distance u de ce même filet; la variable u pouvant être positive ou négative, et v désignant une fonction donnée de u. Soient aussi k et $-k'$ les valeurs extrêmes de u; nous aurons

$$\int_{-k'}^{k} vdu = \omega, \quad \int_{-k'}^{k} vudu = 0;$$

la seconde équation résultant de ce que l'origine de la variable u est le centre de gravité de ω.

Désignons par σ, σ', δ, δ', ρ, les mêmes quantités que dans le n° 307, et par γ, γ', r, ce qu'étaient σ, σ', ρ, dans l'état naturel de la verge élastique; on aura, pour les deux états de cette verge,

$$\gamma' = \gamma + \frac{u\gamma}{r}, \quad \sigma' = \sigma + \frac{u\sigma}{\rho},$$

et, pour le passage de l'un à l'autre,

$$\sigma = \gamma\ (1 + \delta), \quad \sigma' = \gamma'\ (1 + \delta').$$

Si donc on néglige les produits $\frac{\delta u}{r}$ et $\frac{\delta u}{\rho}$, on en déduira

$$\delta' = \delta + u\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right);$$

valeur qui coïncide avec celle du numéro cité, dans le cas de la verge naturellement droite, où l'on a $r = \infty$.

Soit encore T la somme des forces perpendiculaires à ω qui tirent ou poussent l'une des deux parties de la verge, séparées par cette section normale. Appelons μ le moment de ces forces par rapport à l'axe passant par le centre de gravité de ω, et perpendiculaires au plan du filet moyen; d'après l'hypothèse du n° 307, on aura

$$T = \alpha \int_{-k'}^{k} \delta' vdu, \quad \mu = \alpha \int_{-}^{k} \delta' vudu;$$

α étant une quantité dépendante de la matière de la verge, qu'on suppose constante dans l'étendue de chaque section ω, mais qui pourra varier d'un point à un autre du filet moyen. En substituant pour δ' sa valeur précédente, et faisant, pour abréger,

$$\int_{-k'}^{k} vu^2\, du = \frac{1}{3}\omega q^2,$$

il en résultera

$$T = \alpha\omega\delta, \quad \mu = \frac{\alpha\omega q^2}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right).$$

Quand la verge élastique sera à double courbure, dans son état naturel ou après son changement de figure, la force T aura encore la même expression; de plus, le filet moyen étant toujours celui qui passe par les centres de gravité de toutes les sections normales, et en désignant par r et ρ ses rayons de courbure en un même point, avant et après ce changement, on pourra prendre cette expression de μ pour le moment de l'élasticité par rapport à un axe passant par ce point et perpendiculaire au plan osculateur du filet moyen; mais il faudra, en outre, avoir égard à la torsion de la verge, comme nous le ferons tout à l'heure.

315. En comparant cette valeur de μ à celle du n° 307, on voit que l'équation différentielle seconde de la courbe plane formée par le filet moyen d'une verge élastique qui n'a éprouvé aucune torsion, ne différera de celle qui répond à la lame élastique proprement dite, qu'en ce qu'elle contiendra $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$ au lieu de $\frac{1}{\rho}$, et la quantité q à la place de la demi-épaisseur α. Si la verge est homogène, et qu'elle soit, dans son état naturel, un prisme ou un cylindre allongé, les trois quantités α, ω, q, seront constantes, et l'on aura $r = \infty$. On en conclut que la flexion d'une verge naturellement droite, produite par un poids Q perpendiculaire à sa direction, et la force de ce ressort, se déduiront des valeurs de b et P trouvées dans les n°s 310 et 313, en y mettant q à la place de α. Par cette substitution, l étant la longueur de cette verge, on aura

$$b = \frac{l^3 Q}{\alpha\omega q^2}, \quad P = \frac{\pi^2 \alpha\omega q^2}{3l^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$b = \frac{\pi^2 lQ}{3P}, \quad P = \frac{\pi^2 \alpha}{l^2}\int_{-k'}^{k} vu^2\, du.$$

Pour deux verges différentes, mais de même longueur, les flexions produites par un même poids seront donc en raison inverse des forces de ressort; en sorte qu'il suffira de comparer entre elles les grandeurs de ces forces, dans les différentes hypothèses sur le contour de la section normale.

Supposons que la section normale soit un triangle isocèle, et qu'on veuille plier la verge, de manière que la face correspondante à la base de ce triangle devienne une surface cylindrique, concave ou convexe. Soient a et c la base et la hauteur de ce triangle. Dans le cas de la convexité, vers laquelle sont dirigées les valeurs positives de u (n° 307), nous aurons

$$k = \frac{1}{3}c, \quad k' = \frac{2}{3}c, \quad v = \frac{a}{c}\left(\frac{2}{3}c + u\right),$$

et il en résultera

$$P = \frac{\pi^2 aac^3}{36l^2}.$$

Dans le cas de la concavité, on aura

$$k = \frac{2}{3}e, \quad k' \leqq \frac{1}{3}e, \quad v = \frac{a}{c}\left(\frac{1}{3}c + u\right);$$

d'où l'on conclut

$$P = \frac{\pi^2 aac^3}{12l^2};$$

ce qui montre que, dans ce second cas, la force du ressort est triple de celle qui a lieu dans le premier.

Si la section normale est un carré représenté par f^2, et qu'il s'agisse de plier le ressort, de sorte que deux de ses faces opposées deviennent des surfaces cylindriques, on aura

$$k = k' = \frac{1}{2}f, \quad v = f, \quad P = \frac{\pi^2 af^4}{12l^2};$$

Si elle est un cercle dont le rayon soit k, nous aurons

$$k' = k, \quad v = 2\sqrt{k^2 - u^2}, \quad P = \frac{\pi^3 ak^4}{4l^2};$$

et en supposant l'aire de la section normale égale dans les deux cas, de sorte qu'on ait $f^2 = \pi k^2$, on voit que la force de ressort qui a lieu dans le premier cas surpasse celle qui répond au second, dans le rapport de π à 3.

Supposons encore que le ressort cylindrique soit un tuyau creux, dont les surfaces concentriques, intérieure et extérieure, aient g et g' pour rayons. Pour avoir la force de ce ressort, il faudra mettre successivement g et g' à la place de k dans la dernière valeur de P, et retrancher les résultats l'un de l'autre, ce qui donne

$$P = \frac{\pi^3 a(g'^2 + g^2)(g'^2 - g^2)}{4l^2};$$

Si l'aire $\pi(g'^2 - g^2)$ de la section normale est égale à πk^2, on aura donc

$$P = \frac{\pi^3 ak^2(k^2 + 2g^2)}{4l^2};$$

d'où l'on conclut que le volume, la longueur et la matière étant les mêmes, la force d'un ressort creux est plus grande que celle d'un ressort plein, dans le rapport de $1 + \frac{2g^2}{k^2}$ à l'unité ; $2g$ étant le diamètre intérieur, et πk^2 l'aire de la section normale.

316. Formons maintenant les équations d'équilibre d'une verge élastique quelconque, dont tous les points sont sollicités par des forces données.

Appelons A et B les deux extrémités du filet moyen. Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M de cette courbe, s l'arc AM, ω la section normale de la verge faite par le point M, γ sa densité en ce point, et, conséquemment, $\gamma\omega ds$ la masse d'une tranche infiniment mince de la verge. Désignons par $X\gamma\omega ds$, $Y\gamma\omega ds$, $Z\gamma\omega ds$, les forces données qui agissent sur cette masse parallèlement aux axes des x, y, z, de sorte que X, Y, Z, soient ces forces rapportées à l'unité de masse. La somme de leurs composantes, suivant la tangente en M au filet moyen, et tendant à augmenter l'arc s, sera

$$\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)\gamma\omega ds.$$

Représentons aussi par T la force provenant de l'action d'une partie de la verge sur la partie adjacente, appliquée à l'une des faces de la tranche $\gamma\omega ds$, perpendiculaire à ω, et tendant à diminuer ou à augmenter l'arc s, selon qu'elle est positive ou négative. L'autre face de $\gamma\omega ds$ sera tirée ou poussée en sens contraire par une force égale à $T + dT$; par conséquent, pour l'équilibre de cette tranche, il faudra que la force dT soit égale et contraire à la force tangentielle donnée, ou qu'on ait

$$dT + \gamma\omega(Xdx + Ydy + Zdz) = 0; \qquad (a)$$

ce qui s'accorde avec l'équation (3) du n° 300.

A cause du peu d'extensibilité de la matière de la verge, on pourra prendre, dans cette équation (a), pour γ et ω la densité et la section normale de la verge au point M, dans son état naturel. Si ces deux quantités sont constantes, et que la formule comprise entre les parenthèses soit une différentielle exacte, on obtiendra, par l'intégration immédiate, la valeur de T; et, parce que l'on a $T = \omega\omega\delta$ (n° 307), on en conclura la dilatation positive ou négative de l'élément ds, qui se sera allongé dans le rapport de $1 + \delta$ à l'unité ; mais cela ne fera pas connaître la dilatation de la section normale ω, ni le changement de densité de la verge au point M. Or, d'après ce que j'ai fait voir dans le Mémoire cité au commencement de ce paragraphe, l'allongement où le raccourcissement de ds est toujours accompagné d'une diminution ou d'une augmentation de ω, mais telle, que le volume ωds variera dans le même sens que ds, et la densité γ, en sens inverse. Il s'ensuit que quand une verge homogène, prismatique ou cylindrique, est attachée par un bout, et tirée à son autre extrémité par une force dirigée suivant le prolongement de sa longueur, elle éprouvera, à la fois, une extension et une augmentation de volume, proportionnelles à cette force, ce qui a été effectivement confirmé par l'expérience. Réciproquement, si cette verge est posée verticalement sur un plan horizontal, et chargée d'un poids à sa partie supérieure, qui ne la fasse pas plier, elle se raccourcira, et, en même temps,

son volume sera diminué proportionnellement à la grandeur de ce poids.

317. Prenons sur l'arc AM du filet moyen un point m infiniment voisin de M; par ce point m, faisons une section normale; et concevons que la partie de la verge comprise entre cette section et l'extrémité A, soit rendue tout-à-fait immobile, et que la partie comprise entre l'autre bout B et la section faite par le point M, devienne seulement de forme invariable. Cela étant, cherchons les conditions d'équilibre de cette seconde partie, que nous appellerons K.

En vertu de la torsion de la verge, les points de la tranche comprise entre les deux sections normales faites par M et m, seront sollicités par des forces qui tendront à détordre ses différens filets longitudinaux, et agiront dans des plans perpendiculaires à Mm, c'est-à-dire, à la tangente en M au filet moyen. Ces forces tendront à faire tourner K autour de cette droite, en sens contraire de la torsion. Soit τ leur moment par rapport à cette droite, que l'on appellera le *moment de la torsion* de la verge, correspondant au point M. Si l'on mène par ce point des parallèles aux axes des x, y, z, et si l'on observe que l'axe de ce moment fait, avec ces droites, des angles dont les cosinus sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, on en conclura (n° 281)

$$-\tau\frac{dx}{ds},\quad -\tau\frac{dy}{ds},\quad -\tau\frac{dz}{ds},$$

pour les momens par rapport à ces trois parallèles, des forces qui agissent sur K dans le sens de la torsion.

Désignons par μ, le moment de l'élasticité relatif au point M, c'est-à-dire, le moment des forces dont T est la somme, par rapport à un axe mené par ce point et perpendiculaire au plan osculateur du filet moyen; r et ρ étant les rayons de courbure en ce même point, dans l'état naturel et après le changement de forme de la lame, et $\mathcal{C}$ désignant une quantité positive, dépendant de la matière et de la section normale au point M, nous aurons (n° 314)

$$\mu = \mathcal{C}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right);$$

et si l'on appelle f, g, h, les angles que l'axe de ce moment fait avec les parallèles aux axes des x, y, z, menés par le point M, les momens de l'élasticité par rapport à ces trois droites seront

$$\mu\cos f,\qquad \mu\cos g,\qquad \mu\cos h.$$

Soient M' un point quelconque de l'arc MB; x', y', z', ses trois coordonnées; s' l'arc AM', et γ', ω', X', Y', Z', ce que deviennent γ, ω, X, Y, Z, relativement à M'. En appelant l la longueur totale du filet moyen, et faisant

$$\int_s^l [Y'(z'-z)-X'(y'-y)]\gamma'\omega' ds' = Z_{,},$$

$$\int_s^l [X'(z'-z)-Z'(x'-x)]\gamma'\omega' ds' = Y_{,},$$

$$\int_s^l [Z'(y'-y)-Y'(z'-z)]\gamma'\omega' ds' = X_{,},$$

ces trois quantités $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, seront les momens des forces données qui agissent sur K, par rapport aux axes menés par le point M, suivant les directions des x, y, z.

Enfin, supposons que des forces particulières agissent à l'extrémité libre de K; représentons par P, Q, R, les sommes de leurs composantes parallèles aux axes des x, y, z, et par a', b', c', les coordonnées du point d'application de leur résultante; leurs momens par rapport aux mêmes axes que $Z_{,}$, $Y_{,}$, $X_{,}$, seront

$$\begin{aligned} &Q(a'-x)-P(b'-y),\\ &P(c'-z)-R(a'-x),\\ &R(b'-y)-Q(c'-z); \end{aligned}$$

et si l'on désigne par a, b, c, les coordonnées de l'extrémité B du filet moyen, on pourra remplacer ces momens par

$$\begin{aligned} &Q(a-x)-P(b-y)+R',\\ &P(c-z)-R(a-x)+Q',\\ &R(b-y)-Q(c-z)+P', \end{aligned}$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} &Q(a'-a)-P(b'-b)=R',\\ &P(c'-c)-R(a'-a)=Q',\\ &R(b'-b)-Q(c'-c)=P'. \end{aligned}$$

Généralement, les coordonnées a'; b', c', seront distinctes de a, b, c, parce que les forces extrêmes P, Q, R, ne seront pas appliquées immédiatement à la verge élastique, et qu'elles agiront aux extrémités du bras de levier. Soit que ces forces aient ou non une résultante unique, les quantités P', Q', R', seront leurs momens par rapport à des axes menés par le point B, parallèlement à ceux des x, y, z,; si donc on suppose qu'on ait en ce point

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha',\qquad \frac{dy}{ds}=\cos\beta',\qquad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma';$$

et qu'on fasse

$$P'\cos\alpha',+Q'\cos\beta',+R'\cos\gamma'=L,$$

cette quantité L exprimera le moment des forces extrêmes par rapport à la tangente au point B (n° 281); d'où l'on peut déjà conclure que L sera le moment de la torsion extrême, où la valeur de τ relative à ce même point.

Cela posé pour l'équilibre de la partie K de la verge élastique, il faudra que la somme des momens par rapport à chaque axe, de toutes les forces qui agissent sur ses différentes tranches et à ses extrémités, soit égale à zéro; ce qui donne ces trois équations

$$\left.\begin{aligned}
&\mu \cos f - \tau \frac{dx}{ds} + X_{,} + P' + R\,(b - y) - Q\,(c - z) = 0,\\
&\mu \cos g - \tau \frac{dy}{ds} + Y_{,} + Q' + P\,(c - z) - R\,(a - x) = 0,\\
&\mu \cos h - \tau \frac{dz}{ds} + Z_{,} + R' + Q\,(a - x) - P\,(b - y) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

318. D'après les formules du n° 19, on a

$$\cos f = \frac{dy d^2 z - dz d^2 y}{\lambda ds^3},$$

$$\cos g = \frac{dz d^2 x - dx d^2 z}{\lambda ds^3},$$

$$\cos h = \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{\lambda ds^3};$$

λds^3 étant la racine carrée de la somme des carrés des trois numérateurs. Il en résulte

$$d.\,\mu \cos f = dy\, d.\,\frac{\mu d^2 z}{\lambda ds^3} - dz\, d.\,\frac{\mu d^2 y}{\lambda ds^3},$$

$$d.\,\mu \cos g = dz\, d.\,\frac{\mu d^2 x}{\lambda ds^3} - dx\, d.\,\frac{\mu d^2 z}{\lambda ds^3},$$

$$d.\,\mu \cos h = dx\, d.\,\frac{\mu d^2 y}{\lambda ds^3} - dy\, d.\,\frac{\mu d^2 x}{\lambda ds^3},$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx}{ds}\, d.\,\mu \cos f + \frac{dy}{ds}\, d.\,\mu \cos g + \frac{dz}{ds}\, d.\,\mu \cos h = 0,$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\, d.\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d.\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\, d.\,\frac{dz}{ds} = 0.$$

Si donc on ajoute les différentielles des équations (b), après les avoir multipliées par $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, on aura en réduisant;

$$d\tau = \frac{dx}{ds}\, d\,X_{,} + \frac{dy}{ds}\, dY_{,} + \frac{dz}{ds}\, dZ_{,};$$

mais à cause que les quantités soumises à l'intégration dans les expressions de $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, s'évanouissent à la limite $s'=s$, il suffit (n° 14) de différencier sous les signes $\int$ par rapport à x, y, z, pour obtenir les valeurs de $dX_{,}$, $dY_{,}$, $dZ_{,}$; on a donc simplement

$$dX_{,} = dz \int_{,}^{l} Y'\gamma'\omega' ds' - dy \int_{,}^{l} Z'\gamma'\omega' ds',$$

$$dY_{,} = dx \int_{,}^{l} Z'\gamma'\omega' ds' - dz \int_{,}^{l} X'\gamma'\omega' ds',$$

$$dZ_{,} = dy \int_{,}^{l} X'\gamma'\omega' ds' - dx \int_{,}^{l} Y'\gamma'\omega' ds';$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle se réduit à $d\tau = 0$.

Ainsi le moment de la torsion est constant dans toute la longueur d'une verge élastique en équilibre, quelles que soient les forces qui y sont appliquées.

Sa valeur sera donc partout la même qu'à chacun des deux bouts de la verge; et il est facile de vérifier qu'au point B, on a $\tau = L$, comme on l'a dit plus haut. En effet, en ce point, on a $x=a$, $y=b$, $z=c$; les intégrales $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, s'évanouissent et les équations (b) deviennent

$$\tau \cos \alpha' = \mu \cos f + P',$$
$$\tau \cos \beta' = \mu \cos g + Q',$$
$$\tau \cos \gamma' = \mu \cos h + R'.$$

A cause que la normale au plan osculateur du filet moyen et la tangente à cette courbe, sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a, en ce même point B,

$$\cos \alpha' \cos f + \cos \beta' \cos g + \cos \gamma' \cos h = 0;$$

en ajoutant donc les équations précédentes, après les avoir multipliées par $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$, la quantité μ disparaîtra, et, d'après la valeur de L, on aura $\tau = L$.

Le moment de la torsion peut seul se déduire des équations d'équilibre; quant à la torsion elle-même, sa grandeur est variable le long de la verge, lorsque la matière ou la section normale varie d'un point à un autre. Si la verge est homogène, et que la section normale soit constante, la différence des angles de torsion est la même aux extrémités de deux parties de la verge, d'égales longueurs, et proportionnelle aux longueurs, quand elles sont

différentes. Supposons, pour fixer les idées, qu'une verge homogène, prismatique ou cylindrique, soit encastrée par un bout, et qu'on applique à son autre extrémité deux forces égales, parallèles et contraires, agissant à distances égales et de deux côtés différens; cette verge restera droite; mais elle se tordra sur elle-même, proportionnellement à sa longueur et au moment de ces deux forces par rapport à son filet moyen, lequel moment sera la valeur de la quantité L. J'ai trouvé, en outre, dans le Mémoire déjà cité (n° 306), que si la section normale de cette verge est un cercle, la quantité de la torsion sera proportionnelle, toutes choses d'ailleurs égales, à la quatrième puissance de son diamètre; ce qui est conforme à l'expérience.

319. Deux des équations (*b*), ou deux combinaisons quelconques de ces équations, après qu'on y aura substitué la valeur de μ et mis L à la place de r, serviront à déterminer la figure de la verge en équilibre. Si elle est droite dans son état naturel, et que toutes les forces qui y sont appliquées soient comprises dans un même plan, les trois équations (*b*) se réduiront à une seule qui sera celle de la courbe plane formée par le filet moyen.

Prenons le plan de ces forces pour celui des x et y; nous aurons

$$s = 0, \quad \cos f = 0, \quad \cos g = 0,$$
$$c = 0, \quad c' = 0, \quad R = 0, \quad \cos\gamma' = 0;$$

d'où il résultera

$$X_{,} = 0, \quad Y_{,} = 0, \quad P' = 0, \quad Q' = 0, \quad r = L = 0;$$

et les deux premières équations (*b*) s'évanouiront. A cause de $r = \infty$, la valeur de μ se réduira à $\frac{C}{\rho}$; on aura aussi $\cos h = \pm 1$; mais en ayant égard au sens de l'action de T sur la partie K de la verge (n° 314), il est aisé de voir qu'il faudra prendre $\cos h = -1$ dans la troisième équation (*b*), qui deviendra, de cette manière,

$$\left.\begin{aligned} &\int_s^l [Y'(x'-x) - X'(y'-y)]\gamma'\omega ds' \\ &\quad + R' + Q(a-x) - P(b-y) = \frac{C}{\rho} \end{aligned}\right\} (c)$$

et l'on remarquera qu'en conservant les notations du n° 314, le coefficient C aura pour valeur

$$C = a\int_{-h'}^{h} \omega^2 du.$$

Lorsque les forces X et Y seront nulles, cette équation (*c*) coïncidera avec l'équation (1) du n° 308, en observant que dans celles-ci, les forces P et Q agissent à l'extrémité même de la verge, ce qui rend nul leur moment R'. Dans tous les cas, on fera disparaître par des différentiations, les intégrales contenues dans cette équation (*c*), qui se changera par là en une équation différentielle du quatrième ordre.

La figure de la verge étant déterminée par l'équation (*c*), il faudra en outre que les forces données qui y sont appliquées, satisfassent aux conditions d'équilibre du n° 261, qui se réduisent à trois, à cause que ces forces sont toutes comprises dans un même plan. Désignons donc par D et E les sommes des forces particulières qui agissent à l'extrémité A de la verge, parallèlement aux axes des x et y, et par F' leur moment par rapport à ce point A, de manière que D, E, F', soient à l'égard de ce point, ce que P, Q, R', sont relativement à l'autre extrémité B; les trois équations dont il s'agit seront

$$\left.\begin{aligned} &D + P + \int_0^l X'\gamma'\omega' ds' = 0, \\ &E + Q + \int_0^l Y'\gamma'\omega' ds' = 0, \\ &F' + R' + Q(a-x) - P(b-y) \\ &\qquad + \int_0^l [Y'(x'-x) - X'(y'-y)]\gamma'\omega' ds' = 0, \end{aligned}\right\} (d)$$

où l'on mettra pour x et y les coordonnées du point A.

Lorsque les deux bouts de la verge seront entièrement libres, les forces extrêmes et leurs momens seront donnés. Si la verge est encastrée à son extrémité A, les forces D et E, ainsi que leur moment F', seront indéterminés; mais on connaîtra les valeurs de $x, y, \frac{dy}{dx}$, relatives à ce point A. Si la verge est seulement retenue par le point fixe A, les forces D et E seront encore indéterminées; leur résultante sera égale et contraire à la charge de ce point d'appui, dont elle exprimera la résistance, et l'on aura $F' = 0$ pour leur moment : on connaîtra alors les valeurs de x et y, mais non plus celle de $\frac{dy}{dx}$. Les mêmes remarques s'appliquent au point B.

320. Supposons, par exemple, que la verge soit

homogène et naturellement prismatique ou cylindrique; ce qui rendra constantes les trois quantités γ, ω, $\mathfrak{C}$. Supposons, en outre, qu'elle ne soit soumise qu'à des forces perpendiculaires à sa longueur, qui l'écartent très peu de sa position primitive; et prenons pour l'axe des x, le filet moyen dans cette position; on aura alors

$$D = 0, \quad X = 0, \quad P = 0;$$

ce qui fait disparaître la première équation (d). En négligeant le carré de $\frac{dy}{dx}$, on aura aussi

$$ds = dx, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2};$$

et l'équation (c) se réduira à

$$\mathfrak{C}\frac{d^2 y}{dx^2} = R' + Q(a - x) + \gamma\omega \int_x^l Y'(x' - x)\, dx'. \quad (e)$$

En la différentiant une première fois, on a

$$\mathfrak{C}\frac{d^3 y}{dx^3} = -Q - \gamma\omega \int_x^l Y dx.$$

On a aussi (n° 14)

$$d.\int_x^l Y' dx' = -Y dx;$$

en différentiant une seconde fois, et mettant dx au lieu de ds, on aura donc

$$\mathfrak{C}\frac{d^4 y}{dx^4} = \gamma\omega Y. \quad (f)$$

Les quatre constantes arbitraires que contiendra l'intégrale complète de cette dernière équation, se détermineront d'après les conditions relatives aux deux bouts de la verge, et en observant que la valeur de y tirée de cette équation devra satisfaire aux deux précédentes pour toutes les valeurs de x. Or, l'équation (f) résultant des deux autres par la différentiation, il suffira, pour cela, que cette valeur de y satisfasse à celles-ci pour une valeur particulière de x; il suffira donc qu'on ait

$$\mathfrak{C}\frac{d^2 y}{dx^2} = R', \quad \mathfrak{C}\frac{d^3 y}{dx^3} = -Q, \quad (g)$$

pour $x = a$; conditions qui résultent de l'équation (e) et de sa différentielle première, en y donnant à x cette valeur particulière. Si l'on y donne à x la valeur relative au point A, et qu'on ait égard aux équations (d), on aura

$$\mathfrak{C}\frac{d^2 y}{dx^2} = -F', \quad \mathfrak{C}\frac{d^3 y}{dx^3} = E; \quad (h)$$

mais ces équations n'expriment pas de nouvelles conditions distinctes de celles que renferment les équations (d) et (g), que l'on pourra, si l'on veut, remplacer par le système des équations (g) et (h).

321. Ces formules comprennent le cas de la verge pesante. Alors, je suppose le point A fixe, et j'y place l'origine des coordonnées x et y; je suppose aussi que l'axe des x, qui représente la direction naturelle de la verge, soit horizontal; je prends l'axe des y positives dans le sens de la pesanteur, et je représente cette force par g. On aura $Y = g$, et l'intégrale de l'équation (f) sera

$$\mathfrak{C}y = \frac{g\gamma\omega}{24}x^4 + Cx + C'x^2 + C''x; \quad (1)$$

C, C', C'', désignant trois constantes arbitraires, et la quatrième étant nulle, à cause qu'on a $x = 0$ et $y = 0$ au point A.

Supposons la verge encastrée à cette extrémité; il faudra qu'on ait aussi $\frac{dy}{dx} = 0$ quand $x = 0$; d'où il résulte $C'' = 0$. Supposons, en outre, que le poids Q soit attaché immédiatement à l'autre extrémité B, de sorte que son moment R' soit zéro; en vertu des équations (g), qui répondent à ce point, ou à $x = 0$, on aura

$$\tfrac{1}{2}g\gamma\omega a^2 + 6Ca + 2C' = 0,$$
$$g\gamma\omega a + 6C = -Q.$$

Je tire de là les valeurs de C et C', je les substitue dans l'équation (1), dont je supprime le terme $C''x$; j'appelle q le poids de la verge, de sorte qu'on ait $q = g\gamma\omega a$; il vient

$$\mathfrak{C}y = \frac{qx^4}{24a} - \frac{1}{6}(Q + q)x^3 + \frac{1}{2}\left(Q + \frac{1}{2}q\right)ax^2;$$

équation qui coïncide avec celle du n° 310, quand on néglige le poids de la verge, et qu'on y met Qc^2 à la place de $\mathfrak{C}$.

Dans les deux cas de $Q = 0$ et $q = 0$, on a

$$b = \frac{qa^3}{8\mathfrak{C}}, \quad b = \frac{Qa^3}{3\mathfrak{C}},$$

pour l'ordonnée du point B, qui exprime la flexion totale de la verge. En supposant $Q = q$, on voit donc que les flexions produites par un poids Q suspendu à l'extrémité libre d'une verge horizontale encastrée par son autre bout, et, par ce même poids, réparti uniformément sur toute la longueur de cette verge, sont entre elles comme 8 est à 3.

322. Si le point B est fixe comme le point A, et situé sur la même horizontale, il faudra qu'on ait $y = 0$ quand $x = a$; ce qui change l'équation (1) en celle-ci :

$$\mathfrak{C}y = \frac{qx}{24a}(x^3 - a^3) + Cx(x^2 - a^2) + C'x(x - a); \quad (2)$$

q étant toujours le poids de la verge. La détermination des deux constantes C et C' présentera les cas suivans.

1° Quand la verge est encastrée à ses deux bouts, il faut qu'on ait $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = a$; on tire de là

$$C = -\frac{1}{12}q, \quad C' = \frac{1}{24}aq;$$

et l'équation (2) devient

$$\mathcal{E}y = \frac{qx^2(x-a)^2}{24a}.$$

En appelant f la flèche de la courbe formée par cette verge, c'est-à-dire, la valeur de y qui répond à son milieu, ou à $x = \frac{1}{2}a$, on aura

$$f = \frac{qa^3}{16.24.\mathcal{E}}.$$

2° Si la verge est simplement retenue par les points fixes A et B, les charges de ces points d'appui seront les forces E et Q, prises en sens contraire de leurs directions, et leurs momens F' et K' seront nuls (n° 319). En vertu des premières équations (g) et (h), on aura $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = a$; d'où l'on conclut

$$C = -\frac{1}{12}q, \quad C' = 0.$$

On aura alors

$$\mathcal{E}y = \frac{qx(a-x)(a^2+ax-x^2)}{24a};$$

et la flèche f sera

$$f = \frac{5qa^3}{16.24.\mathcal{E}};$$

c'est-à-dire, quintuple de celle qui avait lieu dans le premier cas. D'après les dernières équations (g) et (h), on aura aussi

$$E = Q = -\frac{1}{2}q;$$

valeurs qui ont aussi lieu dans le premier cas, et qui sont évidentes en elles-mêmes.

3° Enfin, lorsque la verge est encastrée à son extrémité A, et seulement retenue à son autre bout, on a $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$, et $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour $x = a$; ce qui donne

$$C = -\frac{5q}{48}, \quad C' = \frac{qa}{16},$$

ou moyen de quoi l'équation (2) devient

$$\mathcal{E}y = \frac{qx^2(a-x)(3a-2x)}{48a}.$$

Les secondes équations (g) et (h) donnent en même temps,

$$Q = -\frac{3}{8}q, \quad E = -\frac{5}{8}q;$$

Ce qui montre que le poids de la verge se partage inégalement entre les deux points d'appui, et que la charge de l'extrémité encastrée est plus grande que celle de l'autre, dans le rapport de 5 à 3.

323. En supposant toujours les points A et B fixes et situés sur une même horizontale, et la verge homogène et prismatique, considérons le cas où les autres points sont chargés de poids inégalement distribués dans toute la longueur.

Soit donc

$$\gamma\omega Y = \frac{q}{a}\varphi x;$$

φx étant une fonction donnée qui s'évanouit quand $x = 0$ et quand $x = a$, et q désignant le poids total, ce qui suppose

$$\int_0^a \varphi x dx = a.$$

Cette fonction φx pourra être continue ou discontinue, c'est-à-dire que son expression analytique pourra changer une ou plusieurs fois entre les valeurs extrêmes $x = 0$ et $x = a$; ou, autrement dit, si on la représente par l'ordonnée d'une ligne dont x soit l'abscisse, cette ligne pourra se composer de plusieurs portions de courbes différentes. Si l'on désigne par δ une ligne d'une longueur aussi petite qu'on voudra, nous pourrons supposer, par exemple, que φx soit zéro depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}a - \delta$, et depuis $x = \frac{1}{2}a + \delta$ jusqu'à $x = a$, de sorte que cette fonction n'ait de valeurs différentes de zéro que dans une très petite étendue δ de part et d'autre de $x = \frac{1}{2}a$. Ce cas sera celui d'un poids q agissant au milieu de la verge élastique, que nous examinerons tout à l'heure en particulier.

Quelle que soit la fonction φx, continue ou discontinue, pourvu qu'elle soit nulle pour $x = 0$ et pour $x = a$, on aura, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$ inclusivement,

$$\varphi x = \frac{2}{a}\Sigma\left(\int_0^a \sin\frac{n\pi x'}{a}\varphi x' dx'\right)\sin\frac{n\pi x}{a}; \quad (a)$$

n étant un nombre entier et positif, et la caractéristique Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs de n, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Cette formule est due à Lagrange, qui l'a donnée

dans les anciens *Mémoires de l'Académie de Turin**; nous la démontrerons plus bas. En en faisant usage, l'équation (f) devient

$$c\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{2q}{a^3}\Sigma\left(\int_0^a \sin\frac{n\pi x'}{a}\varphi x'dx'\right)\sin\frac{n\pi x}{a};$$

et en intégrant et observant que $y=0$ pour $x=0$ et pour $x=a$, on aura

$$c=\frac{2qa^3}{\pi^4}\Sigma\frac{1}{n^4}\left(\int_0^a \sin\frac{n\pi x'}{a}\varphi x'dx'\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$$
$$+x(a-x)\left[Cx+C'(a-x)\right]; \qquad (b)$$

C et C' étant des constantes arbitraires que l'on déterminera comme dans les trois cas du numéro précédent.

324. Examinons en détail le cas où le poids q est suspendu au milieu de la verge, c'est-à-dire, le cas où, comme on vient de le dire, la fonction φx est nulle pour toutes les valeurs de x' qui diffèrent un tant soit peu de $\frac{1}{2}a$.

On pourra alors faire $x'=\frac{1}{2}a$ dans le facteur $\sin\frac{n\pi x'}{a}$ que renferme l'intégrale relative à x'; ce qui donnera

$$\int^a \sin\frac{n\pi x'}{a}\varphi x'dx'=\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^a \varphi x'dx'=a\sin\frac{n\pi}{2},$$

et fera disparaître tous les termes de la somme Σ qui répondent à des nombres pairs n. Je désigne par i un nombre pair ou impair; je fais $n=2i-1$, et j'étends la somme Σ à toutes les valeurs de i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$. A cause de $\sin\frac{(2i-1)\pi}{2}=-(-1)^i$, l'équation (b) devient

$$cy=x(a-x)\left[Cx+C'(a-x)\right]$$
$$-\frac{2qa}{\pi^4}\Sigma\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{a}$$

Mais d'après une formule connue, on a, comme on le verra plus bas,

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\sin(2i-1)\omega=\frac{\pi\omega^3}{24}-\frac{\mu^3\omega}{32},$$

pour toutes les valeurs de ω, depuis $\omega=0$ jusqu'à $\omega=\frac{1}{2}\pi$. Si donc on a $x<\frac{1}{2}a$, on fera $\omega=\frac{\pi x}{a}$ et l'on aura

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{a}=\frac{\pi^4}{96a_3}(4x^3-3a^2x);$$

si, au contraire, on a $x>\frac{1}{2}a$, on fera $\omega=\frac{\pi(a-x)}{a}$ et comme on a

$$\sin\frac{(2i-1)\pi(a-x)}{a}=\sin\frac{(2i-1)\pi x}{a},$$

on en conclura

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{a}=\frac{\pi^4}{96a^3}\left[4(a-x)^3-3a^2(a-x)\right].$$

De cette manière, nous aurons l'une ou l'autre de ces deux équations :

$$\left.\begin{aligned}cy&=x(a-x)\left[Cx+C'(a-x)\right]-\frac{q}{48}(4x^3-3a^2x)\\ cy&=x(a-x)\left[Cx+C'(a-x)\right]-\frac{q}{48}\left[4(a-x)^3-3a^2(a-x)\right].\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Il ne restera donc plus qu'à déterminer les constantes C et C' dans les trois cas suivans :

1° La condition $\frac{dy}{dx}=0$ pour $x=0$ et pour $x=a$, qui a lieu quand la verge est encastrée à ses deux extrémites, donne

$$C'=C=-\frac{q}{16}.$$

Les équations (1) deviendront

$$cy=\frac{q}{48}(3ax^2-4x^3),$$

$$cy=\frac{q}{48}\left[3a(a-x)^2-4(a-x)^3\right];$$

au milieu de la verge, on aura $\frac{dy}{dx}=0$, comme aux

* Tome 3, page 261.

extrémités; et la flèche f, ou l'ordonnée correspondante à $x = \frac{1}{2}a$, sera

$$f = \frac{qa^3}{4.48.\mathcal{E}},$$

c'est-à-dire, double de celle qui avait lieu dans le premier cas du n° 322. En vertu des secondes équations (g) et (h), on aura aussi

$$Q = E = -\frac{1}{2}q,$$

comme cela devait être.

2° Dans le cas de la verge simplement retenue par ses deux bouts, où l'on doit avoir $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = a$; il en résulte

$$C = 0, \qquad C' = 0.$$

et, par conséquent,

$$\mathcal{E}y = \frac{q}{48}(3a^2x - 4x^3),$$

$$\mathcal{E}y = \frac{q}{48}[3a^2(a - x) - 4(a - x)^3].$$

La tangente au milieu de la courbe est horizontale, et les valeurs de Q et E sont $-1/2\,q$, comme dans le premier cas; mais la flèche f a pour valeur

$$f = \frac{qa^3}{48.\mathcal{E}};$$

en sorte qu'elle est quadruple de la précédente, et plus grande dans le rapport de 8 à 5, que celle du second cas du n° 322. Si l'on mène une tangente à la courbe élastique, par l'un ou l'autre des points A et B; que l'on appelle α son inclinaison, et qu'on désigne par f' l'ordonnée verticale du point de cette droite qui répond à l'abscisse égale à $1/2\,a$, on aura

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{qa^2}{16.\mathcal{E}}, \quad f' = \frac{1}{2}a\,\text{tang}\,\alpha;$$

d'où l'on conclut

$$f' = \frac{5}{8}f.$$

Dans le second cas du n° 322, le rapport de f' à f serait $\frac{8}{5}$.

3° Enfin, si la verge est encastrée à l'extrémité A et seulement appuyée à l'autre bout B, on aura $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$, et $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour $x = a$; on en déduira

$$C' = -\frac{q}{16}, \quad C = -\frac{q}{32};$$

et les équations (1) deviendront

$$\mathcal{E}y = \frac{q}{96}(9ax^2 - 11x^3),$$

$$\mathcal{E}y = \frac{q}{96}(5x^3 - 15ax^2 + 12a^2x - 2a^3).$$

Elles donnent pour $x = 1/2\,a$, la même valeur de y, savoir

$$y = \frac{7qa^3}{8.96.\mathcal{E}};$$

mais ce n'est pas la plus grande ordonnée. On aura aussi

$$E = -\frac{11q}{16}, \quad Q = -\frac{5q}{16};$$

en sorte que le poids q se partagera dans le rapport de 11 à 5 entre les points d'appui A et B.

325. Nous allons maintenant démontrer la formule de Lagrange, citée précédemment.

Pour cela, considérons la quantité

$$\frac{1 - h^2}{1 - 2h\cos\theta + h^2},$$

qui est une fraction rationnelle par rapport à h, et dans laquelle θ désigne un angle réel. Son développement suivant les puissances de h sera

$$1 + 2h\cos\theta + 2h^2\cos 2\theta + 2h^3\cos 3\theta + 2h^4\cos 4\theta + \text{etc};$$

ce qu'on peut aisément vérifier; car si l'on multiplie cette série infinie par le dénominateur $1 - 2h\cos\theta + h^2$ de la fraction, on retrouve son numérateur, en observant qu'on a

$$2\cos n\theta\cos\theta = \cos(n + 1)\theta + \cos(n - 1)\theta,$$

quel que soit le nombre n. Si h est moindre que l'unité, abstraction faite du signe, cette série sera convergente, et la fraction sera rigoureusement égale à son développement prolongé à l'infini; à cause de

$$1 - 2h\cos\theta + h^2 = (1 - h)^2 + 4h\sin^2\frac{1}{2}\theta,$$

nous aurons donc, dans cette hypothèse,

$$\frac{1 - h^2}{(1 - h)^2 + 4h\sin^2\frac{1}{2}\theta} = 1 + 2\Sigma h^n\cos n\theta;$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier n, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Quelles que soient la fonction $f\theta$ et la constante réelle α, on aura donc aussi

$$\int_0^\pi \frac{(1 - h^2)f\theta d\theta}{(1 - h)^2 + 4h\sin^2\frac{1}{2}(\theta - \alpha)} = \int_0^\pi f\theta d\theta + 2\Sigma h^n\int_0^\pi f\theta\cos n(\theta - \alpha)\,d\theta.$$

Soit g une quantité positive et infiniment petite; cette équation subsistera encore en y faisant $h = 1 - g$, puisqu'elle a lieu pour toute valeur de h moindre que l'unité. Pour toutes les valeurs finies de n, on aura

$$h^n = (1 - g)^n = 1;$$

pour des valeurs infinies de cet exposant, h^n pourra différer de l'unité, mais en intégrant par partie, on a

$$\int f\theta \cos n(\theta - \alpha)\, d\theta = \frac{1}{n} f\theta \sin n(\theta - \alpha) - \frac{1}{n}\int \frac{df\theta}{d\theta} \sin n(\theta - \alpha)\, d\theta;$$

en sorte que si $f\theta$ ne devient pont infinie entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, ni pour ces limites, l'intégrale $\int_0^\pi f\theta \cos n(\theta - \alpha)\, d\theta$, qui multiplie h^n, s'évanouira pour $n = \infty$; d'où il résulte qu'on pourra toujours remplacer h^n par l'unité sous le signe Σ. Au numérateur de la fraction comprise sous le signe $\int$, on aura $1 - h^2 = 2g$, en négligeant g^2 par rapport à $2g$; dans le second terme du dénominateur, on pourra mettre l'unité au lieu de h ou $1 - g$; et, de cette manière, nous aurons

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f\theta\, d\theta + \Sigma\int_0^\pi f\theta \cos n(\theta - \alpha)\, d\theta = \int_0^\pi \frac{g\, f\theta d\theta}{g^2 + 4 \sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \alpha)}. \quad (1)$$

Le coefficient de $d\theta$ sous cette dernière intégrale est infiniment petit, excepté pour les valeurs de θ infiniment peu différentes de α, qui rendent son dénominateur infiniment petit; cette intégrale est donc infiniment petite ou nulle, tant que la différence $\theta - \alpha$ est une quantité finie; ce qui aura lieu dans toute l'étendue de l'intégration, lorsqu'on supposera $\alpha < 0$, ou $\alpha > \pi$; donc toutes les fois que la constante α tombera en dehors des limites zéro et π, on aura l'équation

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f\theta d\theta + \Sigma\int_0^\pi f\theta \cos n(\theta - \alpha)\, d\theta = 0. \quad (2)$$

Si, au contraire, on a $\alpha > 0$ et $< \pi$, il y aura des valeurs de θ qui différeront infiniment peu de α; en faisant donc

$$\theta = \alpha + u, \quad d\theta = du,$$

l'intégrale dont il s'agit s'évanouira encore pour les valeurs finies de u, mais non plus pour les valeurs infiniment petites de cette variable, positives ou négatives; à l'égard de celles-ci, on aura

$$f\theta = f\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}(\theta - \alpha) = \tfrac{1}{2}u;$$

par conséquent, le second membre de l'équation (1) devient

$$f\alpha \int \frac{g du}{g^2 + u^2};$$

lorsque α tombe entre zéro et π. Or, cette intégrale étant nulle pour toute valeur de u qui n'est point infiniment petite, nous pouvons maintenant l'étendre, sans en altérer la valeur, à des valeurs quelconques de u, positives ou négatives, et la prendre, si nous voulons, depuis $u = -\infty$ jusqu'à $u = \infty$: on aura alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g du}{g^2 + u^2} = \pi.$$

et finalement

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f\theta d\theta + \Sigma\int_0^\pi f\theta \cos n(\theta - \alpha)\, d\theta = \pi f\alpha. \quad (3)$$

Ce raisonnement conviendra encore au cas où α coïncide avec une des deux limites zéro ou π; mais si l'on a $\alpha = 0$, on ne pourra donner à u que des valeurs positives, et seulement des valeurs négatives, si l'on a $\alpha = \pi$, afin que dans ces deux cas, la variable θ qu'on a faite égale à $\alpha + u$, ne sorte pas des limites de l'intégration. De cette manière, l'intégrale relative à u se trouvera réduite à la moitié de sa valeur, ou à $\frac{1}{2}\pi$; et si l'on représente par ϵ et γ les valeurs de $f\alpha$ qui répondent à $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^\pi f\theta d\theta + \Sigma\int_0^\pi f\theta \cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\pi\epsilon, \\ &\frac{1}{2}\int_0^\pi f\theta d\theta + \Sigma(-1)^n\int_0^\pi f\theta \cos n\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\pi\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Maintenant faisons

$$\theta = \frac{\pi x'}{a}, \quad d\theta = \frac{\pi dx'}{a};$$

et soit aussi

$$f\left(\frac{x'}{a}\right) = \varphi x'.$$

La quantité x étant positive et moindre que la constante a, mettons à la place de a, $-\frac{\pi x}{a}$ dans l'équation (2) et $\frac{\pi x}{a}$ dans l'équation (3); en observant que les limites relatives à x' seront zéro et a, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2a}\int_0^a \varphi x'\,dx' + \frac{1}{a}\Sigma\int_0^a \varphi x' \cos\frac{n\pi(x'+x)}{a}\,dx' = 0, \\ &\frac{1}{2a}\int_0^a \varphi x'\,dx' + \frac{1}{a}\Sigma\int_0^a \varphi x' \cos\frac{n\pi(x'-x)}{a}\,dx' = \varphi x; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

et en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, il vient

$$\frac{2}{a}\Sigma\left(\int_0^a \varphi x' \sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = \varphi x;$$

ce qu'il s'agissait de trouver.

326. Cette formule représente les valeurs de la fonction φx, pour toutes les valeurs de la variable x, qui sont positives et moindres que a, et même pour $x = 0$ et $x = a$, lorsque φx sera nulle pour ces valeurs extrêmes. Il est important d'observer que la série indiquée par Σ, finira toujours par être convergente; car pour de très grandes valeurs de n, l'intégrale relative à x' deviendra une très petite quantité, qui diminuera de plus en plus à mesure que n augmentera, et qui sera tout-à-fait nulle pour $n = \infty$, comme on l'a vu plus haut au moyen de l'intégration par partie. Cette remarque est nécessaire et suffit pour justifier l'emploi qu'on fera de la formule précédente.

Les différentes formules par lesquelles on peut ainsi représenter en séries de quantités périodiques, toujours convergentes, des portions de fonctions arbitraires continues ou discontinues, se déduisent des équations (5), que nous venons d'établir. Je me contenterai de donner ici deux de ces formules, qui nous seront utiles dans la suite; pour de plus grands développemens sur cette matière, je renverrai à mes *Mémoires sur le Calcul intégral*, qui font partie du *Journal de l'École Polytechnique*, et où l'on trouvera une théorie complète de ce genre de transformations.

Après avoir ajouté les équations (5) et retranché la première de la seconde, j'y mets $2l$ au lieu de a, puis $x + l$ et $x' + l$ à la place de x et x', et ensuite φx et $\varphi x'$ au lieu de $\varphi(x + l)$ et $\varphi(x' + l)$; les limites des intégrales relatives à x' deviennent $\pm l$, et ces équations sont remplacées par celles-ci :

$$\varphi x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \varphi x'\,dx' + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l} \varphi x' \cos\frac{n\pi(x'+l)}{2l}\,dx'\right)\cos\frac{n\pi(x+l)}{2l},$$

$$\varphi x = \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{n\pi(x'+l)}{2l}\,dx'\right)\sin\frac{n\pi(x+l)}{2l}.$$

Partageons chaque somme Σ en deux autres, dont l'une se rapporte aux nombres n pairs, et l'autre aux nombres n impairs. Pour cela, soit i un nombre entier quelconque; et faisons successivement $n = 2i$, $n = 2i - 1$; nous aurons

$$\cos\frac{2i\pi(x+l)}{2l} = (-1)^i \cos\frac{i\pi x}{l}, \qquad \sin\frac{2i\pi(x+l)}{2l} = (-1)^i \sin\frac{i\pi x}{l},$$

$$\cos\frac{(2i-1)\pi(x+l)}{2l} = (-1)^i \sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}, \quad \sin\frac{(2i-1)\pi(x+l)}{2l} = -(-1)^i \cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l},$$

et de même pour les sinus et cosinus compris sous les signes f; par conséquent, on aura

$$\left.\begin{aligned} \varphi x = {} & \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \varphi x'\,dx' + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l} \varphi x' \cos\frac{i\pi x'}{l}\,dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l} \\ & + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\,dx'\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}, \\ \varphi x = {} & \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{i\pi x'}{l}\,dx'\right)\sin\frac{i\pi x}{l} \\ & + \frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l} \varphi x' \cos\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\,dx'\right)\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l}; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

les sommes Σ s'étendant à toutes les valeurs de i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$. Ces équations auront lieu pour toutes les valeurs de x qui seront comprises entre les limites $\pm l$.

Cela posé, si la fonction φx est telle que l'on ait $\varphi(-x) = -\varphi x$, il en résultera

$$\int_{-l}^{l} \varphi x'\, dx' = 0, \int_{-l}^{l} \varphi x' \cos\frac{i\pi x'}{l}\, dx' = 0, \int_{-l}^{l} \varphi x' \cos\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\, dx' = 0,$$

et, en outre,

$$\int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{i\pi x'}{l}\, dx' = 2\int_{0}^{l} \varphi x' \sin\frac{i\pi x'}{l}\, dx',$$

$$\int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\, dx' = 2\int_{0}^{l} \varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\, dx';$$

au moyen de quoi la seconde équation (6) coïncidera avec la formule (a), en y changeant a en l; et la première se réduira à

$$\varphi x = \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_{0}^{l} \varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\, dx'\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}. \quad (7)$$

Si, au contraire, la fonction φx est telle que l'on ait $\varphi(-x) = \varphi x$, on aura

$$\int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\, dx' = 0, \int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{i\pi x'}{l}\, dx' = 0;$$

et les autres intégrales pourront s'étendre seulement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, en doublant les résultats. La seconde équation (6) rentrera dans l'équation (7), en y mettant $l - x$ au lieu de x, et φx à la place de $\varphi(l - x)$. La première équation (6) deviendra

$$\varphi x = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} \varphi x'\, dx' + \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_{0}^{l} \varphi x' \cos\frac{i\pi x'}{l}\, dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l}. \quad (8)$$

Ces formules (7) et (8) représenteront les valeurs de φx, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$; celles qui s'en déduiront, en les différentiant par rapport à x, exprimeront, dans le même intervalle, les valeurs de $\frac{d\varphi x}{dx}$. La formule (7) suppose $\varphi x = 0$ pour $x = 0$, et $\frac{d\varphi x}{dx} = 0$ quand $x = l$; la formule (8) exige que l'on ait $\frac{d\varphi x}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, ces formules ou leurs différentielles n'ont pas lieu pour les valeurs extrêmes de x.

327. Réciproquement, les formules de ce genre font connaître les sommes des nombreuses séries périodiques que l'on a obtenues par différens moyens. Ainsi, par exemple, pour en déduire la somme de la série dont on a fait usage dans le n° 324, j'ajoute les équations (2) et (3), après avoir mis $-a$ à la place de a dans la première; il en résulte

$$\int_{0}^{\pi} f\theta\, d\theta + 2\Sigma\left(\int_{0}^{\pi} f\theta \cos n\theta\, d\theta\right)\cos na = \pi f a.$$

Je prends ensuite $f\theta = \theta$; on a alors

$$\int_{0}^{\pi} f\theta \cos n\theta\, d\theta = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2};$$

quantité nulle pour tous les nombres pairs, et égale à $-\frac{2}{(2i-1)^2}$ pour $n = 2i - 1$. L'équation précédente devient donc

$$\Sigma\frac{\cos(2i-1)a}{(2i-1)^2} = \frac{\pi}{8}(\pi - 2a);$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$.

En multipliant par da et intégrant, on en déduit

$$\Sigma\frac{\sin(2i-1)a}{(2i-1)^3} = \frac{\pi}{8}(\pi - a)a.$$

On n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que les deux membres de cette équation sont nuls, soit pour $a = 0$, soit pour $a = \pi$; en sorte que cette équation a lieu pour toutes les valeurs de a, depuis

$\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \pi$ inclusivement. Si l'on y fait $\alpha = \frac{1}{2}\pi + \omega$, on aura

$$\sin(2i-1)\alpha = -(-1)^i \cos(2i-1)\omega,$$

et, par conséquent ;

$$\Sigma \frac{(-1)^i \cos(2i-1)\omega}{(2i-1)^3} = \frac{\pi}{8}\left(\omega^2 - \frac{1}{4}\pi^2\right),$$

depuis $\omega = -\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\omega = \frac{1}{2}\pi$. Je multiplie par $d\omega$ et j'intègre de nouveau ; il en résulte

$$\Sigma \frac{(-1)^i \sin(2i-1)\omega}{(2i-1)^4} = \frac{\pi\omega^3}{24} - \frac{\pi^3\omega}{32};$$

ce qu'il s'agissait d'obtenir.

328. Si l'on met $2a$ au lieu de a, et ensuite $x'+a$ et $x+a$ à la place de x et x', dans la seconde équation (5), et qu'on fasse $\varphi(a+x) = Fx$, on aura

$$Fx = \frac{1}{4a}\int_{-a}^{a} Fx'\,dx' + \frac{1}{2a}\Sigma\int_{-a}^{a} Fx' \cos\frac{n\pi(x'-x)}{2a}\,dx',$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $\pm a$. En faisant

$$\frac{\pi}{2a} = \epsilon, \quad \frac{n\pi}{2a} = n\epsilon = u,$$

cette équation pourra s'écrire ainsi :

$$Fx = \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-a}^{a} Fx'\,dx' + \frac{1}{\pi}\Sigma\left[\int_{-a}^{a} Fx' \cos u(x'-x)\right]\epsilon;$$

u étant un multiple de ϵ, et la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs de u, depuis $u = \epsilon$ jusqu'à $u = \infty$. Or, si la constante a devient infinie, la différence ϵ des valeurs consécutives de u deviendra infiniment petite, et la somme Σ se changera en une intégrale prise depuis $u = \epsilon$, ou $u = 0$, jusqu'à $u = \infty$. En faisant donc $a = \infty$ et $\epsilon = du$, mettant le signe $\int$ au lieu de Σ, et supprimant le premier terme de la formule précédente, nous aurons

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} Fx' \cos u(x'-x)\,dx'\right]du.$$

Fourier a donné le premier cette formule importante, qui s'étend à toutes les valeurs réelles, positives ou négatives, de la variable x, et convient, comme les précédentes, dont elle se déduit, à une fonction quelconque Fx, continue ou discontinue.

CHAPITRE IV.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

329. Dans les cas les plus simples de l'équilibre des machines, la puissance et la résistance sont réciproquement proportionnelles aux espaces que leurs points d'application décriraient simultanément, si l'équilibre venait à se rompre. Pour que ce rapport ait toujours lieu, il faut prendre les espaces infiniment petits qui seraient décrits dans le premier instant, et les remplacer par leurs projections sur les directions des forces. Il a été remarqué depuis long-temps dans les machines simples ; Jean Bernouilli l'a ensuite étendu, par induction, à un système quelconque de points matériels sollicité par des forces données ; et, sous la dénomination de *principe des vitesses virtuelles*, il est ainsi devenu le principe général de l'équilibre. Nous le démontrerons dans toute sa généralité, après l'avoir vérifié sur les exemples suivans.

1° Soient (fig. 79) A, A', A'',... une suite de pou-

lies contenues dans une même chape, et formant une *moufle* fixe, et B, B', B'',... une autre suite de poulies aussi contenues dans une même chape, et formant une moufle mobile. Supposons qu'un fil soit attaché à la poulie inférieure de la moufle fixe, et s'enroule successivement sur toutes les poulies, en passant alternativement d'une moufle à l'autre. A l'extrémité libre de ce fil, suspendons un poids P qui fasse équilibre à un poids R suspendu à la poulie inférieure de la moufle mobile. La tension du fil sera la même dans toute sa longueur, et égale au poids P; de plus, si les diamètres des poulies sont très petits, eu égard à la distance qui sépare les deux moufles, les cordons qui vont de l'une à l'autre seront sensiblement parallèles et verticaux : la force qui soutient le poids R sera donc égale à la somme de leurs tensions, ou à n fois le poids P, en appelant n le nombre de ces cordons; par conséquent, dans l'état d'équilibre, on aura

$$R = nP.$$

Or, si l'équilibre se rompt, et que le poids R monte ou descende d'une quantité a, tous les cordons qui aboutissent à la moufle mobile se raccourciront ou s'allongeront de cette même quantité. La longueur totale du fil devant rester la même, la partie à laquelle est attaché le poids P s'allongera ou se raccourcira de n fois cette quantité a; donc, en désignant par c la quantité dont le poids P s'élèvera ou s'abaissera, on aura $c = na$, et, conséquemment,

$$Ra = Pc;$$

ce qui renferme le principe qu'on vient d'énoncer.

2° ABC (fig. 80) représente la roue d'un *treuil*, et A'B'C' l'intersection du plan vertical de cette roue et de la surface du cylindre; O est le centre commun de ces deux circonférences, et AOC et A'OC' sont leurs diamètres horizontaux. Un fil s'enroule sur la roue, et s'attache à l'un de ses points; un autre fil, attaché à l'un des points du cylindre, s'enroule de même sur sa surface. On suspend un poids P au premier fil, et un poids R au second; ces deux poids tendent à faire tourner le treuil en sens contraire, et sont supposés en équilibre. Cela posé, si l'on applique au point C' deux forces R' et R'', verticales, égales et contraires, l'équilibre ne sera pas troublé; si, de plus, ces forces sont égales à R, la force R'' et le poids R se feront équilibre, puisqu'il n'y aurait pas de raison pour que leur action simultanée fît tourner le treuil plutôt dans un sens que dans le sens opposé; il faudra donc qu'il y ait aussi équilibre entre le poids P et la force R', perpendiculaires à AOC', et qui agissent aux extrémités de ce levier, dont O est le point d'appui. Donc en appelant r le rayon AO de la roue, et r' le rayon OC' du cylindre, l'équation d'équilibre sera

$$Pr = Rr',$$

à cause de $R' = R$. Maintenant, si l'équilibre se rompt, et que le poids R monte ou descende d'une quantité a, tandis que le poids P descendra ou montera d'une quantité c, il est évident, par la nature de la machine, qu'on aura $cr' = ar$; d'où l'on conclut

$$Pc = Ra,$$

conformément à l'énoncé du principe qu'il s'agissait de vérifier.

3° Supposons qu'une *vis* verticale soit chargée d'un poids R à son extrémité supérieure; qu'une roue horizontale, ayant son centre dans l'axe de cette vis, soit adaptée à son extrémité inférieure; qu'un fil soit enroulé sur cette roue et attaché par un bout à sa circonférence, et qu'on applique à son autre bout une force horizontale F qui agisse suivant une tangente à la roue, et fasse équilibre au poids R. On pourra, si l'on veut, placer sur la direction de cette tangente une poulie fixe et verticale, plier le fil sur cette partie, et remplacer F par un poids P égal à cette force et attaché à l'extrémité libre de la partie verticale du fil. En appelant h la hauteur du *pas* de la vis, et c la circonférence de la roue, on aura

$$Pc = Rh,$$

d'après la condition connue de l'équilibre dans cette machine. Les deux poids R et P tendront à faire tourner la vis en sens contraire; si l'équilibre vient à se rompre, l'un de ces poids montera, et l'autre descendra; et si le poids R s'abaisse ou s'élève d'un pas h de la vis, le poids P s'élèvera ou s'abaissera d'une hauteur égale à la circonférence c de la roue; d'où il résulte qu'en appelant, en général, a et c les espaces parcourus simultanément par les deux poids R et P, on aura $ac = ch$, et, par conséquent,

$$Pc = Ra,$$

conformément au principe dont nous nous occupons.

4° Considérons encore deux poids P et R posés sur deux plans inclinés, et attachés l'un à l'autre par un fil passant sur une poulie fixe, située en haut des deux plans qui sont adossés l'un à l'autre. La figure 81 représente une section verticale de ce système; AC est la longueur du plan sur lequel est posé le poids R, BC celle du plan qui supporte le poids P, AB une droite horizontale, et CD une verticale qui représente la hauteur commune des deux plans. Faisons

$$AC = a, \quad BC = b, \quad CD = h;$$

la composante de R suivant CA sera $R\frac{h}{a}$, et celle de P suivant CB aura $P\frac{h}{b}$ pour valeur. Pour l'équilibre, il faudra que ces deux composantes soient égales; en sorte que l'on aura

$$Pa = Rb.$$

Si l'équilibre se rompt, et que le poids R glisse d'une quantité γ sur le plan CA, le poids P glissera de la même quantité, mais en sens contraire, sur le plan BC; et en appelant α la hauteur verticale dont le poids R se sera élevé ou abaissé, et β celle dont le poids P se sera abaissé ou élevé, il est aisé de voir que l'on aura

$$\alpha = \frac{\gamma h}{a}, \quad \beta = \frac{\gamma h}{b};$$

d'où il résulte

$$P\beta = R\alpha,$$

comme dans les exemples précédens : mais ici α et β sont les projections verticales des espaces décrits simultanément par les poids R et P, tandis que, dans le cas précédent, α et β étaient ces espaces mêmes.

330. D'après ce qu'on a vu dans le n° 49, deux forces qui se font équilibre par l'intermédiaire d'un levier quelconque, sont en raison inverse des espaces infiniment petits, projetés sur leurs directions respectives, et que peuvent décrire en même temps leurs points d'application. Cet énoncé est celui qui convient à tous les cas. Ainsi, en appelant P et R la puissance et la résistance en équilibre par l'intermédiaire d'une machine quelconque, supposant qu'on imprime un mouvement infiniment petit à cette machine, et désignant par β et α les projections sur les directions de ces forces, des espaces qui seront décrits en même temps par leurs points d'application, on aura toujours

$$P\beta = Q\alpha;$$

à quoi il faut d'ailleurs ajouter que l'une des projections devra tomber sur la direction même de la force correspondante, et l'autre sur son prolongement, ainsi que cela a lieu dans le levier.

Dans la pratique il suffira que le mouvement imprimé à la machine soit seulement très petit. En mesurant les longueurs des projections β et α, on en conclura immédiatement le rapport de la puissance à la résistance, sans rien connaître de la composition particulière de la machine.

331. Non seulement cet énoncé convient à une machine quelconque, mais il s'étend aussi à un nombre quelconque de forces en équilibre. Soient donc, en général, M, M', M'', etc. (fig. 82), un système de points matériels liés entre eux de telle manière qu'on voudra; supposons que des forces P, P', P'', etc., agissent sur ces points, suivant les directions MA, M'A', M''A'', etc.; faisons subir à ces points des déplacemens infiniment petits et compatibles avec les conditions du système, de sorte qu'ils soient transportés en N, N', N'', etc.; projetons N, N', N'', etc., sur les droites MA, M'A', M''A'', etc. en a, a', a'', etc., et posons

$$Ma = p, \quad M'a' = p', \quad M''a'' = p'', \text{ etc.}$$

En considérant ces projections p, p', p'', etc., comme des quantités positives ou négatives, selon qu'elles tombent sur les directions des forces correspondantes, ou sur leurs prolongemens, nous aurons

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0,$$

lorsque l'équilibre aura lieu; et réciproquement il y aura équilibre, quand cette équation subsistera pour tous les déplacemens compatibles avec les conditions du système.

Les droites infiniment petites MN, M'N', M''N'', etc., sont ce qu'on appelle les *vitesses virtuelles* des points M, M', M'', etc.; dénomination qui provient de ce qu'elles sont considérées comme les espaces qui seraient parcourus simultanément par les points du système, dans le premier instant où l'équilibre viendrait à se rompre.

On doit observer que le principe des vitesses virtuelles, contenu dans la formule qu'on vient d'écrire, donne seulement les conditions d'équilibre qui peuvent être exprimées par des équations, mais non pas celles qui sont relatives à la direction de certaines forces, et à l'étendue dans laquelle elles doivent rencontrer un plan fixe. (n° 266). Les mouvemens compatibles avec les conditions du système, qui donnent lieu à des équations d'équilibre, sont ceux dont les mouvemens directement contraires sont également possibles. Mais, par exemple, si un point matériel est posé sur un plan fixe, le mouvement sera possible dans ce plan, suivant chaque direction et suivant la direction contraire; et perpendiculairement à ce plan, il ne pourra avoir lieu que dans une seule direction. Or, la considération des mouvemens dans le plan, donnera lieu aux conditions d'équilibre qui s'expriment par des équations, et la considération du mouvement perpendiculaire déterminera seulement la direction de la force normale, qui doit être contraire à celle du mouvement possible. Dans l'énoncé du principe des vitesses virtuelles, on suppose implicitement que chacun des mouvemens compatibles avec les conditions du système, et le mouvement directement contraire, sont également possibles; en appliquant successivement l'équation précédente à ces deux mouvemens, les quantités p, p', p'', etc., changeront toutes de signes, et il n'en résultera qu'une seule équation d'équilibre.

Si la force P, est la résultante de plusieurs forces données Q, Q', Q'', etc., et qu'on représente par q, q', q'', etc., les projections de MN sur leurs directions, on aura (n° 34)

$$Pp = Qq + Q'q' + Q''q'' + \text{etc.};$$

en sorte qu'on pourra remplacer dans l'équation précédente, le terme Pp relatif à la force P, par cette somme de termes de la même nature, qui répondent à ses composantes; et de même, par rapport aux forces P, P', P'', etc., si elles sont aussi les résultantes de plusieurs autres forces.

Le principe des vitesses virtuelles, dans le cas

d'un point isolé en équilibre, est, comme on l'a vu dans le n° 39, une conséquence de cette dernière équation, soit qu'il s'agisse d'un point entièrement libre, ou qu'il soit assujetti à demeurer sur une surface ou sur une courbe donnée. Il s'agit actuellement de démontrer ce principe général, dans le cas d'un système quelconque de points matériels M, M', M'', etc.

332. Supposons ces points liés entre eux par des verges inflexibles ou par des fils flexibles, dont les uns soient fixement attachés à ces points, tandis que d'autres les traversent comme des anneaux mobiles. Dans ce dernier cas, ces points ou anneaux ont la liberté de glisser le long des fils qui les traversent, et que l'on suppose, pour cela, parfaitement flexibles.

Après qu'on a appliqué les forces données P, P', P'', etc., aux points M, M', M'', etc., et que l'équilibre s'est établi, il est clair que les fils qui joignent ces points deux à deux, éprouveront chacun une tension particulière, c'est-à-dire, que chacun de ces fils sera tiré à ses deux extrémités par des forces égales et contraires, dirigées suivant ses prolongemens, ainsi qu'on l'a déjà dit dans le cas du polygone funiculaire (n° 285). L'intensité de cette force sera la mesure de la tension inconnue que ce fil éprouve. Un fil qui ne serait pas tendu, ne contribuerait pas à l'équilibre, et l'on pourrait en faire abstraction.

La tension peut varier d'un fil à un autre; mais s'il s'agit de deux fils qui sont le prolongement l'un de l'autre à travers un anneau, la tension est la même dans ces deux parties d'un même fil qui doit nécessairement éprouver une égale tension dans toute sa longueur (289). Ainsi, par exemple, si M est un anneau traversé par le fil M'MM'', la tension de MM' sera égale à celle de MM''.

Lorsque plusieurs fils viennent se croiser dans un même anneau, la tension est la même dans les deux parties de chaque fil, et peut varier d'un fil à l'autre. Si donc, outre le fil M'MM'', il passe encore un fil M'''MM^IV, dans l'anneau M, la tension sera la même dans les deux parties MM''' et MM^IV de ce dernier fil, et, en général, elle sera différente de celle des deux parties MM' et MM'', du premier fil. Et si un autre fil, tel que MM^V vient aboutir au même anneau M auquel il soit fixement attaché, ce fil aura sa tension particulière, généralement différente de toutes celles des autres fils qui aboutissent au même point M.

Observons encore que si M' est un anneau ainsi que M, et que le fil M''MM', après avoir traversé l'anneau M, passe encore par l'anneau M' pour aller aboutir au point M''', la tension sera la même dans les trois fils M''M, MM', M'M'''; car alors ces trois fils n'en font qu'un seul M''MM'M'''. En général, lorsqu'un fil est partagé en plusieurs parties, par des anneaux mobiles, la tension est la même dans toutes ces parties.

A l'égard des verges inflexibles, quand l'équilibre existe, elles sont tirées ou poussées dans le sens de leur longueur, par des forces égales et contraires, agissant à leurs extrémités. L'intensité commune de ces deux forces, pour chaque verge, est la mesure de la tension ou contraction qu'elle éprouve. S'il en existe une ou plusieurs dans le système, qui ne soit ni tendues, ni contractées, elle sont inutiles à l'équilibre, et l'on peut les supprimer. Ainsi, dans ce qui va suivre, nous supposerons tous les liens physiques qui existent dans le système, tendus ou contractés suivant leurs longueurs par des forces inconnues.

L'avantage du principe des vitesses virtuelles est de donner l'équation d'équilibre dans chaque cas particulier, sans qu'on ait besoin de calculer ces forces intérieures; mais comme la démonstration que nous allons donner est fondée sur la considération de ces forces, de grandeur inconnue, voici la notation dont nous ferons usage pour les représenter.

Nous désignerons par $[m, m']$, la tension ou la contraction du fil flexible ou inflexible qui joint deux points quelconques M et M' du système. De cette manière $[m, m'']$, $[m', m'']$, etc., représenteront les tensions ou contractions des fils qui joignent M et M'', M' et M'', etc.

333. Nous aurons aussi à considérer les variations infiniment petites qu'éprouvent les distances des points M, M', M'', etc., pris deux à deux, soit quand l'un de ces points change seul de position, soit quand ils sont déplacés simultanément. Alors, nous désignerons par (m, m') la distance de deux points quelconques M et M'; en sorte que (m, m''), (m', m''), etc., soient de même les distances de M et M'', M' et M'', etc. Nous emploierons la caractéristique δ_i, pour indiquer les variations de ces distances, relatives au déplacement du point M; la caractéristique δ_i', pour indiquer celles qui ont lieu quand c'est le point M' qui se déplace; la caractéristique δ_i'', pour indiquer les variations provenant du déplacement de M''; et ainsi de suite. Enfin, nous réserverons la caractéristique δ, sans aucun accent, pour indiquer la variation de la distance de deux points, résultant de leurs déplacemens simultanés.

Puisqu'on suppose, par exemple, que M a été transporté de M en N et M', de M' en N', nous aurons

$$\delta\,(m, m') = MM' - NN',$$
$$\delta_i\,(m, m') = MM' - NM',$$
$$\delta_i'\,(m, m') = MM' - MN';$$

Il est important d'observer que la variation totale, indiquée par δ, est égale à la somme de variations partielles, indiquées par δ_i et δ_i'; de manière qu'on a, pour deux points quelconques,

$$\delta\,(m, m') = \delta_i\,(m, m') + \delta_i'\,(m, m');$$

équation qui résulte de ce que les déplacemens de M et M' sont infiniment petits, et qui n'a lieu que dans cette hypothèse. En effet (m, m') est une

fonction des coordonnées de ces deux points; ces variables prennent des accroissemens infiniment petits, positifs ou négatifs, quand M et M' sont transportés en N et N'; or, en rejetant les puissances de ces accroissemens supérieures à la première, il est évident que l'accroissement total d'une fonction quelconque de ces coordonnées, est égal à la somme des accroissemens partiels qui seraient dus à la variation de chaque coordonnée isolément; par conséquent, la variation totale de (m, m'), indiquée par la caractéristique δ doit être égale à la somme de ses variations partielles qui répondent à δ_i et δ_i'.

334. Tout ce qui précède étant admis, considérons le point quelconque M, auquel est appliquée la force donnée P. Ce point est lié aux autres par les fils MM', MM'', etc.; il est donc tiré ou poussé, dans le sens de chacun de ces fils, par une force égale à la contraction ou à la tension que ce fil éprouve; en sorte qu'outre la force donnée P, le point M est encore soumis à l'action d'autant d'autres forces qu'il y a de fils aboutissant à ce point. Après qu'on a eu égard à ces forces intérieures, il faut faire abstraction des fils qui lient M aux autres points du système, et le considérer comme un point isolé, autour duquel les forces $[m, m']$, $[m, m'']$, etc., et la force P, doivent se faire équilibre. Si M est un point fixe, il n'en résultera aucune équation de condition; mais s'il est entièrement libre, ou s'il est seulement assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe donnée, on aura entre ces forces l'équation des vitesses virtuelles, déjà démontrée pour l'équilibre d'un point matériel isolé.

Pour former cette équation, prenons un point N infiniment voisin de M, et appartenant à la surface ou à la courbe sur laquelle ce point M est astreint à demeurer, s'il n'est pas entièrement libre. Soient p, t, t', t'', etc., les projections de MN sur les directions des forces P, $[m, m']$, $[m, m'']$, $[m, m''']$, etc.; nous aurons (n° 39),

$$Pp + [m, m'].\, t + [m, m''].\, t' + [m, m''].\, t'' + \text{etc.} = 0.$$

Mais à cause que la ligne MN est infiniment petite, il est aisé de voir que sa projection sur la ligne MM' n'est autre chose que la différence des deux distances MM' et NM'; car si l'on abaisse du point N (fig. 83) la perpendiculaire NH sur MM', la droite MH sera cette projection, et l'on aura

$$MH = MM' - HM'.$$

Or, on a aussi

$$HM' = \sqrt{(NM')^2 - (NH)^2} = NM',$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre; on aura donc

$$MH = MM' - NM'.$$

D'après les notations convenues, cette équation est la suivante

$$t = \delta_i\,(m, m');$$

et l'on aura de même

$$t' = \delta_i\,(m, m''), \qquad t'' = \delta_i\,(m, m'''), \qquad \text{etc.};$$

par conséquent, l'équation d'équilibre deviendra

$$Pp + [m, m'].\, \delta_i\,(m, m') + [m, m''].\, \delta_i\,(m, m'') + [m, m''].\, \delta_i\,(m, m''') + \text{etc.} = 0.$$

En considérant les autres points M', M'', M''', etc., du système, on aura pour chacun d'eux une équation pareille à celle-ci; ces équations seront

$$P'p' + [m', m].\, \delta_i'\,(m', m) + [m', m''].\, \delta_i'\,(m', m'') + [m', m''].\, \delta_i'\,(m', m''') + \text{etc.} = 0,$$

$$P''p'' + [m'', m].\, \delta_i''\,(m'', m) + [m'', m'].\, \delta_i''\,(m'', m') + [m'', m''']\, \delta_i''\,(m'', m''') + \text{etc.} = 0,$$

$$P'''p''' + [m''', m].\, \delta_i'''\,(m''' m) + [m''', m'].\, \delta_i'''\,(m''', m') + [m''', m''].\, \delta_i'''\,(m''', m'') + \text{etc.} = 0;$$

p', p'', p''', etc., étant les vitesses virtuelles de M', M'', M''', etc., projetées sur les directions des forces données P', P'', P''', etc., qui agissent sur ces points matériels.

Ajoutons toutes ces équations : en observant que $[m, m']$ et (m, m') sont la même chose que $[m', m]$ et (m', m), et de même pour toutes les notations semblables; et en substituant la variation totale de chaque distance à la somme de ses variations partielles, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} & Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} \\ & + [m, m'].\, \delta\,(m, m') + [m, m''].\, \delta\,(m, m'') + [m, m'''].\, \delta\,(m, m''') + \text{etc.} \\ & + [m', m''].\, \delta\,(m', m'') + [m', m'''],\, \delta\,(m', m''') + \text{etc.} \\ & + [m'', m'''].\, \delta\,(m'', m''') + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} = 0 \end{aligned}\right\} (a)$$

335. Jusqu'ici les déplacemens MN, M'N', M''N'', etc. (fig. 83), sont indépendans entre eux; et l'équation (a) suppose seulement que ces points n'ont pas quitté les surfaces ou les courbes données, sur lesquelles ils sont obligés de rester; mais si nous supposons, en outre, qu'en vertu de ces déplacemens, les points du système qui sont joints par une verge ou un fil tendu, ont conservé les mêmes distances respectives, nous aurons

$$\delta(m, m') = 0,\ \delta(m, m'') = 0,\ \delta(m', m'') = 0, \text{ etc.},$$

et l'équation (a) se réduira à celle-ci :

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0, \quad (b)$$

qui est précisément celle du principe des vitesses virtuelles (n° 331).

Si dans les déplacemens des points M, M', M'', etc., ceux qui sont des anneaux ont glissé le long des fils qui les traversent, l'équation (b) aura encore lieu, pourvu que les longueurs totales de ces fils n'aient pas varié. Supposons, par exemple, que M est un anneau qui a glissé le long du fil M'MM''; alors on n'a plus séparément $\delta(m, m') = 0$ et $\delta(m, m'') = 0$, mais on a toujours

$$\delta(m, m') + \delta(m, m'') = 0,$$

puisque la longueur totale du fil reste constante. Mais, dans ce cas, les tensions $[m, m']$ et $[m, m'']$ des deux parties de ce fil sont égales; les termes qui renferment ces tensions dans l'équation (a) peuvent donc s'écrire ainsi :

$$[m, m'].\ [\delta(m, m') + \delta(m, m'')],$$

et, par conséquent, ils se détruisent.

En général, on conçoit que si un fil flexible passe à travers un nombre quelconque d'anneaux, les tensions égales de ses différentes parties disparaîtront de l'équation (a) toutes les fois que la longueur totale de ce fil ne variera pas.

Concluons donc, enfin,

1° Que l'équation résultante du principe des vitesses virtuelles a lieu pour tous les mouvemens infiniment petits qu'on peut donner à un corps solide, libre ou gêné par des obstacles fixes; car dans tous ces mouvemens les distances respectives des points de ce corps sont invariables.

2° Que cette équation a aussi lieu pour tous les mouvemens infiniment petits que peut prendre un système de points ou d'anneaux liés par des fils flexibles, pourvu que ces fils restent droits ou tendus. Quand cette condition n'est pas remplie, les tensions ne disparaissent pas toutes dans l'équation (a), et, conséquemment, l'équation (b) n'a plus lieu.

336. Il faut encore démontrer que, réciproquement, quand l'équation (b) a lieu pour tous les mouvemens infiniment petits qu'on peut faire prendre au système des points M, M', M'', etc., les forces données P, P', P'', etc., sont en équilibre, ainsi que nous l'avons énoncé précédemment (n° 331).

Supposons pour un moment que l'équilibre n'ait pas lieu. Les points M, M', M'', etc., ou une partie d'entre eux, se mettront en mouvement, et, dans le premier moment, ils décriront simultanément des droites telles que MN, M'N', M''N'', etc.; on pourra donc réduire tous ces points au repos, en leur appliquant des forces convenables, dirigées suivant les prolongemens de ces droites, en sens contraire des mouvemens produits; par conséquent, si nous désignons ces forces inconnues par R, R', R'', etc., l'équilibre aura lieu entre les forces P, P', P'', etc., R, R', R'', etc.; en sorte que r, r', r'', etc., désignant les vitesses virtuelles projetées sur les directions de ces nouvelles forces R, R', R'', etc., on aura, d'après le principe des vitesses virtuelles qui vient d'être démontré,

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} + Rr + R'r' + R''r'' + \text{etc.} = 0,$$

ou simplement

$$Rr + R'r' + R''r'' + \text{etc.} = 0, \quad (c)$$

en vertu de l'équation (b), qui a lieu par hypothèse.

Cette équation (c) existant pour tous les mouvemens infiniment petits compatibles avec les conditions du système des points M, M', M'', etc., nous pouvons choisir pour leurs vitesses virtuelles les espaces réellement décrits MN, M'N', M''N'', etc., dans un même instant; mais comme ces lignes sont comptées sur les prolongemens des directions de R, R', R'', etc., il s'ensuit que toutes les projections r, r', r'', etc., seront négatives (n° 331), et égales, abstraction faite du signe, à ces mêmes lignes MN, M'N', M''N'', etc. Alors, tous les termes de l'équation (c) étant de même signe, leur somme ne peut être nulle, à moins que chaque terme ne soit séparément égal à zéro; on aura donc

$$R.MN = 0, \quad R'.M'N' = 0, \quad R''.M''N'' = 0, \text{ etc.}$$

Or, pour que le produit R.MN soit nul, il faut qu'on ait, ou $R = 0$, ou $MN = 0$; ce qui signifie, dans l'un et l'autre cas, que le point M ne peut prendre aucun mouvement : il en est de même à l'égard de tous les autres points; par conséquent, le système entier est en équilibre; et c'est ce que nous nous proposions de démontrer.

337. Lorsqu'il sera question des fluides, nous ferons voir, en partant de leur propriété fondamentale, que le principe des vitesses virtuelles a aussi lieu dans l'équilibre d'un système de forces dont les actions se transmettent par l'intermédiaire d'un fluide contenu dans un canal ou dans un vase de forme quelconque. De cette manière, la démonstration du principe général de l'équilibre aura toute l'étendue que l'on peut désirer; car les verges inflexibles, les fils tendus, les fluides contenus dans des canaux, sont les différentes sortes d'intermédiaires qu'on peut établir entre des points

matériels, séparés les uns des autres, pour transmettre l'action des forces de l'un de ces points à un autre; et si d'ailleurs, parmi ces points, il y en a qui soient immobiles, d'autres parfaitement libres, et d'autres assujettis à rester sur des surfaces ou sur des courbes données, on aura le système de points matériels le plus général qu'on puisse avoir besoin de considérer. Toutefois, je vais donner une autre démonstration du même principe, que l'on doit à Lagrange, et qui repose sur des notions plus élémentaires que la précédente; elle est fondée sur la possibilité de remplacer toutes les forces appliquées à un système quelconque de points matériels, par un seul poids agissant comme on va d'abord l'expliquer.

338. Si un point M (fig. 84) est sollicité par une force P dirigée suivant la droite MA, on peut d'abord supposer que cette force soit appliquée au point A, et agisse au moyen d'un cordon MA attaché à ce point M. On peut ensuite remplacer ce cordon par un fil qui s'enroule alternativement sur une moufle fixe et sur une moufle mobile, et soit attaché par l'un de ses deux bouts à l'une ou à l'autre de ces deux moufles; celle qui est fixe répondant au point A, celle qui est mobile au point M. En suspendant verticalement un poids K à l'extrémité libre du fil, la tension sera égale à K dans toute sa longueur. Si les dimensions des poulies sont regardées comme infiniment petites, les tensions de toutes les parties de ce fil, qui aboutissent à la moufle mobile, auront la même direction; en appelant s leur nombre, leur résultante sera égale à sK, et agira sur le point M suivant la direction MA; par conséquent, si l'on a sK = P, on pourra remplacer l'action de la force P par celle du poids K.

Il en sera de même à l'égard des autres forces P', P'', etc., appliquées à des points M', M'', etc., suivant des directions M'A', M''A'', etc.; chacune d'elles pourra être remplacée par un poids égal à un sous-multiple de son intensité, agissant comme on vient de l'expliquer pour la force P. De plus, il est aisé de voir qu'on pourra toujours faire passer successivement, comme le représente la figure 85, un seul et même fil sur toutes les moufles fixes en A, A', A'', etc., et sur toutes les moufles mobiles attachées aux points M, M', M'', etc. Supposons donc que s, s', s'', etc., sont des nombres entiers, et qu'on ait

$$sK = P, \quad s'K = P', \quad s''K = P'', \quad \text{etc.} \quad (d)$$

En suspendant verticalement le poids K à l'extrémité libre de ce fil, le système des forces données P, P', P'', etc., se trouvera remplacé par ce seul poids, dont l'action sera transmise aux points M, M', M'', etc., par l'intermédiaire de ce fil, et des moufles fixes et mobiles. A la vérité, les équations (d) supposent les forces P, P', P'', etc., commensurables; mais cette hypothèse est toujours admissible, puisque leur commune mesure K peut être un poids aussi petit qu'on voudra, et même infiniment petit, si cela est nécessaire.

339. Concevons actuellement qu'on imprime aux points M, M', M'', etc., un mouvement qui soit compatible avec les conditions du système, ainsi que le mouvement directement contraire; soient N, N', N'', etc., leurs positions après un temps infiniment petit; et appelons, comme précédemment, p, p', p'', etc., les projections de MN, M'N', M''N'', etc., sur les directions de P, P', P'', etc., ou sur leurs prolongemens.

Le point N étant projeté en a sur la droite MA, chacun des cordons qui vont de A à M sera raccourci d'une quantité AM — AN, pour laquelle on pourra prendre Ma, en négligeant les infiniment petits du second ordre; ce cordon serait, au contraire, allongé de Ma, si le point a tombait sur le prolongement de AM; d'où l'on conclut qu'à raison du déplacement de M, le poids K descendra dans le premier cas, et montera dans le second, d'une quantité égale au produit de Ma et de s; ce qui revient à dire, d'après le signe de p (n° 331), que la variation positive ou négative de sa hauteur verticale sera exprimée par sp, à raison de ce seul déplacement. Il en sera de même par rapport à tous les autres points M', M'', etc.; par conséquent, si l'on désigne par ζ une quantité infiniment petite, qui représente, selon qu'elle sera positive ou négative, la quantité totale dont le poids K descendra ou montera, par suite des déplacemens simultanés de tous les points du système, nous aurons

$$\zeta = sp + s'p' + s''p'' + \text{etc.}$$

Or, le poids K tendant à descendre, et étant la seule force qui agisse sur le système, il est évident que rien ne l'empêchera de produire le mouvement que nous considérons, si cette valeur de ζ est positive; et que, si elle est négative, rien n'empêchera le poids K de produire le mouvement directement contraire, qu'on suppose également possible, et pour lequel ζ changera de signe. Pour que l'équilibre ait lieu, il est donc nécessaire que ζ soit zéro. Réciproquement, le poids K ne pouvant produire aucun mouvement quelconque, sans descendre d'une quantité infiniment petite dans le premier instant, il s'ensuit qu'il n'en produira aucun, et que l'équilibre aura lieu, si l'on a $\zeta = 0$, pour tous les déplacemens des points M, M', M'', etc., infiniment petits et compatibles avec les conditions du système.

Maintenant, si l'on multiplie par K l'équation

$$sp + s'p' + s''p'' + \text{etc.} = 0,$$

nécessaire et suffisante pour l'équilibre, et qu'on ait égard aux équations (d), elle se changera dans l'équation (b) du principe des vitesses virtuelles, qu'il s'agissait d'obtenir.

340. Cette démonstration ne suppose pas le principe préalablement démontré pour un point maté-

riel isolé. Si le système se réduit à un seul point M auquel sont appliquées les forces P, P', P'', etc., données en grandeur et en direction, on substituera à leur action simultanée celle d'un seul poids K, comme dans le n° 338; et, dans le cas de l'équilibre de ces forces, le principe des vitesses virtuelles se déduira de cette substitution par le raisonnement qu'on vient de faire : or, ce principe fournira immédiatement les équations d'équilibre du point M, assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe, ou entièrement libre (n° 39). Dans ce dernier cas, en considérant l'une des forces données comme étant égale et contraire à la résultante de toutes les autres, on en déduira les règles de leur composition et de leur décomposition, et le théorème du parallélogramme des forces. En appliquant ce principe à l'équilibre de trois forces parallèles, dont l'une est, par conséquent, égale et contraire à la résultante des deux autres, on en conclura également les règles de la composition et de la décomposition des forces parallèles.

On déduit aussi, sans difficulté, du principe général des vitesses virtuelles, les équations d'équilibre d'un corps solide entièrement libre, que nous avons trouvées d'une autre manière dans le n° 260.

En effet, nous pouvons d'abord supposer que tous les points de ce corps décrivent des droites égales entre elles et parallèles à l'un des axes des coordonnées. En appelant h la longueur de ces droites, et α, α', α'', etc., les angles que leur direction commune fait avec celles des forces données, nous aurons

$$p = h \cos \alpha, \quad p' = h \cos \alpha', \quad p'' = h \cos \alpha'', \text{ etc.}$$

pour les vitesses virtuelles des points M, M', M'', etc., du corps solide, projetées sur les directions des forces P, P', P'', etc., appliquées à ces points; donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (b), et supprimant le facteur h, comme à tous les termes, on aura l'équation d'équilibre

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = 0.$$

En considérant successivement les mouvemens du corps parallèlement aux deux autres axes des coordonnées, on obtiendra de même les deux autres équations d'équilibre semblables à celle-là.

Nous pouvons aussi faire tourner le corps autour de l'un des axes des coordonnées. Pour former l'équation qui correspondra à ce mouvement, je représenterai les coordonnées des points M, M', M'', etc., et les angles que font les directions des forces P, P', P'', etc., avec celles de ces coordonnées, par les mêmes lettres que dans le n° 260. En supposant que la rotation ait lieu autour de l'axe des z, chacun de ces points décrira un arc de cercle parallèle au plan des x et y, qui aura pour rayon la perpendiculaire abaissée de ce point sur cet axe. De plus, par la nature du corps solide, l'angle décrit par cette perpendiculaire sera le même pour tous ses points. Si donc on le suppose infiniment petit, qu'on le désigne par ω, et par r, r', r'', etc., les distances des points M, M', M'', etc., à l'axe des z, on aura $r\omega$, $r'\omega$, $r''\omega$, etc., pour leurs vitesses virtuelles; et en appelant aussi δ, δ', δ'', etc., les angles aigus ou obtus que font les directions de ces vitesses avec celles des forces P, P', P'', etc., il en résultera

$$p = r\omega \cos \delta, \quad p' = r'\omega \cos \delta', \quad p'' = r''\omega \cos \delta'', \text{ etc.},$$

pour les projections de ces mêmes vitesses sur les directions de ces forces ou sur leurs prolongemens.

Soient, en outre, a, b, c, les angles compris entre la direction de la vitesse $r\omega$ et des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point M; les mêmes angles relatifs à la direction de la force P étant α, β, γ, on aura

$$\cos \delta = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma;$$

mais à cause que la vitesse $r\omega$ est tangente en M, au cercle du rayon r qui a son centre dans l'axe des z, il est aisé de voir qu'on a

$$\cos b = \pm \frac{x}{r}, \quad \cos a = \mp \frac{y}{r} \quad \cos c = 0,$$

et, par conséquent,

$$p = r\omega \cos \delta = \pm (x \cos \beta - y \cos \alpha)\, \omega.$$

On aura de même

$$p' = \pm (x' \cos \beta' - y' \cos \alpha')\, \omega,$$
$$p'' = \pm (x'' \cos \beta'' - y'' \cos \alpha'')\, \omega,$$
etc.

Les signes dépendront du sens de la rotation; et l'on devra prendre, à la fois, les signes supérieurs ou les signes inférieurs dans toutes ces valeurs; en les substituant donc dans l'équation (1) et supprimant le facteur $\pm \omega$, commun à tous les termes, nous aurons

$$p\,(x \cos \beta - y \cos \alpha) + p'\,(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha') + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation d'équilibre est celle des momens par rapport à l'axe des z, autour duquel le mouvement a eu lieu; on obtiendra de la même manière les équations des momens par rapport aux axes des x et des y, en faisant tourner successivement le corps solide autour de ces deux droites.

341. On peut donner à l'équation (b), une forme différente qui en rendra les applications plus faciles.

Pour cela, soient x, y, z, les coordonnées du point M dans sa position d'équilibre; $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, ce qu'elles deviennent quand on transporte ce point matériel dans une position N infiniment voisine; X, Y, Z, les composantes de la

force P suivant les prolongemens des x, y, z, dans le sens positif; ces quantités infiniment petites δx, δy, δz, seront les projections de la vitesse virtuelle MN sur les directions de X, Y, Z; et p étant toujours sa projection sur la direction de P, on aura (n° 331)

$$Pp = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

En désignant par les mêmes lettres avec des accens, les quantités analogues qui répondent aux points M', M'', etc., on aura aussi

$$P'p' = X'\delta x' + y'\delta y' + Z'\delta z',$$
$$P''p'' = X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'',$$

et si l'on ajoute ces équations et la précédente, on pourra écrire

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

la somme Σ s'étendant à tous les points M, M', M'', etc., du système, et se composant, par conséquent, d'un nombre de parties semblables, égal à celui de ces points. De cette manière, l'équation (k) prendra la forme :

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0, \qquad (e)$$

qu'il s'agissait de lui donner.

Or, quelle que soit la liaison des points du système, on peut toujours l'exprimer par une ou plusieurs équations entre leurs coordonnées. Soient donc L, L', L'', etc., des fonctions données de x, y, z, x', y', etc., ou d'une partie de ces coordonnées; et supposons que ces équations soient

$$L = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0, \quad \text{etc.} \qquad (f)$$

Les déplacemens simultanés de tous les points du système devant être compatibles avec les conditions auxquelles il est assujetti, il faudra que les coordonnées x, y, z, x', y', etc., de M, M', M'', etc., et les coordonnées $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ $x' + \delta x'$, etc., de N, N', N'', etc., satisfassent successivement à ces équations; par conséquent, en négligeant les infiniment petits du second ordre, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \text{etc.} = 0,\\
&\frac{dL'}{dx}\delta x + \frac{dL'}{dy}\delta y + \frac{dL'}{dz}\delta z + \frac{dL'}{dx'}\delta x' + \text{etc.} = 0,\\
&\frac{dL''}{dx}\delta x + \frac{dL''}{dy}\delta y + \frac{dL''}{dz}\delta z + \frac{dL''}{dx'}\delta x' + \text{etc.} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (g)$$

etc.

Si l'on change en même temps le sens des déplacemens de tous les points du système, les signes de δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., changeront tous à la fois, et ces équations seront encore satisfaites; en sorte que le mouvement infiniment petit auquel elles répondront, et le mouvement directement contraire, sont également compatibles avec les conditions données, comme le suppose implicitement l'énoncé du principe des vitesses virtuelles (n° 331).

Cela posé, au moyen de ces équations (g), on éliminera, dans chaque cas, de l'équation (e), un nombre des quantités δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., égal à celui des équations (f); celles de ces quantités qui resteront ensuite dans le premier membre de l'équation (e), seront indépendantes entre elles; on devra donc égaler séparément leurs coefficiens à zéro; ce qui fournira toutes les équations d'équilibre du système, dont le nombre sera égal à trois fois celui des points matériels M, M', M'', etc., moins le nombre des équations (f). Lorsque les positions de ces points, c'est-à-dire, les valeurs de leurs coordonnées x, y, z, x', etc., seront données, il faudra que les composantes des forces P, P', P'', etc., satisfassent à ces équations d'équilibre; quand, au contraire, on donnera ces forces en grandeur et en direction, et que les positions des points du système seront inconnues, ces mêmes équations, jointes aux équations (f), serviront à déterminer toutes leurs coordonnées.

342. Les équations (e) et (g) étant linéaires par rapport à δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., l'élimination d'une partie de ces quantités pourra se faire, d'après la méthode connue, en ajoutant ces équations après avoir multiplié les équations (g) par des facteurs indéterminés, et en égalant à zéro, dans cette somme, les coefficiens de celles des quantités δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., qu'on voudra éliminer. Les coefficiens des quantités restantes devant ensuite être aussi égaux à zéro, il s'ensuit qu'on devra égaler à zéro les coefficiens de toutes les quantités δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., indistinctement, dans la somme dont il s'agit; d'où il résultera un nombre d'équations égal à celui des coordonnées, entre lesquelles il restera, dans chaque cas, à éliminer les facteurs indéterminés, pour avoir les équations d'équilibre du système.

En désignant par λ, λ', λ'', etc., les facteurs par lesquels on multipliera les équations (g), on aura,

par ce procédé,

$$\left.\begin{aligned} X + \lambda\frac{dL}{dx} + \lambda'\frac{dL'}{dx} + \lambda''\frac{dL''}{dx} + \text{etc.} = 0, \\ Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \lambda'\frac{dL'}{dy} + \lambda''\frac{dL''}{dy} + \text{etc.} = 0, \\ Z + \lambda\frac{dL}{dz} + \lambda'\frac{dL'}{dz} + \lambda''\frac{dL''}{dz} + \text{etc.} = 0, \end{aligned}\right\} (h)$$

pour les équations provenant des coefficiens de δx, δy, δz ; on aura de même

$$\left.\begin{aligned} X' + \lambda\frac{dL}{dx'} + \lambda'\frac{dL'}{dx'} + \lambda''\frac{dL''}{dx'} + \text{etc.} = 0, \\ Y' + \lambda\frac{dL}{dy'} + \lambda'\frac{dL'}{dy'} + \lambda''\frac{dL''}{dy'} + \text{etc.} = 0, \\ Z' + \lambda'\frac{dL}{dz'} + \lambda'\frac{dL'}{dz'} + \lambda''\frac{dL''}{dz'} + \text{etc.} = 0, \end{aligned}\right\} (h')$$

pour celles qui proviennent des coefficiens de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; et ainsi de suite.

Au lieu d'éliminer simplement λ, λ', λ'', etc., on pourra tirer de ces équations les valeurs de ces inconnues; nous allons expliquer comment on en déduira ensuite, en grandeur et en direction, les forces provenant de la liaison des points du système, qui agissent sur tous ces points et font équilibre aux forces données P, P', P'', etc. La détermination de ces forces inconnues est une partie importante du problème de l'équilibre, dont la solution complète et générale se trouvera ainsi comprise dans l'ensemble des équations (f), (h), (h'), etc.

343. Si l'on suppose que tous les points du système, moins le point M, soient rendus fixes, l'équilibre ne sera pas troublé. En vertu de l'équation $L = 0$, le point M sera alors astreint à se mouvoir sur la surface dont $L = 0$ est l'équation, et dans laquelle les coordonnées x, y, z, seront seules variables. Or, en désignant par μ la résistance de cette surface, laquelle sera dirigée suivant une des deux parties de la normale en M, on pourra remplacer cette surface, ou l'équation de condition $L = 0$, par cette force inconnue. De même, on pourra remplacer $L' = 0$ par une force μ_1 normale à la surface qui répond à cette équation; $L'' = 0$ par une force μ_2 normale à la surface correspondante; et ainsi de suite. Donc, en joignant à la force donnée P, ou à ses composantes X, Y, Z, ces forces normales μ, μ_1, μ_2, etc., on pourra ensuite considérer le point M comme entièrement libre et isolé. Par conséquent, si l'on désigne par a, b, c, les angles que fait la direction de la force μ avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point M; par a_1, b_1, c_1, les mêmes angles relatifs à la force μ_1; et ainsi de suite, nous aurons

$$\begin{aligned} X + \mu\cos a + \mu_1\cos a_1 + \mu_2\cos a_2 + \text{etc.} = 0, \\ Y + \mu\cos b + \mu_1\cos b_1 + \mu_2\cos b_2 + \text{etc.} = 0, \\ Z + \mu\cos c + \mu_1\cos c_1 + \mu_2\cos c_2 + \text{etc.} = 0, \end{aligned}$$

pour les trois équations d'équilibre du point M. De plus, si l'on fait, pour abréger,

$$r = \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{dL'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz}\right)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{dL'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dz}\right)^2},$$

etc.,

on aura aussi, par les formules connues (n° 21),

$$\left.\begin{aligned} &\cos a = \frac{1}{r}\frac{dL}{dx}, \quad \cos b = \frac{1}{r}\frac{dL}{dy}, \quad \cos c = \frac{1}{r}\frac{dL}{dz}, \\ &\cos a_1 = \frac{1}{r_1}\frac{dL'}{dx}, \quad \cos b_1 = \frac{1}{r_1}\frac{dL'}{dy}, \quad \cos c_1 = \frac{1}{r_1}\frac{dL'}{dz}, \\ &\cos a_2 = \frac{1}{r_2}\frac{dL''}{dx}, \quad \cos b_2 = \frac{1}{r_2}\frac{dL'}{dy}, \quad \cos c_2 = \frac{1}{r_2}\frac{dL''}{dz}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}\right\} (i)$$

ce qui changera les trois équations d'équilibre en celles-ci :

$$\begin{aligned} X + \frac{\mu}{r}\frac{dL}{dx} + \frac{\mu_1}{r_1}\frac{dL'}{dx} + \frac{\mu_2}{r_2}\frac{dL''}{dx} + \text{etc.} = 0, \\ Y + \frac{\mu}{r}\frac{dL}{dy} + \frac{\mu_1}{r_1}\frac{dL'}{dy} + \frac{\mu}{r_2}\frac{dL''}{dy} + \text{etc.} = 0, \\ Z + \frac{\mu}{r}\frac{dL}{dz} + \frac{\mu_1}{r_1}\frac{dL'}{dz} + \frac{\mu_2}{r_2}\frac{dL''}{dz} + \text{etc.} = 0. \end{aligned}$$

Or, en les comparant aux trois équations (g) avec lesquelles elles doivent être identiques, on en conclut

$$\mu = r\lambda, \quad \mu_1 = r_1\lambda', \quad \mu_2 = r_2\lambda'', \text{ etc.}$$

Ainsi, par rapport au point M, les forces provenant de sa liaison avec d'autres points du système, sont exprimées par les produits $r\lambda$, $r_1\lambda'$, $r_2\lambda''$, etc.; ces forces devant être des quantités positives, on donnera aux radicaux r, r_1, r_2, etc., les mêmes signes qu'aux quantités λ, λ', λ'', etc., et leurs di-

rections seront complètement déterminées par les équations (*).

Si l'on appelle de même μ', μ_1', μ_2', etc., les forces provenant de la liaison du système, qui agissent sur le point M' et sont normales aux différentes surfaces sur lesquelles il est obligé de se mouvoir, quand tous les autres points M, M'', M''', etc., sont rendus fixes, on trouvera pareillement

$$\mu' = \nu'\lambda \quad \mu_1' = \nu_1'\lambda', \quad \mu_2' = \nu_2\lambda'', \text{ etc.}$$

en faisant pour abréger,

$$\nu' = \sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2},$$

$$\nu_1' = \sqrt{\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2},$$

$$\nu_2' = \sqrt{\left(\frac{dL''}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dz'}\right)^2},$$

etc.

On obtiendra de même les expressions des forces relatives aux points M'', M''', etc.

344. En comparant les valeurs de μ et μ', on a

$$\mu\nu' = \mu'\nu;$$

de sorte qu'elles sont entre elles comme les quantités ν et ν'. Lors donc que deux points matériels M et M' sont liés entre eux, et, si l'on veut, à d'autres points en nombre quelconque, par une équation $L = 0$, il en résulte, dans l'état d'équilibre, des forces μ et μ' appliquées à M et M', dont les grandeurs sont entre elles comme ν et ν', et qui font avec les axes des coordonnées, des angles dont les cosinus sont

$$\frac{1}{\nu}\frac{dL}{dx}, \quad \frac{1}{\nu}\frac{dL}{dy}, \quad \frac{1}{\nu}\frac{dL}{dz},$$

pour la force μ, et

$$\frac{1}{\nu'}\frac{dL}{dx'}, \quad \frac{1}{\nu'}\frac{dL}{dy'}, \quad \frac{1}{\nu'}\frac{dL}{dz'},$$

pour la force μ'. Le sens et la grandeur de ces forces dépendent du signe et de la grandeur d'une quantité λ qui se déduit, dans chaque cas, des équations d'équilibre.

La considération des surfaces sur lesquelles chacun des points d'un système conserve la liberté de se mouvoir, lorsque tous les autres sont supposés fixes, détermine les directions normales des forces provenant de la liaison de ces mobiles, pour chacune des équations par lesquelles cette liaison est exprimée (n° 290); mais on n'en peut conclure aucun rapport entre les forces relatives à deux points matériels liés par une même équation; et c'est le principe des vitesses virtuelles, ou les équations (*), (*'), etc., qu'on en a déduites, qui fait connaître ce rapport *à priori*, dans le cas de l'équilibre.

345. Pour donner une application de ces formules, reprenons l'exemple du polygone funiculaire que nous avons considéré dans le § Ier du chapitre précédent; et supposons que les points matériels M, M', M'', etc., soient les sommets successifs de ce polygone.

Si l'on appelle l, l', l'', etc., les longueurs données des côtés MM', M'M'', M''M''', etc., les équations (f), seront, dans ce cas,

$$L = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} - l = 0,$$

$$L' = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2} - l' = 0,$$

$$L'' = \sqrt{(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 + (z'' - z''')^2} - l'' = 0,$$

etc.;

d'où il résultera

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{dL}{dx'} = \frac{x - x'}{l}, \quad \frac{dL'}{dx'} = -\frac{dL'}{dx''} = \frac{x' - x''}{l'}, \text{ etc.,}$$

$$\frac{dL}{dy} = -\frac{dL}{dy'} = \frac{y - y'}{l}, \quad \frac{dL'}{dy'} = -\frac{dL'}{dy''} = \frac{y' - y''}{l'}, \text{ etc.,}$$

$$\frac{dL}{dz} = -\frac{dL}{dz'} = \frac{z - z'}{l}, \quad \frac{dL'}{dz'} = -\frac{dL'}{dz''} = \frac{z' - z''}{l'}, \text{ etc.,}$$

et toutes les autres différences partielles de L, L', L'', etc., qui entrent dans les formules précédentes, seront égales à zéro.

En considérant les deux points M, et M', on aura

$$\nu = \nu' = \pm 1, \quad \mu = \mu' = \pm \lambda,$$

où l'on prendra les signes supérieurs ou inférieurs, selon que la valeur de λ sera positive ou négative. On conclut de là et des équations précédentes, que les points M et M' seront sollicités par des forces égales et contraires, dirigées suivant la droite MM' ou suivant ses prolongemens, et dont la quantité λ, abstraction faite du signe, sera la grandeur commune. Il en sera de même à l'égard des points M' et M'', M'' et M''', etc.; en sorte que dans l'état d'équi-

libre, les quantités λ, λ', λ'', etc., exprimeront les contractions ou les tensions des côtés successifs MM', M'M'', M''M''', etc. Comme on aura d'après les équations (i),

$$\cos a = \pm\frac{x - x'}{l},\ \cos b = \pm\frac{y - y'}{l},\ \cos c = \pm\frac{z - z'}{l},$$

et qu'on devra prendre les signes supérieurs ou inférieurs, selon que la valeur de λ sera positive ou négative, on en conclut, par exemple, que la force appliquée au point M sera dirigée de M vers M', et exprimera une contraction du côté MM', quand cette valeur sera négative, et que cette force agira dans le sens opposé et exprimera une tension, lorsque la valeur de λ sera positive. L'un ou l'autre de ces deux cas sera possible, si les côtés du polygone sont des verges inflexibles, jointes par des charnières; et le second cas pourra seul avoir lieu, si les côtés sont des fils flexibles.

Les équations (k), (k'), (k''), etc., pourront s'écrire ainsi :

$$X = \frac{\lambda(x' - x)}{l},$$

$$Y = \frac{\lambda(y' - y)}{l},$$

$$Z = \frac{\lambda(z' - z)}{l},$$

$$X' + \frac{\lambda(x' - x)}{l} = \frac{\lambda'(x'' - x')}{l'},$$

$$Y' + \frac{\lambda(y' - y)}{l} = \frac{\lambda'(y'' - y')}{l'}$$

$$Z' + \frac{\lambda(z' - z)}{l} = \frac{\lambda'(z'' - z')}{l'},$$

$$X'' + \frac{\lambda'(x'' - x')}{l'} = \frac{\lambda''(x''' - x'')}{l''},$$

$$Y'' + \frac{\lambda'(y'' - y')}{l'} = \frac{\lambda''(y''' - y'')}{l''},$$

$$Z'' + \frac{\lambda'(z'' - z')}{l'} = \frac{\lambda''(z''' - z'')}{l''},$$

etc.

Les trois premières montrent que la tension λ sera la résultante des forces X, Y, Z. En les ajoutant aux trois suivantes, on aura

$$X + X' = \frac{\lambda'(x'' - x')}{l'},$$

$$Y + Y' = \frac{\lambda'(y'' - y')}{l'},$$

$$Z + Z' = \frac{\lambda'(z'' - z')}{l'};$$

ce qui fait voir que la tension λ' sera la résultante de X', Y', Z', et des forces X, Y, Z, transportées au point M', parallèlement à elles-mêmes. En continuant de même, on aura pour la tension d'un côté quelconque la même valeur que dans le n° 287.

Le nombre des sommets M, M', M''; etc., étant désigné par n, celui des équations précédentes sera $3n$, et celui des tensions λ, λ', λ'', etc., égal à $n - 1$. En éliminant ces quantités, on aura donc $2n + 1$ équations d'équilibre, lesquelles, jointes aux $n - 1$ longueurs données l, l', l'', etc., des côtés du polygone, suffiront pour déterminer les $3n$ coordonnées de ses sommets, et, par conséquent, sa figure d'équilibre. Mais ce calcul n'aurait aucune utilité; et il vaut mieux, comme nous l'avons fait dans le n° 286, tracer successivement les côtés du polygone funiculaire, d'après les grandeurs et les directions données qui agissent à ses différens sommets.

346. Dans le cas d'un système quelconque de points matériels M, M', M'', etc., si les forces données, qui sont appliquées à ces points, proviennent de leurs attractions ou répulsions mutuelles, et de forces semblables qui émanent d'un ou plusieurs centres, on aura

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = d\phi(x, y, z, x', y', z', \text{etc.});$$

ϕ désignant une fonction donnée des coordonnées de M, M', M'', etc., dépendante de la loi de ces forces par rapport aux distances.

En effet, à l'égard des forces provenant des centres fixes, cela résulte de ce qu'on a vu dans le n° 158. Supposons, en outre, que U exprime l'action mutuelle de M et M', qui sera attractive, pour fixer les idées. Soit aussi u leur distance mutuelle, de sorte que U soit une fonction donnée de u, et qu'on ait

$$u^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 :$$

Les cosinus des angles que fait la droite MM' avec des droites menées par le point M, suivant les directions des x, y, z, positives, seront

$$\frac{x' - x}{u},\quad \frac{y' - y}{u},\quad \frac{z' - z}{u};$$

en les multipliant par U, on aura les composantes de cette force appliquée au point M et dirigée suivant MM'. Celles de la même force U, appliquée au point M' suivant la direction M'M, seront égales et contraires; et de là on conclut

$$\frac{U}{u}\left[(x' - x)(dx - dx') + (y' - y)(dy - dy') + (z' - z)(dz - dz')\right],$$

pour la partie de la somme Σ qui provient de l'action et de la réaction de M et M'. Or, en différentiant la valeur de u^2, on a

$$udu = (x' - x)(dx' - dx) + (y' - y)(dy' - dy) + (z' - z)(dz' - dz);$$

ce qui réduit la quantité précédente à $-Udu$, c'est-à-dire, à la différentielle d'une fonction de u. Il en sera de même pour les parties de la somme Σ provenant des actions mutuelles des autres points du système; par conséquent, sa valeur entière se composera de termes qui seront tous des différentielles exactes, et cette valeur sera aussi la différentielle d'une fonction donnée des coordonnées de tous ces points.

En vertu de l'équation (e), cette fonction, que nous représentons par ϕ, sera un *maximum* ou un *minimum*, relativement aux valeurs des coordonnées qui répondent à une position d'équilibre du système; et, réciproquement, si l'on détermine le *maximum* ou le *minimum* de la fonction ϕ, en ayant égard aux équations (f) qui peuvent être données entre les coordonnées, les valeurs qu'on obtiendra pour ces variables répondront à des positions d'équilibre.

On conclut de là que quand le système des points M, M', M'', etc., est en mouvement, de sorte que leurs coordonnées, et, par suite, la quantité ϕ, soient des fonctions du temps, cette fonction ϕ atteindra son *maximum* ou son *minimum*, toutes les fois que le système passera dans une position où il resterait en équilibre, si les points qui le composent n'avaient pas de vitesses acquises.

347. Il y aura entre le *maximum* et le *minimum* de la quantité ϕ une différence essentielle, à laquelle il importe d'avoir égard, et que nous allons expliquer.

On dit que l'état d'équilibre d'un corps ou d'un système de corps est *stable*, lorsqu'en écartant un tant soit peu ces mobiles de leurs positions, ils tendent à y revenir, en faisant de petites oscillations que les frottemens et les résistances des milieux finissent toujours par éteindre ou rendre insensibles. L'équilibre est non stable ou *instantané*, lorsque le corps ou le système de corps qui est dans cet état, tend de plus en plus à s'en éloigner, et finit par *chavirer*, dès qu'on l'en a un peu écarté. En ne supposant aucun frottement qui puisse, jusqu'à un certain point, retenir les corps dans leurs positions, ce second état d'équilibre est un cas purement mathématique, qu'on ne saurait jamais observer, puisque la moindre force perturbatrice suffirait pour le détruire.

Cela posé, les équations fournies par le principe des vitesses virtuelles, ou, ce qui est la même chose, par la condition du *maximum* ou du *minimum* de la fonction ϕ, sont communes à ces deux états; mais le *maximum* convient à la stabilité, et le *minimum* à l'équilibre instantané; et c'est, en effet, ce que nous ferons voir dans un autre chapitre, où nous considérerons la nature du mouvement qui a lieu lorsqu'un système de points matériels a été très peu écarté d'un état d'équilibre quelconque. En attendant, nous allons donner des exemples de ces deux états d'équilibre dans le cas d'un système de corps pesans, et faire connaître d'abord une propriété de son centre de gravité.

348. Supposons donc que la pesanteur soit la seule force appliquée aux points M, M', M'', etc., lesquels seront les centres de gravité de corps dont nous représenterons les poids par ϖ, ϖ', ϖ'', etc. En prenant la pesanteur verticale et dirigée dans le sens de cette force, nous aurons

$$Z = \varpi, \quad Z' = \varpi', \quad Z'' = \varpi'', \quad \text{etc.};$$

les autres composantes seront toutes nulles, et il en résultera

$$d\phi = \varpi dz + \varpi' dz' + \varpi'' dz'' + \text{etc.}$$

Mais en appelant Π la somme des poids ϖ, ϖ', ϖ'', etc., et z_1 l'ordonnée de leur centre de gravité, verticale et dirigée dans le sens de la pesanteur, on a aussi (n° 64)

$$\Pi z_1 = \varpi z + \varpi' z' + \varpi'' z'' + \text{etc.};$$

on aura donc

$$d\phi = \Pi dz_1, \quad \phi = c + \Pi z_1;$$

c étant une constante arbitraire.

Or, on conclut de là, 1° que l'ordonnée z_1 est la quantité qui devra être un *maximum* ou un *minimum*, lorsque le système sera en équilibre, et réciproquement; 2° que le *maximum* de z_1 répondra au cas de l'équilibre stable, et son *minimum* au cas de l'équilibre instantané.

Ainsi, la condition d'équilibre d'un système quelconque de corps pesans, consiste en ce que le centre de gravité du système entier soit le plus bas ou le plus haut possible; le plus bas quand l'équilibre est stable, et le plus haut quand il n'est qu'instantané.

349. D'après ce théorème, si une chaîne pesante, attachée par ses deux bouts à des points fixes, est en équilibre, son centre de gravité sera le plus bas possible; ce qui s'accorde avec le résultat du n° 296.

Si un point matériel pesant est posé sur une courbe, et qu'en plusieurs points la tangente soit horizontale, l'ordonnée verticale du mobile, comptée dans le sens de la pesanteur, sera un *maximum* dans ceux de ces points où la courbe est concave par en haut, et un *minimum* dans ceux où elle tourne sa concavité par en bas; par conséquent, les premiers seront des positions d'équilibre stable, et les derniers des positions d'équilibre instantané.

Si l'on pose un ellipsoïde homogène et pesant, sur un plan fixe horizontal, son centre de gravité, ou de figure, sera le plus bas possible lorsque l'ellipsoïde touchera le plan fixe par l'une des deux extrémités du plus petit de ses trois axes; et alors l'équilibre sera stable. Quand il le touchera par l'une des extrémités du plus grand de ses trois axes, son centre de gravité sera le plus haut possible; et l'équilibre ne sera qu'instantané. Enfin, si le point de contact est une extrémité de l'axe moyen, l'élévation du centre de gravité sera un *minimum* pour une partie des sections du corps, et un *maximum* pour les autres sections; par conséquent, l'équilibre sera stable ou non stable selon que les déplacemens auront lieu dans le sens des premières sections ou dans le sens des dernières. Tout cela étant évident, *à priori*, peut servir de vérification au théorème du numéro précédent.

Supposons encore qu'on ait versé dans un vase deux liquides homogènes et pesans. Si la surface de séparation et celle qui termine le liquide supérieur sont toutes deux horizontales, et que ce liquide soit celui qui a la moindre densité, le centre de gravité de ces deux liquides sera le plus bas possible; car il est aisé de voir qu'en inclinant ou courbant l'une ou l'autre des deux surfaces, on élèvera toujours le centre de gravité du système. Ces deux surfaces étant toujours horizontales, si le liquide le moins dense est au-dessous de l'autre, on verra de même que le centre de gravité du système sera le plus haut possible. Par conséquent, pour l'équilibre de deux liquides superposés, il est nécessaire et il suffit que chacun d'eux soit terminé par un plan horizontal; mais, pour la stabilité, il faut, de plus, que ce soit le liquide le plus dense qui occupe la partie inférieure du vase. Quand la différence des deux densités est peu considérable, il est possible, avec beaucoup de précaution, de faire surnager le liquide le plus dense; mais cet équilibre non stable ne peut se maintenir assez de temps, pour être observé, qu'à raison du frottement des deux liquides contre les parois du vase.

LIVRE QUATRIÈME.

DYNAMIQUE,

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPE GÉNÉRAL DE LA DYNAMIQUE.

350. Lorsque des points matériels, soumis à des forces données, sont liés entre eux d'une manière quelconque, ils prennent, à chaque instant, des vitesses infiniment petites, différentes de celles que ces forces leur imprimeraient s'ils étaient libres. Ces forces étant connues, ces dernières vitesses le sont aussi; et le problème général de la Dynamique consiste à en déduire, en grandeur et en direction, les accroissemens de vitesses qui ont réellement lieu. Sa solution dépend d'un principe très simple que l'on doit à D'Alembert, et d'après lequel on ramène toutes les questions relatives au mouvement, à de simples questions d'équilibre, toujours résolubles par les règles exposées dans le livre précédent.

Pour énoncer ce principe d'une manière précise, soient m la masse d'un des points matériels que l'on considère, et $u\tau$ la vitesse que la force qui le sollicite lui imprimerait, s'il était libre, dans un temps τ infiniment petit. Appelons $q\tau$ l'accroissement de vitesse qui aura également lieu pendant ce même instant, et dont la direction différera, en général, de celle de la vitesse donnée $u\tau$. Par la règle du parallélogramme des forces, qui s'applique également aux vitesses (n° 145), décomposons $u\tau$ en deux autres vitesses, dont l'une soit $q\tau$, et l'autre sera représentée par $p\tau$. La force motrice appliquée au mobile aura le produit mu pour mesure; celles qui seraient capables des vitesses $q\tau$ et $p\tau$, auront pour valeurs mq et mp; et nous pourrons regarder la force donnée mu comme la résultante de la force mq, à laquelle est dû l'accroissement de vitesse qui a réellement lieu, et de la force mp, dont l'effet est détruit par la liaison des points du système. Nous appellerons cette dernière la *force perdue*.

Désignons par les mêmes lettres avec des accens, savoir, m', u', q', p'; m'', u'', q'', p'', etc., les quantités analogues à m, u, q, p, qui répondent aux autres points du système. Quels que soient leur nombre et leur liaison mutuelle, il est évident que les forces perdues mp, $m'p'$, $m''p''$, etc., devront se faire équilibre; car si cet équilibre n'avait pas lieu, ces forces produiraient de certaines vitesses infiniment petites pendant l'instant τ, et, par conséquent, $q\tau$, $q'\tau$, $q''\tau$, etc., ne seraient plus, contre l'hypothèse, les accroissemens de vitesses qui ont réellement lieu.

C'est en cela que consiste le principe de D'Alembert. Au lieu des forces mp, $m'p'$, $m''p''$, etc., on peut mettre, dans les équations d'équilibre du système que l'on considère, les quantités de mouvement $mp\tau$, $m'p'\tau$, $m''p''\tau$, qui leur sont proportionnelles, et alors on dit qu'il y a équilibre entre les quantités de mouvement infiniment petites, perdues dans chaque instant par tous les points du système, en vertu de leur liaison mutuelle.

351. On peut changer cet énoncé général en un autre qui sera souvent plus commode.

Observons, pour cela, que mu étant la résultante de mq et mp, chacune de ces composantes, la seconde par exemple, est aussi la résultante de mu et de l'autre composante mq, prise en sens contraire de sa direction; en remplaçant ainsi chacune des forces perdues mp, $m'p'$, $m''p''$, etc., par les deux forces dont elle est la résultante, nous voyons que le principe de D'Alembert revient à dire qu'il y a constamment équilibre entre les forces données, qui agissent sur tous les points d'un système de points matériels en mouvement, et les forces auxquelles sont dus les accroissemens infiniment petits de vitesse qui ont lieu à chaque instant, ces dernières forces étant prises en sens contraire de leurs directions. On remplacera, si l'on veut, les premières forces par les quantités de mouvement $mu\tau$, $m'u'\tau$, $m''u''\tau$, etc., et les dernières par $mq\tau$, $m'q'\tau$, $m''q''\tau$, etc., en donnant à chacune des vitesses q, q', q'', etc., une direction contraire à la sienne, et laissant à u, u', u'', etc., leurs propres directions.

Ce second énoncé a l'avantage de conduire immédiatement à des équations entre les inconnues q, q', q'', etc., et les données du problème, qui sont les vitesses u, u', u'', etc. Ces équations résulteront, soit des conditions d'équilibre, soit des liaisons qui auront lieu, dans chaque cas, entre les points du système; elles seront toujours en même nombre que les coordonnées de tous ces points (n° 342), et, conséquemment, en même nombre que les composantes des vitesses q, q', q'', etc., parallèles aux axes de ces coordonnées; en sorte qu'elles feront connaître, en grandeur et en direction, les accroissemens de vitesse de tous les mobiles à chaque instant; ce qui est, comme nous l'avons dit, la solution générale du problème de la Dynamique. Remonter ensuite de ces accroissemens infiniment petits aux vitesses et aux coordonnées du mobile en fonctions du temps, est une question de calcul intégral.

352. Lorsque les forces mq, $m'q'$, $m''q''$, etc., auront été déterminées, si on les prend en sens contraire de leurs directions, et qu'on les compose avec les forces mu, $m'u'$, $m''u''$, etc., on aura les forces perdues mp, $m'p'$, $m''p''$, etc. C'est à ces dernières forces que sont dues les tensions des fils, des verges élastiques et de tous les liens physiques qui peuvent exister entre les différens points du système, ainsi que les pressions exercées sur les surfaces et les courbes données qu'ils peuvent être obligés de parcourir; et, d'après le premier énoncé du principe de D'Alembert, ces pressions ou tensions se détermineront, dans l'état de mouvement de système, par les règles de la Statique appliquées aux forces perdues (n° 343).

Pendant le mouvement, une partie de la force donnée, qui agit sur chaque mobile, est donc employée à faire varier sa vitesse, et n'a aucune influence sur les pressions ou tensions dont il s'agit; et l'autre partie, qu'on regarde comme détruite ou perdue, produit ces tensions ou pressions, et n'influe nullement sur la vitesse. Lorsque le système est parvenu à un état permanent dans lequel tous les points qui le composent se meuvent uniformément, la première partie de chaque force est nulle, et la force entière est détruite, c'est-à-dire, employée à produire les pressions contre les obstacles fixes, et les tensions des liens physiques, comme si ce système était en équilibre.

Supposons, d'après cela, qu'une corde soit en mouvement suivant sa longueur, et que des forces données agissent à ses deux bouts suivant ses prolongemens. Si ce mouvement demeure uniforme, les deux forces seront égales, et leur valeur commune exprimera la tension de la corde; si, au contraire, les deux forces sont inégales, l'excès de la plus grande sur la plus petite sera employé à accélérer ou à retarder le mouvement de la corde, et sa tension aura pour mesure la partie de la plus grande force détruite par la plus petite, ou égale et contraire à celle-ci. Par exemple, lorsqu'un cheval traîne un fardeau sur une route, et que le mouvement du système demeure uniforme, l'effort du cheval, parallèlement à la route, est égal au poids du fardeau décomposé suivant cette direction, plus le frottement du fardeau contre la route; il est constant quand l'état de la route et son inclinaison ne varient pas; si on le suppose transmis au fardeau par le moyen de plusieurs cordons parallèles entre eux et à la route, l'effort total sera égal à la somme des tensions de tous ces cordons; et, dans la pratique, on mesure l'effort exercé suivant chaque cordon par l'extension d'un ressort interposé suivant sa longueur. L'inclinaison et l'état de la route ne changeant pas, si les efforts de l'animal augmentent ou diminuent, le mouvement du système s'accélère ou se ralentit, sans que les tensions éprouvent aucune variation. Lorsque la route est horizontale, le frottement insensible, et le mouvement uniforme, le cheval n'a d'autre force à développer que celle qui est nécessaire pour sa propre marche; il n'exerce aucun effort suivant les cordons attachés au fardeau, et leurs tensions sont constamment nulles.

353. Le principe de D'Alembert a aussi lieu relativement aux quantités de mouvemens finies, perdues par des corps liés entre eux d'une manière quelconque, et sur lesquels on exerce des percussions simultanées, qui ne sont autre chose que des forces motrices agissant sur les mobiles avec de très grandes intensités et pendant de très courts intervalles de temps (n° 126).

Ainsi, supposons qu'une force de cette nature agisse sur le point dont la masse est m, pendant un temps fini, mais assez petit pour que le point m et tous les autres points du système ne changent pas sensiblement de position dans cet intervalle de temps. Représentons-le par τ, et par U la vitesse de grandeur finie que cette force imprimerait au point

m, s'il était libre; et soit aussi Q la vitesse qu'elle lui imprime réellement, de sorte qu'au bout du temps ϵ il se trouve animé de la vitesse qu'il avait auparavant, de la vitesse Q, et de celle qui lui est communiquée, pendant le même temps, par les forces motrices qui peuvent agir sur le système, indépendamment des percussions. Décomposons la vitesse U en deux autres, l'une égale à Q, et l'autre que je représenterai par P. Faisons des suppositions semblables à l'égard des autres points m', m'', etc., du système, et désignons, par rapport à ces points, par U', Q', P'; U'', Q'', P'', etc., les quantités analogues à U, Q, P. L'équilibre existera dans le système, soit au commencement, soit à la fin du temps ϵ, entre les quantités de mouvement perdues mP, $m'P'$, $m''P''$, etc.

En effet, décomposons la durée ϵ des percussions en un nombre infini d'instans infiniment petits, Soient τ l'un de ces instans, $m\alpha\tau$, $m'\alpha'\tau$, $m''\alpha''\tau$, etc., les parties infiniment petites de mP, $m'P'$, $m''P''$, etc., perdues pendant cet instant, et, comme précédemment $mp\tau$, $m'p'\tau$, $m''p''\tau$, etc., les quantités infiniment petites de mouvement, provenant des forces motrices, et perdues dans ce même instant. D'après l'énoncé du n° 350, il y aura équilibre, dans le système, entre ces deux groupes de quantités de mouvement; chacune des équations relatives à cet équilibre sera de la forme :

$$Am\alpha\tau + A'm'\alpha'\tau + A''m''\alpha''\tau + \text{etc.}$$
$$+ Bmp\tau + B'm'p'\tau + B''m''p''\tau + \text{etc.} = 0,$$

en désignant par A, A', A'', etc., B, B', B'', etc., des coefficiens dépendans des positions des mobiles; et cette équation subsistera pendant toute la durée ϵ des percussions. La somme des valeurs de son premier membre qui répondent à tous les instans de cette durée, sera donc égale à zéro; mais, dans cette sommation, on pourra regarder les coefficiens comme invariables, puisque, par hypothèse, les positions des points m, m', m'', etc., ne changent pas sensiblement pendant toute la durée des percussions; de plus, les sommes des valeurs de $m\alpha\tau$, $m'\alpha'\tau$, $m''\alpha''\tau$, etc., seront les quantités de mouvement mP, $m'P'$, $m''P''$, etc.; celle de $mp\tau$, $m'p'\tau$, $m''p''\tau$, etc., pourront être négligées par rapport aux premières, parce que les effets des forces motrices, telle que des poids et des attractions dirigés vers des centres fixes ou mobiles, pendant les durées des percussions, sont généralement insensibles par rapport aux effets de ces autres forces; par conséquent nous aurons

$$AmP + A'm'P' + A''m''P'' + \text{etc.} = 0.$$

Il en sera de même à l'égard de toutes les équations d'équilibre du système, qui subsisteront toutes entre les quantités de mouvement perdues mP, $m'P'$, $m''P''$, etc.; ce qu'il s'agissait de faire voir.

A cause de l'invariabilité des coefficiens A, A', A'', etc., pendant la durée des percussions, ces équations se rapportent indifféremment au commencement ou à la fin du temps ϵ. Pour plus de commodité, on a supposé cette durée la même pour toutes les percussions; ce qui est permis évidemment, pourvu que ϵ soit la durée la plus longue des percussions que l'on considère en même temps.

Ces percussions proviendront, en général, des chocs des mobiles entre eux ou contre des obstacles fixes. Il pourra arriver que pendant le temps ϵ, ces corps glissent un tant soit peu l'un contre l'autre ou contre ces obstacles; ils éprouveront alors des frottemens qui leur enlèveront de certaines quantités de mouvement : or, on ne peut pas négliger ces quantités comme celles qui proviennent de la pesanteur et des attractions; car le frottement est une force proportionnelle à la pression, c'est-à-dire, une force qui enlève aux mobiles, dans chaque instant, des quantités de mouvement infiniment petites, proportionnelles à celle que la pression pourrait leur imprimer dans le même instant; d'où il résulte que les effets des frottemens, pendant le temps ϵ, peuvent être comparables à ceux des percussions. Ainsi, quand il y aura un glissement des mobiles pendant la durée des percussions, il faudra établir l'équilibre entre les quantités de mouvement perdues par les frottemens et celles que nous avons représentées par mP, $m'P'$, $m''P''$, etc. On pourra, si l'on veut, remplacer les vitesses P, P', P'', etc., par leurs composantes, c'est-à-dire par des vitesses égales et contraires à Q, Q', Q'', etc., et par les vitesses U, U', U'', etc., prises dans leurs propres directions.

Cette extension du principe général de la Dynamique aux quantités de mouvement de grandeur finie, servira à déterminer les vitesses des corps d'un système, soit à l'origine du mouvement, soit pendant sa durée, quand ils se rencontrent ou qu'ils viennent choquer des obstacles fixes, et, généralement, lorsque les vitesses des mobiles éprouvent ce qu'on appelle des *changemens brusques*.

354. Les différentes applications du principe général de la Dynamique, que nous aurons à faire dans la suite de ce Traité, seront relatives à des mobiles entre lesquels il existe des liens physiques quelconques, qui agissent, en outre, l'un sur l'autre par voie d'attraction ou de répulsion à distance, et qui éprouvent des percussions à des instans particuliers. Mais avant d'aller plus loin, je crois utile de donner, dans ce chapitre, un exemple simple de chacune de ces trois circonstances, pour servir de développement aux généralités qu'on vient d'exposer.

Considérons d'abord, comme dans le quatrième cas du n° 329, deux corps pesans, attachés aux extrémités d'un fil qu'on regarde comme inextensible, et posés sur deux plans inclinés, adossés l'un à l'autre. Soient h la hauteur commune de ces deux plans, l la longueur de l'un deux, l' celle de l'autre, m la masse du corps posé sur le premier, m' celle du corps posé sur le second, et g la gravité. Si l'on fait abstraction du frottement, la force accélératrice du

premier mobile sera égale à la composante de la pesanteur suivant le premier plan, laquelle est égale à $\frac{gh}{l}$, et la force accélératrice du second mobile sera de même $\frac{gh}{l'}$. Désignons, au bout du temps t, par v la vitesse commune à tous les points de m, et par v' celle de tous les points de m'; et convenons de regarder ces vitesses comme positives ou comme négatives, selon que les mobiles descendent ou s'élèvent. Pendant l'instant dt, v et v' augmenteront de dv et dv'; mais, pendant ce même instant, les forces accélératrices imprimeraient aux mobiles, s'ils étaient libres, les vitesses positives $\frac{gh}{l}dt$ et $\frac{gh}{l'}dt$: en vertu de la liaison des deux corps, les vitesses qu'ils perdent pendant l'instant dt sont donc $\frac{gh}{l}dt - dv$ et $\frac{gh}{l'}dt - dv'$. Or, pour que les deux quantités de mouvement correspondantes se fassent équilibre (n° 350), il faut évidemment qu'elles soient égales; par conséquent, on aura

$$m\left(\frac{gh}{l}dt - dv\right) = m'\left(\frac{gh}{l'}dt - dv'\right). \quad (1)$$

De plus, les deux vitesses v et v' sont égales et de signe contraire; car, dans le mouvement dont il s'agit, l'une des deux masses descend et l'autre s'élève, en parcourant des espaces égaux sur les plans inclinés. On a donc

$$v' = -v, \quad dv' = -dv.$$

Je substitue cette valeur de dv dans l'équation (1); d'où je déduis ensuite

$$dv = \frac{(ml' - m'l)\,h}{(m + m')\,ll'}\,gdt,$$

et, en intégrant,

$$v = \frac{(ml' - m'l)\,h}{(m + m')\,ll'}\,gt + c;$$

c étant la constante arbitraire.

Si l'on multiplie par dt et qu'on intègre de nouveau, on aura l'espace parcouru par m sur son plan incliné; mais cette valeur de v suffit pour montrer que son mouvement est uniformément accéléré ou retardé, selon qu'on a $ml' > m'l$ ou $ml' < m'l$. En vertu de l'équation $v' = -v$, le contraire a lieu à l'égard de m'.

J'appelle T la tension du fil auquel les deux mobiles sont attachés, laquelle est due à la force perdue à chaque instant par chacun de ces deux corps. Cette force motrice a pour valeur l'une des quantités de mouvement qui forment les deux membres de l'équation (1), divisée par dt; par conséquent, on a

$$T = m\left(\frac{gh}{l} - \frac{dv}{dt}\right);$$

et, en mettant pour dv sa valeur précédente, il vient

$$T = \frac{(l + l')\,mm'hg}{(m + m')\,ll'};$$

valeur qui se réduit à $\frac{mhg}{l}$, comme cela devait être, dans le cas de $ml' = m'l$, qui est celui de l'équilibre. Quant à la pression exercée sur chaque plan incliné, elle est due à la composante perpendiculaire à ce plan, du poids du corps qu'il supporte, et la même que dans l'état d'équilibre.

355. La constante c est la vitesse initiale de m; si les deux corps sont partis de l'état de repos, on a $c = 0$; mais si l'un d'eux, ou tous les deux, ont éprouvé une percussion à l'origine du mouvement, il faudra en déduire leurs vitesses initiales.

Supposons donc qu'à l'origine du mouvement les mobiles m et m' ont éprouvé simultanément des percussions qui auraient imprimé, suivant les prolongemens du fil auquel ils sont attachés, une vitesse a à tous les points de m, et une vitesse a' à tous les points de m', si ces deux corps eussent été libres. Comme leurs vitesses initiales sont c et $-c$, il s'ensuit qu'à cette origine les quantités de mouvement perdues ont été, en grandeur et en direction, $m(a - c)$ et $m'(a' + c)$; pour qu'elles se fassent équilibre, d'après le n° 353, il faudra qu'elles soient égales; on aura donc

$$m(a - c) = m'(a' + c);$$

d'où l'on tire

$$c = \frac{ma - m'a'}{m + m'}.$$

La percussion que le fil a subie à cet instant, suivant chacun de ses prolongemens, est due à l'une ou l'autre de ces quantités de mouvement perdues, dont la valeur commune est

$$\frac{mm'(a + a')}{m + m'};$$

en sorte que la percussion initiale du fil est la même que s'il était suspendu verticalement à un point fixe, et qu'un corps attaché à son extrémité inférieure fût frappé, dans le sens de la pesanteur, par un second corps animé de cette quantité de mouvement et qui se réunit au premier.

356. Au lieu de deux corps pesans, on en pourrait considérer trois ou un plus grand nombre, posés sur une suite de plans inclinés, et dont chacun serait lié au suivant par un fil inextensible : le mouvement de ce système de corps serait de la

même nature et se déterminerait de la même manière que précédemment.

On peut aussi remplacer les deux corps que l'on vient de considérer, par une chaîne pesante, posée sur les deux plans inclinés. En la supposant homogène et d'une épaisseur constante, et désignant, au bout du temps t, par x et x' les longueurs de ses deux parties, leurs masses seront entre elles comme ces quantités, de sorte qu'il faudra d'abord remplacer, dans l'équation (1), m et m' par x et x'. De plus, pendant l'instant dt, la première de ces deux parties augmente de l'élément dx, qui prend la vitesse v commune à tous ses points; pour cette raison, la quantité de mouvement perdue par cette partie sera diminuée d'une quantité positive ou négative, et égale à vdx. Par une raison semblable, la quantité de mouvement perdue par la seconde partie de la chaîne pendant le même instant, devra être diminuée d'une quantité égale à $v'dx'$: il faudra donc, en outre, retrancher vdx et $v'dx'$ du premier et du second membre de cette équation (1), qui deviendra, de cette manière,

$$x\left(\frac{gh}{l}dt - dv\right) - vdx = x'\left(\frac{gh}{l'}dt - dv'\right) - v'dx'.$$

Si l'on appelle λ la longueur constante de la chaîne entière, on aura

$$x + x' = \lambda, \quad dx + dx' = 0;$$

les vitesses v et v' de ses deux parties seront d'ailleurs

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad v' = \frac{dx'}{dt};$$

d'où il résulte $dx' = -dx$ et $vdx = v'dx'$; et, en éliminant x' et dv' de l'équation du mouvement, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha^2 x + \varepsilon = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{gh(l+l')}{\lambda ll'} = \alpha^2, \quad \frac{gh}{l'} = \varepsilon.$$

L'intégrale complète de cette équation linéaire est

$$x = ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t} + \frac{\lambda l}{l+l'},$$

en désignant par e la base des logarithmes népériens, et par a et b les deux constantes arbitraires, dont on déterminera les valeurs d'après celles de x et $\frac{dx}{dt}$, qui répondent à $t = 0$. Lorsque toute la chaîne se trouvera sur un même plan, c'est-à-dire, lorsque la différence $x - x'$ sera devenue égale à $\pm\lambda$, le mouvement changera de nature, et deviendra uniformément accéléré.

Pour que la chaîne demeurât en repos, il faudrait qu'on eût $a = 0$ et $b = 0$; d'où l'on conclut

$$x = \frac{\lambda l}{l+l'}, \quad x' = \frac{\lambda l'}{l+l'};$$

ce qui fait voir que dans l'état d'équilibre les deux parties x et x' de la chaîne sont entre elles comme les longueurs l et l' des plans inclinés sur lesquels elles sont posées; en sorte que ses deux extrémités se trouvent dans une même droite horizontale. Réciproquement, si cette condition est remplie à un instant déterminé, et qu'à cet instant les points de la chaîne ne reçoivent aucune vitesse, l'équilibre aura lieu; car la proportion

$$x : \lambda - x :: l : l',$$

donnant $\frac{\lambda l}{l+l'}$ pour la valeur de x, on aura, à l'instant dont il s'agit,

$$ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t} = 0;$$

et la vitesse étant supposée nulle, on aura, en même temps,

$$\frac{dx}{dt} = a\alpha e^{\alpha t} - b\alpha e^{-\alpha t} = 0;$$

d'où il résulte $a = 0$ et $b = 0$.

357. Pour second exemple de l'application du principe général de la Dynamique, considérons le mouvement de deux points matériels soumis à leur répulsion mutuelle; et, pour réduire la question au cas le plus simple, supposons qu'on ne leur imprime aucune vitesse initiale, perpendiculaire à la droite qui va de l'un à l'autre; en sorte que leurs mouvemens aient lieu sur une même ligne droite, donnée de position.

Soient m et m' leurs masses; au bout du temps t, désignons par x et x' leurs distances à un point fixe, pris sur cette ligne, et par v et v' leurs vitesses, de sorte qu'on ait, à cet instant,

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad v' = \frac{dx'}{dt}.$$

En même temps, soit R la force répulsive agissant en sens opposés sur m et m', et qui tendra, pour fixer les idées, à augmenter la distance x' et à diminuer la distance x. Pendant l'instant dt, cette force motrice imprimera une vitesse $\frac{Rdt}{m'}$ à la masse m'; et, comme l'augmentation de vitesse de m' est réellement dv', il s'ensuit que sa vitesse et

sa quantité de mouvement perdues pendant cet instant seront $\frac{Rdt}{m'} - dv'$ et $Rdt - m'dv'$. La quantité de mouvement perdue par m, dans le même sens et dans le même instant, sera aussi $-Rdt - mdv$. Or, ces deux points matériels étant d'ailleurs entièrement libres, il faudra, pour l'équilibre de ces quantités de mouvement, qu'elles soient séparément nulles ; par conséquent, on aura

$$mdv + Rdt = 0, \quad m'dv' - Rdt = 0.$$

Soit r la distance comprise entre les deux points matériels m et m', de sorte qu'on ait

$$x' - x = r, \quad dx' - dx = dr.$$

A cause de $dx = vdt$ et $dx' = v'dt$, on tirera des équations précédentes

$$mdv + m'dv' = 0, \quad 2mvdv + 2m'v'dv' = 2Rdr.$$

En intégrant et désignant par c et c' les deux constantes arbitraires, on aura donc

$$mv + m'v' = c, \quad mv^2 + m'v'^2 = 2\int Rdr + c'.$$

La force R sera une fonction donnée de r; on pourra donc obtenir l'intégrale $\int Rdr$ exactement ou par approximation ; et si l'on désigne par α la valeur de r à l'origine du mouvement, et qu'on suppose cette intégrale nulle quand $r = \alpha$, sa valeur, à un instant quelconque, sera une fonction de r et α que je représenterai par $f(r, \alpha)$. Soient aussi a et a' les vitesses initiales de m et m'; on aura, à la fois,

$$r = \alpha, \quad f(r, \alpha) = 0, \quad v = a, \quad v' = a',$$

et, conséquemment,

$$c = ma + m'a', \quad c' = ma^2 + m'a'^2 ;$$

d'où il résultera, à un instant quelconque,

$$\left.\begin{aligned} mv + m'v' &= ma + m'a', \\ mv^2 + m'v'^2 &= 2f(r, \alpha) + ma^2 + m'a'^2 . \end{aligned}\right\} (1)$$

Ces dernières équations feront connaître, à chaque instant, les vitesses des deux mobiles en fonctions de leur distance mutuelle : on en conclut que toutes les fois que cette distance redeviendra la même, les carrés v^2 et v'^2 reprendront aussi les mêmes valeurs, et que chaque mobile reprendra une égale vitesse, dans le même sens ou en sens contraire.

Connaissant v et v' en fonctions de r, on aura

$$dt = \frac{dr}{v' - v},$$

pour déterminer, par une nouvelle intégration, la valeur de t en fonction de r, ou réciproquement. D'ailleurs, en multipliant la première des équations (1) par dt, intégrant et désignant par b la constante arbitraire, il vient

$$mx + m'x' = (ma + m'a')\, t + b.$$

On connaîtra b d'après les positions initiales des deux mobiles; et cette équation, jointe à $x' - x = r$, fera connaître leurs positions à un instant quelconque, c'est-à-dire, les valeurs de x et x' en fonctions de r ou de t, ce qui sera la solution complète du problème.

Si l'action mutuelle des deux mobiles était attractive, il faudrait changer le signe de R, et par suite celui de $f(r, \alpha)$, dans les formules précédentes. Si cette force était une répulsion à certaines distances, et une attraction à d'autres distances, on prendrait pour R une fonction de r qui changerait de signe dans l'étendue des valeurs de la variable. Dans tous les cas, il résulte de l'équation précédente que l'action mutuelle des deux mobiles n'altère pas le mouvement de leur centre de gravité ; car son premier membre, divisé par $m + m'$, exprime la distance de ce centre à l'origine fixe des x et x'; en sorte que le mouvement du centre de gravité est uniforme et indépendant de la force R.

358. Les équations (1) conviennent aussi au mouvement de deux corps solides, de grandeur quelconque, soumis à la force R, et dont les masses sont m et m', pourvu que les vitesses de tous les points de ces deux corps soient constamment parallèles à une droite donnée. Cette force R, répulsive ou attractive, peut alors provenir d'un ressort qui se dilate ou se contracte entre les deux mobiles contre lesquels il est appuyé par ses extrémités; ou bien encore, on peut supposer que la force R provient d'un fluide élastique qui se développe entre ces deux corps, et les repousse en sens contraire l'un de l'autre.

Ce dernier cas est celui du mouvement du boulet et du canon, pendant que le premier parcourt l'*ame* de la pièce. On prendra alors pour m la masse du boulet, et pour m' celle du canon. Il faudra, pour faire usage des formules précédentes, supposer que la totalité de la poudre se réduit en gaz à l'origine du mouvement. La longueur de la *charge* sera la distance initiale α des deux mobiles; et quand cette distance sera devenue r, la force R exprimera la pression que le gaz, ainsi dilaté, exercera sur chacun de ces deux corps. Il faudra, en outre, faire une supposition sur la valeur de R en fonction de r. Or, si la température du gaz demeurait constante pendant sa dilatation, la force R, d'après la loi de Mariotte, serait en raison inverse des espaces qu'il occuperait dans l'intérieur du canon. Soit donc k la pression rapportée à l'unité de surface, exercée par le gaz à l'instant où la poudre vient de s'enflammer et où il occupe encore le même espace que la charge. Désignons par ω la section de la charge perpendiculaire à sa longueur, qui est aussi la section intérieure de la pièce ; $k\omega$ sera la valeur de R à l'origine du mouvement ; et, dans le cas de la température constante, on aurait

$$R = \frac{k\omega\alpha}{r},$$

à l'instant qui répond à la distance r des deux mobiles; car, à ces deux époques, les espaces occupés par le gaz sont entre eux comme les longueurs a et r.

Cette expression de R est celle qu'on a généralement adoptée, quoiqu'elle soit fondée sur deux hypothèses inexactes : la totalité de la charge ne se réduit pas en gaz avant le départ du boulet; et pendant sa dilatation dans l'ame de la pièce, le gaz formé doit éprouver de très grandes diminutions de température. Mais ces deux causes influent en sens contraire sur le décroissement de la valeur de R : la seconde tend évidemment à rendre ce décroissement plus rapide, tandis que l'effet de la première doit être de le ralentir, à raison des nouvelles quantités de gaz qui viennent successivement s'ajouter à la quantité initiale. On suppose que ces deux causes contraires se compensent à peu près, et l'on fait abstraction de leur influence sur l'expression de R en fonction de r.

Cela étant, d'après la valeur de R qu'on vient d'écrire, on aura

$$f(r, a) = kwa \log \frac{a}{r},$$

en observant que l'intégrale $f(r, a)$ est supposée nulle pour $r = a$. On regarde comme nulles les vitesses initiales du boulet et du canon *; en faisant donc $a = 0$ et $a' = 0$ dans les équations (1), et y substituant cette valeur de $f(r, a)$, nous aurons

$$mv + m'v' = 0, \quad mv^2 + m'v'^2 = 2kwa \log \frac{a}{r}.$$

Soient l la longueur de l'ame, V la vitesse du boulet à la bouche du canon, V' la vitesse correspondante du *recul:* on aura, à la fois,

$$r = l, \qquad v = V, \qquad v' = V';$$

et l'on déduira des équations précédentes

$$V^2 = \frac{2m'kwa}{m(m+m')} \log \frac{l}{a};$$

ce qui fera connaître la vitesse de projection V. Abstraction faite du signe, celle du recul sera égale à cette vitesse V multipliée par le rapport $\frac{m}{m'}$.

En égalant à zéro la différentielle de V^2 par rapport à a, on déterminera la longueur de la charge qui répond, toutes choses d'ailleurs égales, au *maximum* de la vitesse de projection. On a, de cette manière,

$$\log \frac{l}{a} = 1;$$

et comme ce logarithme est népérien, il s'ensuit qu'en désignant, à l'ordinaire, par e la base de ces logarithmes, on aura $l = ea$; de sorte que la valeur de a dont il s'agit surpassera un peu le tiers de la longueur l de la pièce.

339. La masse m' comprenant celle de la pièce et de l'affût, est toujours très grande par rapport à celle du boulet; en réduisant donc à m' le diviseur $m + m'$ de la valeur de V^2, on aura simplement

$$V^2 = \frac{2kwa}{m} \log \frac{l}{a}. \qquad (2)$$

Pour faire usage de cette formule, il sera nécessaire de connaître la constante k, qui représente la force élastique de la poudre réduite en gaz, à l'instant de sa plus grande intensité. Soit pour cela, D la densité de la poudre dans son état naturel; la masse de la charge sera Dwa; en supposant son poids égal au tiers du poids du boulet, on aura donc

$$m = 3Dwa;$$

et l'on tirera de l'équation (2)

$$k = \frac{3DV^2}{2 \log \frac{l}{a}}.$$

Cette quantité k sera la pression *maxima* du gaz de la poudre, rapportée à l'unité de surface; pour la comparer à la pression atmosphérique, soient ϖ cette autre pression, h la hauteur barométrique, μ la densité du mercure, et g la gravité; on aura

$$\varpi = g\mu h.$$

Soient aussi M le modèle des tables de logarithmes ordinaires, et λ le logarithme de $\frac{l}{a}$ pris dans ces tables, de sorte qu'on ait

$$\lambda = M \log \frac{l}{a};$$

il résultera de ces valeurs

$$\frac{k}{\varpi} = \frac{3MDV^2}{2\lambda\mu g h}.$$

A la température ordinaire d'environ 18°, je prends pour les densités de la poudre et du mercure

$$D = 0{,}8335, \qquad \mu = 13{,}548;$$

on a aussi

$$g = 9^m{,}80896, \qquad h = 0^m{,}76;$$

et à cause de

$$M = 0{,}4342945,$$

la formule précédente deviendra

$$\frac{k}{\varpi} = (0{,}0053761) \frac{V^2}{\lambda}.$$

* *Voyez* l'examen de ce point de la question dans le 21e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 191.

Dans le cas de la pièce de 24, chargée au tiers du poids du boulet, on a

$$V = 463^m, \quad \frac{l}{a} = \frac{1368}{134};$$

et il en résulte

$$k = 1142.\ a.$$

Relativement à la pièce de 12, on a de même

$$V = 493^m. \quad \frac{l}{a} = \frac{1248}{99};$$

ce qui donne

$$k = 1187.\ a.$$

En prenant la moyenne de ces deux valeurs de k, qui devraient être égales si la théorie était rigoureuse et que les données fussent exactes, nous aurons donc

$$k = 1165.\ a.$$

Telle serait la valeur de k qu'il faudrait employer dans la formule (2); mais cette expression de V^2 ne peut être regardée que comme une formule empirique, d'abord à raison des hypothèses sur lesquelles elle est fondée, et, en outre, parce que dans le calcul direct du mouvement du boulet dans l'ame de la pièce, il aurait fallu avoir égard à la masse de la poudre réduite en gaz. En même temps que ce fluide pousse en sens opposés le boulet et le canon, une partie de la force qu'il développe est employée à transporter sa propre masse, qui n'est pas négligeable par rapport à celle du projectile; et l'on conçoit qu'il en doit résulter une vitesse de projection moindre que si, la force élastique de la poudre restant la même, sa masse était insensible, comme le suppose l'analyse précédente. Cette remarque, due à Lagrange, prouve la nécessité de considérer à la fois les mouvemens de la poudre et des deux masses m et m', pendant que le boulet est dans la pièce; mais alors la question se complique, et la difficulté du calcul ne permet guère d'arriver à aucun résultat utile pour la pratique. C'est donc à l'expérience qu'il vaudra mieux recourir pour déterminer les vitesses de projection des corps lancés par les bouches à feu. Indépendamment de la considération des portées, que nous avons déjà indiquée (n° 216), il existe un autre moyen d'obtenir ces vitesses, dont il sera question dans un des chapitres suivans.

360. Appliquons encore le principe de D'Alembert au cas le plus simple du choc des corps, et supposons qu'il s'agisse de deux sphères homogènes, dont les centres se meuvent sur une même ligne droite, et dont tous les points décrivent des parallèles à cette droite.

Soient m et m' les masses de ces deux corps, désignons par v et v' leurs vitesses, lorsqu'ils commencent à se toucher, c'est-à-dire, au premier instant du choc : v et v' seront de même signe ou de signes contraires, selon que les deux mobiles iront à la suite ou au devant l'un de l'autre. Dans les deux cas, nous regarderons la vitesse v comme positive; et, après le choc, la vitesse de chacun des deux mobiles sera positive ou négative, suivant qu'elle sera dirigée dans le sens de cette vitesse de m avant le choc ou en sens contraire.

Quelque durs que soient les deux mobiles, ils sont toujours plus ou moins compressibles; à raison de la différence de leurs vitesses v et v', ils vont donc se comprimer, en s'appuyant l'un contre l'autre; et, pendant cette compression, la vitesse de l'un des deux corps, de m, par exemple, diminuera par degrés infiniment petits, et celle de m' augmentera de même, jusqu'à ce que ces deux vitesses soient devenues égales. Or, à partir de cet instant, il y aura deux cas distincts à considérer.

1° Si les deux sphères sont entièrement dénuées d'élasticité, elles cesseront d'agir l'une sur l'autre à l'instant où leurs vitesses se seront ainsi nivelées, et continueront de se mouvoir avec une vitesse commune, en restant juxtaposées et conservant les formes que la compression leur aura données.

2° Si, au contraire, les deux sphères sont élastiques, elles tendront à reprendre leur forme naturelle; en y revenant, et s'appuyant toujours l'une contre l'autre, la vitesse de m continuera de décroître graduellement, et celle de m' continuera d'augmenter : il y aura enfin un instant où ces deux corps se sépareront, et ce sera la fin du choc. Or, dans le cas d'une parfaite élasticité, on suppose que la seconde partie du choc est tout-à-fait semblable à la première; qu'à la fin du choc, les deux corps ont repris exactement leur forme sphérique, et une vitesse commune à tous les points de chacun d'eux; et que, pendant sa seconde partie, ils perdent ou gagnent des quantités de mouvement égales à celles qu'ils ont déjà perdues ou gagnées pendant la première.

Le problème du choc de deux sphères ne présenterait aucune difficulté nouvelle, et rentrerait dans celui du n° 357, si leurs rayons étaient infiniment petits. Pour le résoudre complètement, lorsque leurs rayons ont une grandeur finie, il faudrait avoir égard à la propagation du mouvement dans leurs masses, et déterminer l'état des deux corps à un instant quelconque de la durée du phénomène; ce qu'on peut regarder comme impossible, dans l'état actuel de la science. Nous admettrons donc les suppositions qu'on vient d'expliquer comme étant les données de la question dont nous allons nous occuper; et en combinant ces données avec le principe de D'Alembert, appliqué aux quantités de mouvement de grandeur finie, il ne s'agira plus que de déterminer les vitesses des deux sphères à la fin du choc, d'après leurs masses et leurs vitesses primitives, soit quand ces deux corps sont entièrement dénués d'élasticité, soit quand ils sont parfaitement élastiques. Il n'y a que les corps *mous* qui n'aient pas d'élasticité sensible; la plupart des

corps *durs* reviennent à leur forme primitive, lorsqu'ils ne sont pas brisés par le choc.

361. Dans le cas des corps mous, soit u la vitesse après le choc, laquelle est commune aux deux sphères ; la vitesse perdue par m sera $v - u$, et la vitesse gagnée par m' sera $u - v'$. Si donc ces deux corps allaient au devant l'un de l'autre avec ces vitesses $v - u$ et $u - v'$, il faudrait, d'après le principe du n° 353, qu'ils se fissent équilibre ; ce qui exige (n° 127) que les quantités de mouvement correspondantes à ces vitesses soient égales. Nous aurons donc

$$m(v - u) = m'(u - v');$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}, \qquad (a)$$

pour la valeur de u qu'il s'agissait d'obtenir.

Si m' est en repos avant le choc, et qu'à raison de sa densité, cette masse soit extrêmement grande et comme infinie, par rapport à m, on aura sensiblement $u = 0$. La masse m' représentera alors un obstacle fixe ; et le corps, dénué d'élasticité, sera réduit au repos par le choc contre cet obstacle.

On appelle *force vive* d'un point matériel, ou, plus généralement, d'un corps dont tous les points ont la même vitesse, le produit de sa masse par le carré de cette vitesse. La somme des forces vives de m et m' est donc $mv^2 + m'v'^2$ avant le choc, et $mu^2 + m'u^2$ après le choc. Or, il résulte de la formule (a) que la seconde somme est toujours moindre que la première ; car, sans altérer leur différence

$$mv^2 + m'v'^2 - mu^2 - m'u^2,$$

on peut en retrancher la quantité

$$2u(mv + m'v' - mu - m'u),$$

qui est nulle, en vertu de l'équation (a) ; et cette différence devient alors

$$m(v - u)^2 + m'(u - v')^2,$$

qui est une quantité positive.

Il y a donc toujours perte de force vive dans le choc de deux sphères dont la matière est dénuée de toute élasticité ; et cette perte est égale, comme on voit, à la somme des forces vives dues aux vitesses $v - u$ et $u - v'$, perdue et gagnée par ces deux corps. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème général qui est dû à Carnot, et que nous démontrerons par la suite.

362. Dans la première partie du choc, c'est-à-dire, jusqu'à l'instant de la plus grande compression, les deux sphères se comportent toujours de même, quel que soit leur degré d'élasticité ; en sorte que la vitesse u qu'on vient de déterminer, est toujours celle qui leur est commune à cet instant. Pendant cette première partie, la diminution de la vitesse de m et l'augmentation de celle de m' sont donc $v - u$ et $u - v'$. Or, si ces deux sphères sont parfaitement élastiques, m éprouvera, dans la seconde partie du choc, une seconde diminution de vitesse égale à la première, et, conséquemment, sa vitesse à la fin du choc sera $v - 2(v - u)$ ou $2u - v$. En même temps, m' éprouvera une seconde augmentation de vitesse égale à $u - v'$, et sa vitesse finale sera $v' + 2(u - v')$ ou $2u - v'$. Si donc on appelle V et V' les vitesses de m et m', après le choc, on aura

$$V = 2u - v, \qquad V' = 2u - v';$$

la valeur de u étant toujours donnée par la formule (a).

En retranchant ces vitesses l'une de l'autre, on a

$$V - V' = v - v';$$

ce qui montre que dans ce choc la vitesse relative des deux mobiles change de signe et conserve la même grandeur.

Si la masse m' est regardée comme infinie, à raison de sa densité, par rapport à la masse m, et qu'on ait $v' = 0$, on aura $u = 0$, et, par conséquent, $V = -v$; d'où il résulte que quand une sphère, douée d'une élasticité parfaite, vient frapper un obstacle fixe, elle est réfléchie avec une vitesse égale et contraire à celle qu'elle avait avant le choc. S'il s'agit, par exemple, d'une sphère pesante, qui tombe dans le vide, sur un plan horizontal et inébranlable, elle devra remonter à sa hauteur primitive.

La somme des forces vives sera la même avant et après le choc, ou, autrement dit, on aura

$$mv^2 + m'v'^2 = m(2u - v)^2 + m'(2u - v')^2;$$

équation qui se réduit à

$$4u(mu + m'u - mv - m'v') = 0,$$

et qui est identique, en vertu de la formule (a).

Il n'y a donc aucune perte de force vive dans le choc de deux sphères parfaitement élastiques ; et ce résultat, comme celui que présente le choc de deux sphères non élastiques, est compris dans un théorème général, qu'on démontrera aussi dans un autre chapitre.

363. Si l'on suppose $m' = m$, on aura

$$2u = v + v'. \qquad V = v', \qquad V' = v.$$

Il y a donc échange de vitesse dans le choc de deux sphères parfaitement élastiques, dont les masses sont égales ; et si l'une des deux est en repos avant le choc, l'autre demeurera en repos après le choc, et la première prendra la vitesse primitive de la seconde.

Il suit de là que si l'on a une série de billes égales en masse, et dont les centres soient rangés en ligne droite ; que la première soit seule en mouvement, et que sa vitesse, qui sera désignée par v, soit dirigée suivant cette droite et du côté des autres billes ; cette première bille sera réduite au repos en

choquant la deuxième ; celle-ci prendra la vitesse v, avec laquelle elle ira choquer la troisième, et sera ensuite réduite au repos ; la troisième prendra la vitesse v, qu'elle perdra en choquant la quatrième ; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière, qui conservera la vitesse v. Après cette suite de chocs, toutes les billes seront donc en repos, excepté la dernière, qui se trouvera animée de la vitesse que la première avait primitivement ; et comme ce résultat est indépendant de la grandeur des intervalles compris entre les billes consécutives, il est naturel d'en conclure qu'il aura encore lieu quand ces intervalles disparaîtront, et que les billes, choquées par la première, seront en contact.

Ainsi, lorsqu'une série d'un nombre quelconque de billes parfaitement élastiques, en repos, juxtaposées, égales en masse, et dont les centres sont en ligne droite, sera choquée par une autre bille élastique, égale à chacune d'elles, et en mouvement suivant la ligne des centres, celle-ci se réunira à la série qui demeurera en repos, excepté la bille placée à l'autre extrémité, laquelle se détachera seule avec la vitesse de la bille choquante : c'est, en effet, ce qu'on a souvent l'occasion de vérifier, avec des billes de billard, par exemple.

En général, les lois du choc des corps sphériques, mous ou durs, qui sont les conséquences des hypothèses du n° 360, ont été confirmées par de nombreuses expériences, faites sur des billes égales ou inégales, de même matière ou de matière différente, et dont les vitesses avaient entre elles différens rapports.

364. Le mouvement du centre de gravité d'un système de corps n'est jamais altéré par le choc ou toute autre action mutuelle des mobiles. On démontrera par la suite, dans toute sa généralité, cette importante proposition, dont on a déjà vu le cas le plus simple dans le n° 357, et qu'on peut aussi vérifier dans le choc des corps sphériques, mous ou parfaitement élastiques.

Pour cela, soient x et x', au bout du temps t, les distances des centres de m et m' à un point fixe de la droite sur laquelle ils se meuvent. Soit aussi, à cet instant, x_1 la distance au même point du centre de gravité de m et m' ; nous aurons (n° 65)

$$(m + m')\, x_1 = mx + m'x'.$$

On en déduit, en différentiant,

$$(m + m')\frac{dx_1}{dt} = m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt}; \quad (b)$$

équation qui fera connaître la vitesse $\frac{dx_1}{dt}$ du centre de gravité, correspondante aux vitesses des deux sphères. Or, avant le choc, on a

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dx'}{dt} = v';$$

et, conséquemment,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Après le choc, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = u,$$

dans le cas des corps mous, et

$$\frac{dx}{dt} = 2u - v, \quad \frac{dx'}{dt} = 2u - v',$$

dans le cas des corps élastiques. En substituant successivement ces valeurs dans l'équation (b), et ayant égard à l'équation (a), on en déduit $\frac{dx_1}{dt} = u$ dans les deux cas ; ce qui est la même valeur qu'avant le choc, en vertu de cette équation (a). Par conséquent, le choc de deux sphères ne change rien au mouvement de leur centre de gravité.

Comme la vitesse de ce point est toujours la somme des quantités de mouvement des corps, divisée par la somme de leurs masses, cela revient à dire que dans le choc de deux corps sphériques, mous ou élastiques, la somme des quantités de mouvement ne change pas, en ayant égard, dans cette somme, aux signes des vitesses.

Si la vitesse v' de m' est nulle, et que cette masse soit très petite par rapport à m, la quantité de mouvement imprimée à m' et enlevée à m, sera, à très peu près, $m'v$ ou $2m'v$, selon que ces corps seront dénués d'élasticité ou parfaitement élastiques.

365. Jusqu'à présent, on a assimilé la résistance des fluides à une suite de chocs du mobile contre les molécules du milieu qu'il traverse ; quoique, selon moi, la théorie de la résistance fondée sur cette considération doive être abandonnée, il est bon, cependant, de l'expliquer ici en peu de mots.

Supposons que le mobile soit un cylindre droit qui se meut dans le sens de sa longueur. Soit ω l'aire de sa base, perpendiculaire à cette dimension et à la direction du mouvement ; soient aussi m la masse du mobile, et ρ la densité du fluide, liquide ou aériforme, dans lequel il se meut. Au bout du temps t, appelons v sa vitesse, et x la distance de sa base antérieure à un point fixe, pris sur la perpendiculaire à ce plan, de sorte qu'on ait $dx = vdt$. Dans l'instant dt, cette base parcourra l'espace dx ; le mobile frappera donc tous les points matériels du fluide, compris dans une tranche dont la base est ω, la hauteur dx, et la masse $\rho\omega dx$. Or, on considère tous ces points comme isolés et n'ayant aucune action sur le fluide environnant ; et, dans cette hypothèse, on prend pour la diminution de la quantité de mouvement éprou-

vée par le mobile pendant cet instant dt, le produit de sa vitesse v et de la masse frappée $\rho\omega dx$, ou le double de ce produit, selon que l'on compare ce choc à celui des corps dénués de toute élasticité, ou qu'on l'assimile au choc des corps parfaitement élastiques. La première valeur $v\rho\omega dx$ est celle qui s'écarte le moins de l'expérience ; en l'adoptant donc, et observant que mdv éprouve la variation de la quantité de mouvement de la masse m, dans l'instant dt, nous aurons

$$mdv = -v\rho\omega dx;$$

et en mettant pour dx sa valeur vdt, et divisant par dt, il en résulte

$$m\frac{dv}{dt} = -\rho\omega v^2,$$

pour la force motrice provenant de la résistance exercée sur une surface plane, perpendiculaire à la direction du mouvement.

Cette résistance est, comme on voit, proportionnelle à la densité du fluide, à la surface sur laquelle elle s'exerce, et au carré de la vitesse du mobile. En appelant h la hauteur due à cette vitesse, et g la gravité, c'est-à-dire, en faisant $v^2 = 2gh$, sa valeur devient $2g\rho\omega h$; en sorte qu'elle est égale au poids d'un cylindre du fluide qui aurait pour base la surface perpendiculaire à la direction de la vitesse, et pour hauteur le double de celle dont un corps pesant devrait tomber dans le vide, pour acquérir cette même vitesse.

Si la direction du mouvement n'est pas perpendiculaire à la surface plane qui éprouve la résistance, on décompose la vitesse du mobile en deux autres, l'une perpendiculaire, et l'autre parallèle à ce plan ; on suppose que la vitesse parallèle ne donne lieu qu'à un frottement dont on fait abstraction, et que la résistance proprement dite est la même que si la vitesse normale existait seule : c'est pourquoi l'on substitue cette composante à la vitesse v dans la valeur précédente de la résistance, qui devient alors $\rho\omega v^2 \cos^2 i$; i étant l'angle que fait la normale à la surface ω, avec la direction de la vitesse v.

366. En admettant ce résultat, et l'étendant aux élémens infiniment petits des surfaces courbes, on en conclut, par le calcul intégral, la résistance éprouvée par un corps solide de forme quelconque.

Pour plus de simplicité, supposons qu'il s'agisse d'un solide de révolution, dont tous les points décrivent, avec la vitesse v, des parallèles à son axe de figure. Soient AB cet axe (fig. 86), et AMB sa courbe génératrice ; prenons cet axe pour celui des abscisses ; et appelons x et y l'abscisse CP et l'ordonnée PM d'un point quelconque M de cette courbe. Supposons que la plus grande section du solide, perpendiculaire à l'axe de figure, soit celle qui répond au point C, origine des coordonnées, et que CD soit, en conséquence, la plus grande ordonnée de la courbe AMB. Le mouvement ayant lieu de B vers A, la portion de la surface qui éprouvera la résistance du milieu sera celle qui répond à la partie DMA de cette courbe. Soit ds l'élément différentiel de cette courbe au point quelconque M ; on aura

$$\cos i = \frac{dy}{ds},$$

pour le cosinus de l'angle que la normale en ce point, fait avec l'axe des x, c'est-à-dire, avec la direction du mouvement ; et cet angle sera le même dans toute l'étendue de la zone engendrée par ds en tournant autour de AB, dont la surface est $2\pi y ds$. Chacun des élémens plans de cette zone éprouvera donc une résistance normale qui sera égale au produit de cet élément, multiplié par $\rho v^2 \cos^2 i$. En décomposant cette force en deux autres, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à l'axe AB, il est évident que les composantes perpendiculaires à AB se détruiront deux à deux ; d'ailleurs, chaque composante parallèle à AB aura pour valeur la résistance normale à la zone, multipliée par $\cos i$; par conséquent, la somme de ces composantes, pour la zone entière, sera égale au produit de la surface $2\pi y ds$, de $\rho v^2 \cos i$, et de $\cos i$, ou à $2\pi\rho v^2 y \frac{dy^3}{ds^3}$, d'après la valeur de $\cos i$.

Il suit de là qu'en appelant R la résistance totale éprouvée par le solide en sens contraire de son mouvement, et faisant $CA = a$, nous aurons

$$R = 2\pi\rho v^2 \int_0^a y \frac{dy^3}{ds^3}, \quad (c)$$

pour la valeur de cette force motrice.

Si le mobile est une sphère, le point C sera son centre, et a son rayon. En désignant par θ l'angle MCA, on aura

$$y = a \sin\theta, \quad dy = a\cos\theta d\theta, \quad ds = ad\theta;$$

et il en résultera

$$R = 2\pi\rho v^2 a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi\rho a^2 v^2;$$

ce qui montre que la résistance éprouvée par une sphère est la moitié de celle qui aurait lieu sur le cylindre circonscrit, dont πa^2 serait la base perpendiculaire à la direction du mouvement.

367. C'est à Newton qu'est dû ce premier essai sur la résistance des fluides ; et c'est lui qui a déterminé, le premier, le mouvement des corps soumis à une force dépendante de leur vitesse. En comparant le résultat de son calcul au temps observé de la chute d'une sphère qui tombe dans l'air, d'une grande hauteur, il a reconnu qu'il faudrait, pour accorder l'un avec l'autre, réduire à moitié la valeur précédente de R.

D'après d'autres expériences, faites par Borda, cette valeur doit être seulement réduite aux trois cinquièmes; ce qui donne

$$R = \frac{3}{10} \pi \rho a^2 v^2.$$

En appelant D la densité de la sphère, sa masse sera $\frac{4\pi D a^3}{3}$; et si l'on divise R par cette masse, et qu'on appelle φ la force accélératrice qui en proviendra, on aura

$$\varphi = \frac{9\rho v^2}{40Da};$$

ce qui est, effectivement, l'expression de la résistance que les auteurs de Balistique ont adoptée le plus généralement, et que nous avons citée dans le n° 216.

En vertu de la formule (e), la détermination du solide de révolution qui éprouve la moindre résistance, consiste à trouver la courbe génératrice de ce solide pour laquelle l'intégrale $\int_0^a y \frac{dy^3}{ds^2}$ est un minimum; problème qu'on résoudra sans difficulté par les règles du calcul des variations, et dont Newton a donné la solution avant que d'autres géomètres se fussent occupés de ce genre de questions, mais sans indiquer la méthode qu'il a suivie pour y parvenir.

Cette théorie de la résistance repose, comme on l'a vu, sur une comparaison vague de l'action du fluide au choc des corps, et sur la supposition inadmissible que, dans ce choc, les molécules du fluide agissent isolément sur le mobile et nullement l'une sur l'autre. Elle est démentie par l'observation, quant à la grandeur absolue que le calcul donne à peu près double de celle qui résulterait de l'expérience; elle l'est aussi par rapport à la loi de la résistance en fonction de la vitesse, qui serait toujours proportionnelle au carré de la vitesse, suivant cette théorie, tandis qu'il résulte du décroissement observé des amplitudes, dans les très petites oscillations du pendule (n° 187), que cette force est seulement proportionnelle aux très petites vitesses. La résistance qu'un fluide, liquide ou aériforme, oppose au mouvement d'un corps solide, se compose d'un frottement contre la surface, et de la résultante des pressions que ce fluide exerce sur cette surface tout entière. Pour déterminer convenablement cette seconde partie, qui est la résistance proprement dite, il faut considérer à la fois les mouvemens du corps et du fluide, comme je l'ai fait dans le mémoire déjà cité (n° 191). Cette force peut être différente dans le mouvement oscillatoire et dans le mouvement progressif, dans les liquides et dans les gaz; et, dans ceux-ci, elle peut dépendre de leur température, et non pas seulement de leur densité; ce qui serait important à vérifier par l'expérience.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DES MOMENS D'INERTIE ET DES AXES PRINCIPAUX.

368. Dans les chapitres suivans, nous considérerons les différens cas du mouvement d'un corps solide. Pour former les équations de son mouvement, nous le diviserons en parties insensibles, mais de grandeur finie, comprenant néanmoins des nombres immenses de molécules. Quoique ce corps soit formé de molécules disjointes, les sommes relatives à ses parties insensibles pourront être changées, sans erreur appréciable, en intégrales définies, comme dans le n° 98; et, dans tout ce qui va suivre, on pourra traiter les parties dont il s'agit comme des infiniment petits.

Les intégrales définies que les équations du mouvement renfermeront seront au nombre de neuf, savoir :

$$\int x\,dm, \quad \int y\,dm, \quad \int z\,dm,$$
$$\int xy\,dm, \quad \int xz\,dm, \quad \int yz\,dm,$$
$$\int x^2\,dm, \quad \int y^2\,dm, \quad \int z^2\,dm;$$

dm étant l'élément différentiel de la masse, qui répond aux trois coordonnées rectangulaires x, y, z, et les intégrales s'étendant à la masse entière du mobile, que nous désignons par M.

Les trois premières dépendent de la position du centre de gravité; et si l'on appelle x_1, y_1, z_1, ses trois coordonnées, on aura (n° 91)

$$\int x dm = Mx_1, \quad \int y dm = My_1, \quad \int z dm = Mz_1;$$

en sorte que chacune de ces intégrales sera nulle, lorsqu'on prendra ce point pour l'origine des coordonnées.

Quelle que soit cette origine, on prouvera plus loin qu'on peut toujours déterminer la direction des trois axes de manière qu'on ait

$$\int xy dm = 0, \quad \int xz dm = 0, \quad \int yz dm = 0.$$

Les trois axes rectangulaires des x, y, z, qui font ainsi disparaître ces trois intégrales, s'appellent des *axes principaux*.

Quant aux trois dernières des neuf intégrales, on les exprimera au moyen de trois autres que nous représentons par A, B, C, et qui seront

$$A = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad B = \int (z^2 + x^2)\, dm, \quad C = \int (x^2 + y^2)\, dm;$$

d'où l'on tire

$$2\int x^2\, dm = A + B - C,$$
$$2\int y^2\, dm = C + A - B,$$
$$2\int z^2\, dm = B + C - A.$$

On appelle, en général, *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite quelconque, la somme des élémens de sa masse, multipliés par les carrés de leurs distances à cette droite. Ainsi, A, B, C, seront les momens d'inertie du mobile par rapport aux axes des x, y, z; car, par exemple, $y^2 + z^2$ est le carré de la distance de dm à l'axe des x. Lorsque ces droites seront des axes principaux, nous appellerons A, B, C, des momens d'inertie *principaux*.

Le centre de gravité et les axes principaux ont l'avantage de simplifier les équations du mouvement, en faisant disparaître une partie de leurs termes, quand on les prend pour origine et pour axes des coordonnées; ils jouissent, en outre, de propriétés très importantes dans la Dynamique, ainsi qu'on le verra par la suite.

369. La détermination des momens d'inertie est un problème de calcul intégral, que l'on résoudra toujours exactement ou par la méthode des quadratures.

L'exemple le plus simple est le calcul du moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle et homogène, par rapport à l'une de ses arêtes. Prenons trois de ses arêtes adjacentes pour axes des x, y, z, et désignons par a, b, c, leurs longueurs; puis divisons chacune de ces trois droites en une infinité de parties infiniment petites. En menant par tous les points de division, des plans parallèles aux faces du parallélipipède, on aura trois séries de plans qui le partageront en élémens infiniment petits dans leurs trois dimensions. Le volume de l'élément qui répond aux trois coordonnées x, y, z, sera évidemment $dxdydz$; on aura donc pour sa masse

$$dm = \rho dx\, dy\, dz;$$

ρ étant la densité du parallélipipède, que l'on suppose constante. Par conséquent, le moment d'inertie C, par rapport à l'arête qu'on a prise pour axe des z, et dont la longueur est c, sera

$$C = \rho \iiint (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

On étendra cette intégrale triple à tous les élémens du parallélipipède donné, en intégrant, dans un ordre quelconque, depuis $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, jusqu'à $x = a$, $y = b$, $z = c$; ce qui donne, sans aucune difficulté,

$$C = \rho \left(\frac{a^3\, bc}{3} + \frac{ab^3\, c}{3}\right),$$

on, ce qui est la même chose,

$$C = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2);$$

M étant la masse du corps, de sorte qu'on ait

$$M = \rho abc.$$

On aura de même

$$B = \frac{1}{3} M (c^2 + a^2), \quad A = \frac{1}{3} M (b^2 + c^2),$$

pour les momens d'inertie du même corps, par rapport aux arêtes dont les longueurs sont b et a.

370. Pour second exemple, calculons le moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène par rapport à l'un de ses trois axes de figure.

L'équation de sa surface sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a)$$

en désignant par $2a$, $2b$, $2c$, les longueurs de ses trois diamètres principaux, que l'on prend pour axes des x, y, z. Son moment d'inertie, par rapport à l'axe des z, sera exprimé par la même intégrale triple que dans le problème précédent; la constante ρ étant toujours la densité du corps. Pour obtenir cette intégrale triple, qui doit être étendue à la masse entière de l'ellipsoïde, j'intégrerai d'abord par rapport à z, en regardant x et y comme des constantes; ensuite, par rapport à y, en continuant de regarder x comme constante, et, enfin, par rapport à x. On peut suivre l'ordre qu'on veut dans ces trois intégrations successives; celui que je choisis revient à concevoir l'ellipsoïde partagé en une infinité de tranches elliptiques, parallèles au plan des y et z; chaque tranche partagée de même en une infinité de parallélipipèdes parallèles à l'axe des z, et terminés à la surface; et chaque

parallélipipède en élémens infiniment petits dans leurs trois dimensions. Les limites de l'intégrale relative à z seront les deux valeurs de cette variable qui sont données par l'équation (a); cette intégrale définie exprimera, en fonction de x et y, le moment d'inertie de l'un quelconque des parallélipipèdes. L'intégrale relative à y aura pour limites les deux valeurs de cette variable, qui répondent à la même valeur de x, dans l'équation de la section de l'ellipsoïde par le plan des x et y; elle exprimera le moment d'inertie de la tranche parallèle au plan y et z, qui se trouve à la distance x de ce plan. Enfin, l'intégrale relative à x sera prise depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$, et elle exprimera le moment d'inertie de l'ellipsoïde entier.

En intégrant par rapport à z, il vient

$$(x^2 + y^2)\, z\, dx\, dy + \text{constante}.$$

Les deux limites données par l'équation (a) sont

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}};$$

l'intégrale définie sera donc

$$2\rho c x^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}\, dx\, dy + 2\rho c y^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}\, dx dy.$$

Si l'on fait pour abréger,

$$b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = r^2$$

l'intégrale relative à y de la première partie de la formule précédente, deviendra

$$\frac{2\rho c x^2\, dx}{b} \int \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

L'équation de la section de l'ellipsoïde par le plan des x et y, savoir :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

donne $y = \pm r$ pour les deux limites de l'intégrale relative à y; et, comme on a

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \frac{1}{2} \pi r^2,$$

il en résulte, en remettant pour r^2 sa valeur,

$$2\rho c x^2\, dx \int \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}\, dy = \frac{\pi \rho b c}{a^2} (a^2 x^2 - x^4)\, dx.$$

En intégrant par rapport à x depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$, on aura donc

$$2\rho c \iint y^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}\, dx\, dy = \frac{4\pi \rho a^3 b c}{15};$$

sans nouveaux calculs, et par de simples changemens de lettres, on aura de même

$$2\rho c \iint y^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}\, dx dy = \frac{4\pi \rho b^3 a c}{15};$$

par conséquent, le moment d'inertie C par rapport à l'axe des z, qui est la somme de ces deux dernières intégrales, aura pour valeur

$$C = \frac{4\pi \rho a b c}{15} (a^2 + b^2).$$

On obtiendra de même les momens d'inertie B et A par rapport aux axes des y et des x. La masse de l'ellipsoïde étant M, on aura, d'après son volume (n° 89)

$$M = \frac{4\pi \rho a b c}{3};$$

et les trois momens d'inertie, par rapport aux diamètres $2a$, $2b$, $2c$, seront

$$A = \tfrac{1}{5} M (b^2 + c^2), \quad B = \tfrac{1}{5} M (c^2 + a^2), \quad C = \tfrac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

Ces diamètres sont les trois axes principaux du corps, qui se coupent à son centre de gravité; car en les prenant pour axes x, y, z, les trois intégrales $\int xy\,dm$, $\int zx\,dm$, $\int yz\,dm$, étendues à l'ellipsoïde entier, sont zéro, puisque chacune d'elles se compose d'élémens qui sont, deux à deux, égaux et de signe contraire.

On voit que parmi les trois quantités A, B, C, la plus grande et la plus petite sont celles qui répondent au plus petit et au plus grand des trois diamètres, ce qui est d'ailleurs évident, par la définition des momens d'inertie.

371. Dans le cas d'une sphère, on a $a = b = c$; les trois momens d'inertie deviennent égaux entre eux, et sont exprimés par $\frac{8\pi}{15} \rho a^5$. Si le rayon a augmente d'un infiniment petit, et se change en $a + da$,

l'accroissement correspondant de ce moment d'inertie de la sphère, savoir, $\frac{8\pi}{3}\rho a^4 da$, exprimera le moment d'inertie de la couche sphérique, dont les rayons intérieur et extérieur sont a et $a + da$. Maintenant, supposons que la sphère ne soit pas homogène, mais qu'elle soit seulement composée de couches concentriques et homogènes, de manière qu'en appelant r le rayon d'une couche quelconque, la densité ρ soit une fonction donnée de r. Pour avoir le moment d'inertie de la sphère entière, il faudra intégrer celui de cette couche quelconque, savoir, $\frac{8\pi}{3}\rho r^4 dr$, par rapport à r, et étendre l'intégrale au rayon entier de la sphère; donc, en désignant ce rayon par c, on aura

$$\frac{8\pi}{3}\int_0^c \rho r^4\, dr,$$

pour le moment d'inertie demandé.

Si on le compare à celui d'une sphère homogène du même rayon, et dont la densité soit égale à la densité moyenne de celle que l'on considère, il est aisé de voir qu'il devra être, par la définition des momens d'inertie, et qu'il sera effectivement, d'après son expression, plus grand ou plus petit, selon que la densité ρ croîtra ou décroîtra continuellement du centre à la surface.

372. Le calcul du moment d'inertie d'un corps homogène, terminé par une surface de révolution, se réduit à une seule intégration dépendante de la courbe génératrice, quand on le prend par rapport à l'axe de figure. On décomposera alors le solide en anneaux circulaires, d'une épaisseur et d'une largeur infiniment petites, dont chacun ait son centre dans l'axe, et soit compris, d'une part, entre deux plans perpendiculaires à l'axe, et d'une autre part, entre deux surfaces cylindriques, dont cette droite sera l'axe commun. En appelant r le rayon de la surface intérieure, $r + dr$ celui de la surface extérieure, et dx la distance des deux plans, le volume d'un anneau sera $\pi(r + dr)^2 dx - \pi r^2 dx$, ou $2\pi r dr dx$, en négligeant le terme infiniment petit du troisième ordre. Sa masse sera donc $2\pi\rho r dr dx$, en désignant par ρ la densité du corps; et comme tous les points de cet anneau sont à la même distance r de l'axe de figure, le produit $2\pi\rho r^3 dr dx$, de cette masse et de r^2, exprimera son moment d'inertie par rapport à cet axe. Donc si cet axe et la courbe génératrice sont la droite AB et la ligne AMB (fig. 86), et qu'on fasse

$$AP = x, \quad PM = y,$$

on aura le moment d'inertie de la tranche infiniment mince du solide de révolution, perpendiculaire à AB et correspondante au point P, en intégrant $2\pi\rho r^3 dr dx$ depuis $r = 0$ jusqu'à $r = y$, ce qui donne $\frac{1}{2}\pi\rho y^4 dx$. Donc aussi, si l'on désigne par l la longueur de l'axe AB, et par μ le moment d'inertie du solide entier, on obtiendra la valeur de μ en intégrant cette différentielle $\frac{1}{2}\pi\rho y^4 dx$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, et il en résultera

$$\mu = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^l y^4\, dx. \qquad (b)$$

Si l'on désigne par α et β des valeurs données de x telles que l'on ait $\alpha < \beta$ et $\beta < l$, il suffira d'intégrer depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$, pour avoir le moment d'inertie de la tranche du solide comprise entre les deux plans perpendiculaires à l'axe, dont α et β sont les distances au point A. Si ce corps est un solide creux, compris entre deux surfaces de révolution qui ont le même axe AB, on aura son moment d'inertie, en regardant ce corps comme la différence de deux solides de révolution, dont on retranchera, l'un de l'autre, les momens d'inertie relatifs à l'axe commun. Enfin, si l'on demandait le moment d'inertie d'une portion du solide de révolution, comprise entre deux plans menés par l'axe de figure, il est évident que ce moment, par rapport à cet axe, serait à celui du solide entier comme l'angle des deux plans est à quatre angles droits.

373. En prenant la demi-circonférence d'un cercle pour la génératrice AMB, et désignant le rayon par a, on aura

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

pour la valeur de y^2 qu'il faudra substituer dans la formule (b); et si l'on demande le moment d'inertie du segment sphérique dont la flèche est α, pris par rapport au diamètre perpendiculaire à sa base, il faudra intégrer, dans cette formule, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$; ce qui donne

$$\mu = \frac{1}{2}\pi\rho a^3\left(\frac{4\alpha^3}{3} - a\alpha + \frac{\alpha^2}{5}\right).$$

Dans le cas de la sphère entière, on fera $\alpha = 2a$, et il en résultera $\mu = \frac{8\pi\rho a^5}{15}$, comme précédemment.

Si la génératrice est une droite passant par le point A, et qui fasse, avec l'axe AB, un angle dont la tangente soit θ, on aura

$$y = \theta x.$$

Je substitue cette valeur dans l'équation (b), et j'intègre depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$; il vient

$$\mu = \frac{1}{10}\pi\rho\theta^4(\beta^5 - \alpha^5).$$

Cette valeur sera celle du moment d'inertie d'un cône tronqué, pris par rapport à son axe de figure. En appelant a et b les rayons de ses deux bases, et h sa hauteur, nous aurons

$$\theta\alpha = a, \quad \theta\beta = b, \quad \beta - \alpha = h;$$

et nous pourrons écrire la valeur de μ sous la forme

$$\mu = \frac{1}{10}\pi\rho h\,(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4).$$

Dans le cas d'un cône entier, on fera $b = 0$; et M étant sa masse, on aura

$$M = \frac{1}{3}\pi\rho h a^2, \quad \mu = \frac{3}{10}Ma^2.$$

Quand le cône tronqué se changera en un cylindre, on fera $b = a$; et la masse étant toujours M, il en résultera

$$M = \pi\rho h a^2, \quad \mu = \frac{1}{2}Ma^2.$$

374. Connaissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe passant par le centre de gravité, on en conclut aisément le moment d'inertie du même corps, rapporté à tout autre axe parallèle au premier.

En effet, plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité, et prenons le premier axe pour celui des z. Soient α et β les cordonnées du point où le second axe coupe le plan des x et y, auquel ce second axe est aussi perpendiculaire. Désignons par a la distance du centre de gravité au second axe; par r la distance d'un élément quelconque dm du corps au premier axe; par r' la distance du même point matériel au second axe. Le moment d'inertie connu sera $\int r^2\,dm$, et celui qu'on demande sera $\int r'^2\,dm$; ces intégrales s'étendant à la masse entière du solide. Or, nous aurons

$$r'^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2;$$

en multipliant par dm, intégrant et observant que

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

on aura donc

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm - 2\alpha\int x\,dm - 2\beta\int y\,dm + a^2\int dm;$$

mais les intégrales $\int x\,dm$ et $\int y\,dm$ sont nulles, à cause que le centre de gravité est sur l'axe des z (n° 368); de plus, $\int dm$ est la masse entière du corps, que je représenterai par M; par conséquent, l'équation précédente se réduit à

$$\int r'^2\,dm = \int r^2\,dm + Ma^2.$$

Ainsi l'on aura le moment d'inertie demandé, en ajoutant à celui qui est donné la masse du corps, multipliée par le carré de la distance du centre de gravité au nouvel axe.

D'après cette règle, on aura immédiatement le moment d'inertie d'une sphère homogène ou composée de couches concentriques par rapport à un axe quelconque, puisque ce moment est connu par rapport à tous les axes passant par le centre de figure, qui est aussi le centre de gravité.

Dans un corps quelconque, le moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité, sera plus petit que par rapport à tout autre axe parallèle à celui-là. Les momens d'inertie d'un même corps seront égaux, par rapport à tous les axes parallèles entre eux, et également éloignés du centre de gravité : leur valeur commune augmentera à mesure qu'ils s'éloigneront de ce point.

375. Non seulement le moment d'inertie d'un corps varie avec la position absolue de l'axe auquel on le rapporte, mais il change aussi avec la direction de cette droite. Pour montrer comment cette direction influe sur la grandeur du moment d'inertie d'un corps quelconque, proposons-nous de trouver celui de la masse M par rapport à un axe mené par l'origine des coordonnées, et qui fasse avec les axes des x, y, z, les trois angles donnés α, β, γ.

Soient p la perpendiculaire abaissée de l'élément dm sur le nouvel axe, D la distance de ce point matériel à l'origine des coordonnées, δ l'angle compris entre la ligne D et le nouvel axe. Les coordonnées de dm étant x, y, z, les cosinus des angles que fait la direction de son rayon vecteur D avec les axes de ces coordonnées, seront $\frac{x}{D}, \frac{y}{D}, \frac{z}{D}$; par conséquent, on aura (n° 9)

$$\cos\delta = \frac{x}{D}\cos\alpha + \frac{y}{D}\cos\beta + \frac{z}{D}\cos\gamma.$$

D'ailleurs, on a

$$p = D\sin\delta, \quad p^2 = D^2 - (D\cos\delta)^2;$$

en substituant donc pour $D\cos\delta$ la formule précédente, multipliée par D, et mettant $x^2 + y^2 + z^2$ au lieu de D^2, il en résultera

$$p^2 = x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma;$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma;$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}\int p^2\,dm = {} & \sin^2\alpha.\int x^2\,dm + \sin^2\beta.\int y^2\,dm + \sin^2\gamma.\int z^2\,dm \\ & - 2\cos\alpha\cos\beta.\int xy\,dm - 2\cos\alpha\cos\gamma.\int xz\,dm \\ & - 2\cos\beta\cos\gamma.\int yz\,dm.\end{aligned}$$

Au moyen de cette formule, on aura donc le moment d'inertie $\int p^2\,dm$, relatif à un axe de direction donnée, et passant par l'origine des coordonnées, quand on connaîtra les six intégrales $\int x^2\,dm$, $\int y^2\,dm$, $\int z^2\,dm$, $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, étendues à la masse entière du corps, et relatives aux axes des coordonnées. Si ces trois droites sont des axes principaux, les trois dernières intégrales seront nulles (n° 368), et la formule précédente se réduira à

$$\int p^2\,dm = \sin^2\alpha.\int x^2\,dm + \sin^2\beta.\int y^2\,dm + \sin^2\gamma.\int z^2\,dm.$$

Mais, en vertu de l'équation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

nous avons

$$\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$
$$\sin^2\beta = \cos^2\gamma + \cos^2\alpha,$$
$$\sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta;$$

ce qui change la valeur de $\int p^2\,dm$ en celle-ci :

$$\int p^2\,dm = (\int y^2\,dm + \int z^2\,dm)\cos^2\alpha,$$
$$+ (\int z^2\,dm + \int x^2\,dm)\cos^2\beta,$$
$$+ (\int x^2\,dm + \int y^2\,dm)\cos^2\gamma;$$

donc en réunissant chaque couple d'intégrales en une seule, et désignant par A, B, C, comme dans le n° 368, les momens d'inertie par rapport aux axes des x, y, z, nous aurons finalement

$$\int p^2\,dm = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma. \quad (c)$$

Ainsi, il suffira de connaître les trois momens d'inertie relatifs aux trois axes principaux qui se coupent en un point donné, pour en conclure immédiatement le moment d'inertie correspondant à un axe quelconque, passant par ce point; et en combinant ce résultat avec celui du numéro précédent, on voit que le calcul de tous les momens d'inertie d'un même corps se réduira à déterminer les trois momens d'inertie principaux qui répondent à son centre de gravité. Ayant calculé, par exemple (n° 370), les valeurs de ces trois momens d'inertie, dans le cas de l'ellipsoïde homogène, nous pouvons regarder comme connu le moment d'inertie de ce corps, par rapport à un axe quelconque.

376. Le plus grand et le plus petit des trois momens d'inertie principaux A, B, C, qui entrent dans la formule (c), sont aussi le plus grand et le plus petit de tous les momens d'inertie du même corps, par rapport aux axes passant par l'origine des coordonnées.

Soit, en effet, A la plus grande des trois quantités A, B, C; en mettant $1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$ à la place de $\cos^2\alpha$ dans l'équation (c), on aura

$$\int p^2\,dm = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma;$$

d'où l'on conclut que $\int p^2\,dm$ est moindre que A, quels que soient les angles β et γ. De même, C étant la plus petite des trois quantités A, B, C, si l'on met l'équation (c) sous la forme

$$\int p^2\,dm = C + (A - C)\cos^2\alpha + (A - B)\cos^2\beta,$$

on voit qu'on a constamment $\int p^2\,dm > C$.

Dans le cas particulier où les trois quantités A, B, C, sont égales, on a aussi $\int p^2\,dm = A$, quelle que soit la direction de l'axe auquel le moment d'inertie $\int p^2\,dm$ est rapporté; donc alors les momens d'inertie sont égaux par rapport à tous les axes passant par l'origine des coordonnées. Ce cas est celui de la sphère homogène ou composée de couches concentriques, lorsque l'origine des coordonnées est placée à son centre; il a également lieu pour le cube, l'octaèdre régulier et d'autres corps homogènes, dont les trois momens d'inertie principaux ne peuvent différer entre eux, en plaçant toujours l'origine des coordonnées à leur centre de figure.

Si l'on a seulement A = B, l'équation (c) se réduira à

$$\int p^2\,dm = A\sin^2\gamma + C\cos^2\gamma;$$

et cette valeur de $\int p^2\,dm$ étant indépendante des angles α et β, le moment d'inertie sera le même par rapport à tous les axes menés par l'origine des coordonnées, qui font un même angle γ avec l'axe des z. Ce cas est celui d'un solide de révolution homogène, quand cette droite est son axe de figure.

D'après ce qu'on a déjà vu dans le n° 374, nous pouvons dire maintenant que le plus petit de tous les momens d'inertie qu'un même corps puisse avoir, répond à l'un des trois axes principaux qui se coupent à son centre de gravité. Ainsi, par exemple, le plus petit de tous les momens d'inertie d'un ellipsoïde homogène, se rapporte au plus grand de ses trois diamètres conjugués rectangulaires.

377. Nous allons actuellement démontrer l'existence des axes principaux que nous avons supposée jusqu'à présent, et déterminer leur direction pour chaque point d'un corps de forme quelconque; mais, pour cela, il est nécessaire de rappeler les formules générales de la transformation des coordonnées, dont nous aurons besoin, d'ailleurs, dans d'autres occasions.

Soient x, y, z, les trois coordonnées d'un point quelconque M, rapportées aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, (fig. 87). Désignons par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées du même point, ayant la même origine, et rapportées aux trois axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, qui sont aussi perpendiculaires entre eux. Du point M, abaissons des perpendiculaires MP et MK sur l'axe Ox et sur le plan des $x_{,}$ et $y_{,}$ et du point K, une perpendiculaire KH sur l'axe $Ox_{,}$; en sorte qu'on ait

$$OP = x, \quad OH = x_{,}, \quad KH = y_{,}, \quad MK = z_{,}.$$

La projection sur l'axe Ox, de la ligne brisée MKHO, sera OP; les projections de ses parties OH, KH, MK, seront égales à ces droites, multipliées par les cosinus des angles que les axes des x_1, y_1, z_1, font avec l'axe Ox; en en faisant la somme, on aura donc

$$x = x_1 \cos xOx_1 + y_1 \cos xOy_1 + z_1 \cos xOz_1.$$

La figure suppose ces trois angles aigus, et les trois coordonnées x_1, y_1, z_1, positives; auquel cas leurs projections tombent sur la direction même de Ox, et doivent s'ajouter en grandeur absolue; mais il est facile de s'assurer que cette équation subsistera dans tous les cas, en ayant égard aux signes des coordonnées x_1, y_1, z_1, des cosinus, et de l'abscisse x. Par exemple, on verra aisément que si l'abscisse x_1 est négative, et l'angle xOx_1 aigu, ou bien, si cette abscisse est positive, et cet angle obtus, la projection de OH tombera sur le prolongement de Ox, et la valeur absolue de cette projection devra être retranchée; et l'on verra, au contraire, qu'elle devra être ajoutée, quand cette abscisse x_1 sera négative, et qu'en même temps l'angle xOx_1 sera obtus; ce qui s'accorde, dans les deux cas, avec le signe du produit $x_1 \cos xOx_1$.

On verra de même que les projections de la ligne brisée MKHO sur les axes Oy et Oz, ou sur leurs prolongemens, sont toujours égales à y et z. Cela étant, si nous faisons

$$\begin{array}{lll} \cos xOx_1 = a, & \cos xOy_1 = b, & \cos xOz_1 = c, \\ \cos yOx_1 = a', & \cos yOy_1 = b', & \cos yOz_1 = c', \\ \cos zOx_1 = a'', & \cos zOy_1 = b'', & \cos zOz_1 = c'', \end{array}$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} x = ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ces neufs cosinus a, b, etc., sont liés entre eux par six équations, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{array}\right\} (2)$$

La première, par exemple, résulte de ce que a, a', a'', sont les cosinus des angles que fait une même droite Ox_1 avec les trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; et la quatrième, de ce que cette droite Ox_1 et la ligne Oy_1, à laquelle répondent les cosinus b, b', b'', sont perpendiculaires l'une à l'autre. On obtient aussi ces six équations en substituant les valeurs de x, y, z, dans l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1 + z_1^2,$$

dont les deux membres sont le carré de OM, et qui doit être identique.

En ayant égard aux équations (2), les équations (1) donnent, réciproquement,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = ax + a'y + a''z, \\ y_1 = bx + b'y + b''z, \\ z_1 = cx + c'y + c''z; \end{array}\right\} \quad (3)$$

et l'on peut remplacer les équations (2) par celles-ci :

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

La comparaison de ces formules avec celles du n° 277 montre clairement l'analogie qui existe entre les projections des lignes droites et celles des surfaces planes, d'où résulte l'identité de la composition des forces représentées par des portions de droites, avec la composition des momens représentés par des aires planes.

378. Dans la transformation des coordonnées, on devra donc considérer six des neuf coefficiens a, b, etc., comme des fonctions des trois autres, déterminées soit par les équations (2), soit par les équations (4); mais il vaudra mieux exprimer ces neuf coefficiens, au moyen de trois nouvelles quantités, par des formules qui satisferont aux équations (2) ou (4).

Pour cela, supposons que la droite NON' (fig. 88) soit l'intersection du plan des x_1 et y_1 avec le plan des x et y; et faisons

$$NOx = \psi, \quad NOx_1 = \varphi, \quad ZOz_1 = \theta:$$

ces trois angles ψ, φ, θ, détermineront, sans ambiguité, la position des axes des x_1, y_1, z_1, par rapport à ceux des x, y, z, pourvu que l'on convienne préalablement du sens dans lequel ces angles seront comptés. Pour plus de commodité, je supposerai que le plan des x et y soit horizontal, et que l'axe vertical des z positives soit dirigé dans le sens de la pesanteur.

L'angle θ s'étendra depuis zéro jusqu'à 180°; selon qu'il sera aigu ou obtus, l'axe Oz_1 sera situé au-dessous ou au-dessus du plan des x et y : pour $\theta = 0$, Oz_1 coïncidera avec Oz, et pour $\theta = 180°$, Oz_1 tombera sur le prolongement de Oz.

Dans le mouvement d'un corps solide autour du point O, les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, seront des droites fixes dans son intérieur et mobiles avec lui, et les axes Ox, Oy, Oz, seront des droites fixes dans l'espace. Il pourra alors arriver que les angles ψ et φ soient positifs ou négatifs, et qu'ils comprennent une ou plusieurs circonférences; mais, à un instant quelconque, on aura toujours

$$\psi = 2n\pi + u, \quad \varphi = 2i\pi + v,$$

en désignant par n et i des nombres entiers, positifs

ou négatifs, ou zéro, et par u et v des variables positives et moindres que 2π. Or, l'angle u sera compté, à partir de la droite Ox, dans le sens indiqué par la flèche s; de sorte que, par exemple, la droite ON coïncidera avec Ox pour $u = 0$, avec le prolongement de Oy pour $u = 90°$, avec celui de Ox pour $u = 180°$, et avec Oy pour $u = 270°$. L'angle v sera compté, à partir de ON, au-dessus du plan des x et y, de manière que l'axe Ox_1 se trouvera au-dessus de ce plan, quand v sera moindre que 180°, et au-dessous quand cet angle surpassera 180°. Pour $v = 0$, l'axe Ox, coïncidera avec la droite ON, et pour $v = 180°$, avec le prolongement ON' de ON. Dans tous les cas, l'angle θ, aigu ou obtus, sera l'angle dièdre dont l'arête est ON, et dont les faces sont les angles NOx et NOx_1, réduits à leurs parties u et v. La figure suppose que les trois angles u, v, θ, soient aigus.

Cela posé, lorsque l'angle ψ sera donné, on portera sa partie u sur le plan horizontal, à partir de l'axe Ox, et dans le sens de la flèche s; ce qui déterminera la position de la droite ON. L'angle φ étant aussi donné, on portera d'abord sa partie v sur le plan horizontal, à partir de la droite ON, et dans le sens de la flèche s', c'est-à-dire, en sens contraire de s; ensuite, on fera tourner le plan de l'angle φ autour de ON, de manière que la partie de φ adjacente à ON s'élève au-dessus du plan horizontal. Quand ce plan aura décrit l'angle donné θ, l'autre côté de l'angle φ sera la véritable position de l'axe Ox_1, au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, suivant qu'on aura $v < 180°$ ou $v > 180°$. En augmentant, dans son plan, l'angle u de 90°, on aura la position de l'axe Oy_1; et après avoir mené une perpendiculaire à ce plan, on prendra pour Oz_1 la partie de cette droite, comprise au-dessous ou au-dessus du plan horizontal, selon que l'angle θ sera aigu ou obtus.

Les trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, étant ainsi complètement déterminés par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, au moyen des angles ψ, φ, θ, il faut que les neuf cosinus a, b, etc., soient des fonctions de ces trois angles; et, en effet, en leur donnant les directions qu'on vient d'expliquer, on a

$$\left.\begin{aligned}
a &= \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi,\\
b &= \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi,\\
c &= \sin\theta \sin\psi,\\
a' &= \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi,\\
b' &= \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi,\\
c' &= \cos\theta \cos\psi,\\
a'' &= -\sin\theta \sin\varphi,\\
b'' &= -\sin\theta \cos\varphi,\\
c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

On vérifie aisément que ces valeurs de a, b, etc., rendent identiques les équations (3) et (4), et qu'il n'en résulte aucune relation entre les angles ψ, φ, θ.

379. Quoique ces formules (5) soient généralement connues, il ne sera pas inutile d'indiquer la manière suivante d'y parvenir.

On sait que α, β, γ, étant les trois angles d'un triangle sphérique quelconque, et A l'angle opposé au côté α, on a

$$\cos\alpha = \cos A \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta \cos\gamma.$$

Or, si nous imaginons une sphère décrite du point O comme centre, et d'un rayon quelconque, nous aurons d'abord sur cette surface un triangle formé par les trois arcs qui répondent aux angles NOx, NOx_1, xOx_1, dans lequel l'angle opposé au dernier côté sera égal à θ; donc, à cause de $NOx = \psi$ et $NOx_1 = \varphi$, on aura

$$\cos xOx_1 = a = \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi.$$

Cette équation ayant lieu pour des valeurs quelconques de φ et ψ, on peut supposer que φ devienne $\varphi + 90°$; alors, l'axe Ox_1 prendra la place de Oy_1, l'angle xOx_1 deviendra xOy_1, et l'on aura

$$\cos xOy_1 = b = \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi.$$

De même, en mettant $\psi + 90°$ à la place de ψ, dans l'équation précédente, l'axe Ox ne changera dans l'axe Oy, et l'angle xOx_1 deviendra yOx_1; de sorte que l'on aura

$$\cos yOx_1 = a' = \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi.$$

Et si l'on met à la fois dans cette équation précédente $\psi + 90°$ et $\varphi + 90°$ au lieu de ψ et φ, l'angle xOx_1 sera remplacé par l'angle yOy_1, et il en résultera

$$\cos yOy_1 = b' = \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi.$$

Considérons de même le triangle sphérique dont les trois côtés répondent aux angles NOx, NOz_1, xOz_1. L'angle opposé au dernier côté est $90° - \theta$; de plus, on a $NOx = \psi$ et $NOz_1 = 90°$. En faisant $A = 90° - \theta$, $\beta = \psi$, $\gamma = 90°$, $\alpha = xOz_1$, l'équation générale se réduira donc à

$$\cos xOz_1 = c = \sin\theta \sin\psi;$$

d'où l'on conclut aussi

$$\cos yOz_1 = c' = \sin\theta \cos\psi,$$

en mettant $\psi + 90°$ à la place de ψ; ce qui change l'axe Ox dans Oy, et l'angle xOz_1 dans l'angle yOz_1.

Enfin, dans le triangle sphérique dont les côtés répondent aux angles NOz, NOx_1, zOx_1, l'angle opposé au dernier côté est égal à $\theta + 90°$, et l'on a $NOz = 90°$ et $NOx_1 = \varphi$. Si donc on fait $A = 90° + \theta$, $\beta = 90°$, $\gamma = \varphi$, $\alpha = zOx_1$, dans l'équation générale, on aura

$$\cos zOx_1 = a'' = -\sin\theta \sin\varphi.$$

En mettant $\varphi + 90°$ à la place de φ, dans ce résultat, l'axe Ox_1 se changera en Oy_1, et l'angle zOx_1 en zOy_1; par conséquent, nous aurons aussi

$$\cos zOy_1 = b'' = -\sin\theta \cos\varphi.$$

Quant au neuvième cosinus c'', on a

$$c'' = \cos zOz_1 = \cos \theta.$$

280. Supposons maintenant que les axes des coordonnées x_1, y_1, z_1, soient les axes principaux qui se coupent au point O; d'après leur définition (n° 368), on aura

$$\int x_1 y_1 dm = 0, \quad \int x_1 z_1 dm = 0, \quad \int y_1 z_1 dm = 0; \quad (a)$$

et il s'agira de prouver que ces trois équations donnent toujours pour les angles φ, ψ, θ, des valeurs réelles.

En faisant, pour abréger,

$$X = x \cos \psi - y \sin \psi,$$
$$Y = x \cos \theta \sin \psi + y \cos \theta \cos \psi - z \sin \theta,$$

et substituant les formules (5) dans les équations (3), nous aurons

$$x_1 = Y \sin \varphi + X \cos \varphi,$$
$$y_1 = Y \cos \varphi - X \sin \varphi,$$
$$z_1 = x \sin \theta \sin \psi + y \sin \theta \cos \psi + z \cos \theta.$$

Au moyen de ces valeurs, la première équation (a) prend la forme

$$\sin 2\varphi \int (X^2 - Y^2)\, dm = 2 \cos 2\varphi \int XY dm \quad (b)$$

et les deux dernières deviennent

$$\cos \varphi \int Y z_1 dm - \sin \varphi \int X z_1 dm = 0,$$
$$\sin \varphi \int Y z_1 dm + \cos \varphi \int X z_1 dm = 0.$$

En ajoutant ces dernières équations après les avoir multipliées par $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$, ou par $-\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, elles seront remplacées par celles-ci :

$$\int Y z_1 dm = 0, \quad \int X z_1 dm = 0,$$

qui ne contiennent plus l'angle φ. J'y mets pour X, Y, z_1, leurs valeurs, et je fais

$$\int x^2 dm = f, \quad \int y^2 dm = g, \quad \int z^2 dm = h,$$
$$\int yz dm = f', \quad \int xz dm = g', \quad \int xy dm = h';$$

ces six intégrales s'étendant à la masse entière du corps que l'on considère. Il en résulte

$$(f \sin^2 \psi + 2h' \sin \psi \cos \psi + g \cos^2 \psi - h) \sin \theta \cos \theta$$
$$+ (g' \sin \psi + f' \cos \psi)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0,$$
$$[h' (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + (f - g) \sin \psi \cos \psi] \sin \theta$$
$$+ (g' \cos \psi - f' \sin \psi) \cos \theta = 0.$$

Or, si nous faisons

$$\operatorname{tang} \psi = u, \quad \sin \psi = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}},$$

la seconde de ces deux équations donnera

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{(f' u - g')\sqrt{1 + u^2}}{h'(1 - u^2) + (f - g) u}, \quad (c)$$

et la première prendra la forme

$$[(f - h) u^2 + 2h' u + g - h] \frac{\operatorname{tang} \theta}{\sqrt{1 + u^2}}$$
$$+ g' u + f' = (g' u + f') \operatorname{tang}^2 \theta.$$

En y mettant pour tang θ sa valeur, elle devient

$$[(f - h) u^2 + 2h' u + g - h] (f' u - g')$$
$$+ [h' (1 - u^2) + (f - g) u] (g' u + f') = \frac{(g' u + f')(f' u - g')^2 (1 + u^2)}{h' (1 - u^2) + (f - g) u};$$

son premier membre est la même chose que

$$[hg' - gg' + f'h' - (hf' - ff' + g'h') u] (1 + u^2);$$

par conséquent, on aura finalement

$$[gg' - hg' - f'h' + (hf' - ff' + g'h') u] [h' (1 - u^2) + (f - g) u]$$
$$+ (g' u + f')(f' u - g')^2 = 0. \quad (d)$$

Ainsi, les équations (a) sont remplacées par les équations (b), (c), (d). Or, cette dernière étant du troisième degré, elle aura au moins une racine réelle; on aura donc une valeur réelle de u ou tang θ, à laquelle répondront un angle ψ moindre que $\frac{1}{2}\pi$, et un autre égal au premier augmenté de π, qui appartiendront aux deux parties ON et ON' de l'intersection du plan inconnu des x_1 et y_1, avec le plan donné des x et y. A cause du radical $\sqrt{1 + u^2}$, l'équation (c) donnera ensuite deux valeurs de tang θ, égales et de signe contraire, qui appartiendront à un angle aigu et à son supplément, et, consé-

quemment, à l'axe $Oz_{,}$ et à son prolongement. Enfin, on tirera de l'équation (*b*) une valeur réelle de tang 2φ, à laquelle répondront deux valeurs de φ, dont l'une sera moindre que $\frac{1}{2}\pi$, et l'autre égale à la première augmentée de $\frac{1}{2}\pi$. La première étant prise pour la valeur de l'angle $NOx_{,}$, la seconde sera celle de l'angle $NOy_{,}$; et, en effet, tout étant semblable par rapport aux deux axes $Ox_{,}$ et $Oy_{,}$, ils devaient être déterminés par une même équation.

On voit de même que les trois racines de l'équation (*d*) devront être réelles, et qu'elles représenteront les tangentes des angles compris entre l'axe Ox et les trois droites suivant lesquelles les plans des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, viennent couper le plan des x et y; car ces trois tangentes doivent être données par une même équation, puisqu'on ne saurait exprimer, dans le calcul, aucune différence entre les trois axes principaux dont on cherche la position.

Nous conclurons donc de cette analyse qu'il existe toujours trois axes principaux rectangulaires qui se coupent en un point donné O, et qu'en général ce système d'axes principaux est unique. Pour qu'il en existât plusieurs, il faudrait que l'équation (*d*) fût d'un degré supérieur au troisième, et qu'elle eût trois fois autant de racines réelles qu'il y aurait de ces systèmes; mais, dans certains cas, les équations dont dépendent les valeurs ψ, θ, φ, deviennent identiques, et alors les axes principaux sont en nombre infini. Nous pourrions déterminer ces cas particuliers par l'examen des équations dont il s'agit; mais on y parviendra plus facilement par les considérations suivantes.

381. D'après les formules (1) et les équations (*a*), qui caractérisent les axes principaux $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, on a évidemment

$$\int xydm = aa'\int x_{,}^2dm + bb'\int y_{,}^2dm + cc'\int z_{,}^2dm,$$
$$\int zxdm = aa''\int x_{,}^2dm + bb''\int y_{,}^2dm + cc''\int z_{,}^2dm,$$
$$\int yzdm = a'a''\int x_{,}^2dm + b'b''\int y_{,}^2dm + c'c''\int z_{,}^2dm.$$

Or, si les trois intégrales $\int x_{,}^2dm$, $\int y_{,}^2\,dm$, $\int z_{,}^2\,dm$, sont égales, ces valeurs de $\int xydm$, $\int zxdm$, $\int yzdm$, se réduisent à zéro, en vertu des trois dernières équations (4); par conséquent, dans ce cas, les droites Ox, Oy, Oz, forment un second système d'axes principaux; et comme leur direction reste absolument indéterminée par rapport aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, il s'ensuit que tous les systèmes d'axes rectangulaires qu'on peut mener par le point O, sont des axes principaux. Ce cas est celui où les trois momens d'inertie principaux sont égaux; car, de ce qu'on suppose

$$\int x_{,}^2\,dm = \int y_{,}^2\,dm = \int z_{,}^2\,dm,$$

il en résulte

$$\int(x_{,}^2 + y_{,}^2)\,dm = \int(x_{,}^2 + z_{,}^2)\,dm = \int(y_{,}^2 + z_{,}^2)\,dm,$$

Si deux seulement des trois momens d'inertie principaux sont égaux, par exemple, ceux qui se rapportent aux axes $Ox_{,}$ et $Oy_{,}$, de manière qu'on ait

$$\int(y_{,}^2 + z_{,}^2)\,dm = \int(x_{,}^2 + z_{,}^2)\,dm,$$

il existera encore un nombre infini de systèmes d'axes principaux, qui auront tous un axe commun, savoir, l'axe $Oz_{,}$. En effet, dans ce cas, les deux intégrales $\int y_{,}^2\,dm$ et $\int x_{,}^2\,dm$ seront égales; et, en vertu des dernières équations (4), les valeurs de $\int xydm$, $\int zxdm$, $\int yzdm$, pourront se mettre sous la forme :

$$\int xydm = cc'\ (\int z_{,}^2\,dm - \int x_{,}^2\,dm),$$
$$\int zxdm = cc''\ (\int z_{,}^2\,dm - \int x_{,}^2\,dm),$$
$$\int yzdm = c'c''\ (\int z_{,}^2\,dm - \int x_{,}^2\,dm).$$

Or, si l'on fait coïncider l'axe Oz avec l'axe principal $Oz_{,}$, les angles $zOz_{,}$ et $yOz_{,}$ seront droits; on aura donc $c = 0$ et $c' = 0$, et par conséquent,

$$\int xydm = 0, \qquad \int zxdm = 0, \qquad \int yzdm = 0.$$

Donc, dans ce cas, tout système formé de l'axe Oz, et de deux autres axes rectangulaires, menés arbitrairement par le point O dans le plan $y_{,}Ox_{,}$, sera un système d'axes principaux.

Enfin, lorsque les trois momens d'inertie principaux sont inégaux, on peut être certain qu'il n'existe qu'un seul système d'axes principaux; car, soit A le plus grand de ces trois momens inégaux; supposons, pour un moment, qu'il existe un second système d'axes principaux, et désignons par A' le plus grand des trois momens qui s'y rapportent : il faudrait, d'après le théorème du n° 376, qu'on eût à la fois $A > A'$ et $A' > A$; ce qui est impossible, et rend inadmissible la supposition d'un second système d'axes principaux.

382. Les points d'un corps, quand il en existe, pour lesquels les trois momens d'inertie principaux, et, par conséquent, tous les momens d'inertie, sont égaux, jouissent, comme on le verra par la suite, d'une propriété remarquable, relativement à la rotation de ce corps. Il est donc utile de les déterminer; et voici comment on y parvient.

Supposons que l'origine des coordonnées x, y, z, soit placée au centre de gravité du mobile, et que ces coordonnées soient rapportées aux trois axes principaux qui se coupent en ce point; désignons par A, B, C, les momens d'inertie relatifs à ces axes des x, y, z; nous aurons (n° 368)

$$\int xdm = 0, \quad \int ydm = 0, \quad \int zdm = 0,$$
$$\int yzdm = 0, \quad \int zxdm = 0, \quad \int xydm = 0,$$
$$\int(y^2 + z^2)\,dm = A, \int(x^2 + z^2)\,dm = B, \int(x^2 + y^2)\,dm = C,$$

toutes ces intégrales s'étendant à la masse entière du mobile.

Soient α, β, γ, les coordonnées inconnues d'un des points demandés, rapportées aux axes des x, y, z, de sorte qu'on ait, pour ce point particulier, $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$. Transportons-y l'origine des coordonnées, sans changer la direction des axes; les coordonnées de l'élément dm deviendront $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$. Mais si l'on veut que les momens d'inertie relatifs à toutes les droites qui passent par cette nouvelle origine soient égaux, il faut que toutes ces droites soient des axes principaux, puisque, d'après le numéro précédent, l'une de ces conditions est une suite nécessaire de l'autre. Les axes des coordonnées $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$, étant donc des axes principaux, on aura

$$\int(x-\alpha)(y-\beta)\,dm = \int xy\,dm - \alpha\int y\,dm - \beta\int x\,dm + \alpha\beta\int dm = 0,$$
$$\int(z-\gamma)(x-\alpha)\,dm = \int zx\,dm - \gamma\int x\,dm - \alpha\int z\,dm + \gamma\alpha\int dm = 0,$$
$$\int(y-\beta)(z-\gamma)\,dm = \int yz\,dm - \beta\int z\,dm - \gamma\int y\,dm + \beta\gamma\int dm = 0;$$

équations qui se réduisent à

$$\alpha\beta = 0, \quad \gamma\alpha = 0, \quad \beta\gamma = 0,$$

en vertu des précédentes. Or, pour satisfaire à ces équations, il est nécessaire que deux des trois quantités α, β, γ, soient nulles. Si donc le point demandé existe, il ne peut se trouver que sur l'un des axes des coordonnées x, y, z, c'est-à-dire, sur l'un des trois axes principaux qui se coupent au centre de gravité.

Je fais $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; ce qui revient à supposer le point demandé, sur l'axe de x, à une distance α de ce centre. Alors les momens d'inertie relatifs à ce point, seront A, par rapport à l'axe des x, et, en vertu du théorème du n° 374, $B + M\alpha^2$ et $C + M\alpha^2$, par rapport aux parallèles aux axes des y et des z, en désignant par M la masse du corps: D'après la condition du problème, on aura donc

$$B + M\alpha^2 = C + M\alpha^2 = A;$$

mais pour que ces équations soient possibles, il faut qu'on ait $B = C$; et quand ces deux quantités seront effectivement égales, on aura

$$M\alpha^2 = A - C;$$

il faudra donc encore qu'on ait $A > C$, afin que la quantité α soit réelle. Cela étant, on aura pour α deux valeurs réelles, égales et de signe contraire, savoir :

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{A-C}{M}}; \qquad (e)$$

par conséquent, il existera deux points qui jouiront de la propriété demandée, et seront situés sur l'axe des x, à égale distance de part et d'autre du centre de gravité.

Ainsi, lorsque les trois momens d'inertie A, B, C, d'un corps, relatifs aux axes principaux qui se coupent à son centre de gravité, sont égaux, il n'existe aucun autre point du corps pour lequel les momens d'inertie soient tous égaux; mais si deux de ces trois momens sont égaux, et que le moment inégal soit le plus grand des trois, il existe, sur l'axe du plus grand moment, deux points pour lesquels tous les momens d'inertie seront égaux, et dont les positions sont déterminées par la formule (e).

383. En appliquant ces résultats à l'ellipsoïde homogène, on voit que s'il s'agit d'un ellipsoïde quelconque dont les trois diamètres principaux sont inégaux, il n'y aura aucun point, en dedans ou en dehors du corps, par rapport auquel tous les momens d'inertie soient égaux; mais si l'on considère un ellipsoïde de révolution engendré par une ellipse tournant autour de son petit axe, il y aura deux points sur cet axe ou sur son prolongement, qui jouiront de la propriété dont il s'agit; car, dans ce cas, deux des trois momens relatifs aux diamètres principaux seront égaux, et le moment inégal répondant au plus petit diamètre, sera le plus grand des trois.

Si l'on appelle a et b les demi-axes de l'ellipse génératrice, et qu'on suppose $a < b$, de sorte que a soit le demi-axe de révolution, on aura

$$A = \tfrac{1}{5}Mb^2, \quad B = C = \tfrac{1}{5}M(a^2 + b^2),$$

en faisant $b = c$ dans les formules du n° 370 : d'après la formule (e), on aura donc

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{5}},$$

pour la distance des points demandés au centre de l'ellipsoïde. Selon qu'on aura $b^2 > 6a^2$ ou $b^2 < 6a^2$, ces points se trouveront sur le prolongement de l'axe de révolution, en dehors du corps, ou sur l'axe même, en dedans du corps; dans le cas de $b^2 = 6a^2$, ces deux points se trouveront à la surface, et coïncideront avec les pôles de l'ellipsoïde.

Les axes principaux d'un parallélipipède rectangle, qui se coupent à son centre de gravité, sont évidemment parallèles à ses arêtes. En appelant donc a, b, c, les demi-longueurs de ses trois côtés adjacens, les momens d'inertie relatifs à ces axes se déduiront de ceux du n° 369, qui répondent à ses arêtes, en y mettant $2a$, $2b$, $2c$, au lieu de a, b, c, et en retranchant, d'après le théorème du n° 374, les produits $M(b^2 + c^2)$, $M(c^2 + a^2)$, $M(a^2 + b^2)$. De cette manière, on aura

$$A = \tfrac{1}{3}M(b^2 + c^2), \quad B = \tfrac{1}{3}M(c^2 + a^2), \quad C = \tfrac{1}{3}M(a^2 + b^2);$$

M étant toujours la masse du parallélipipède, dont le volume est maintenant $\frac{1}{8}abc$. Je suppose donc qu'on ait $b = c$, afin de rendre égaux les momens d'inertie B et C, et; de plus, $a < b$, pour que A

soit plus grand que C. L'équation (*o*) donne alors

$$a = \sqrt{\frac{\delta^2 - a^2}{3}};$$

et selon qu'on aura $\delta > 2a$, $\delta = 2a$, $\delta < 2a$, les deux points demandés seront situés en dehors du mobile, à sa surface, ou dans son intérieur.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

§ 1er. *Mouvement de rotation uniforme.*

384. Lorsqu'un système de points matériels, liés entre eux d'une manière invariable, tourne autour d'un axe fixe, auquel ils sont aussi invariablement attachés, ils décrivent des cercles perpendiculaires à cet axe, et qui ont leurs centres sur cette droite. Les arcs décrits dans le même temps par deux points différens, sont semblables et d'un même nombre de degrés; leurs vitesses absolues sont entre elles comme leurs distances à cet axe; et l'on appelle *vitesse angulaire* du système, la vitesse absolue des points dont la distance à l'axe est l'unité. En la désignant par ω, et la distance d'un point quelconque à l'axe de rotation par r, la vitesse absolue de ce point sera $r\omega$. Cette quantité ω, commune à tous les points, variera avec le temps, quand les points du système seront soumis à des forces motrices qui produiront un mouvement varié; elle demeurera constante dans le cas du mouvement uniforme, produit par des percussions exercées simultanément sur les différentes parties du système, qui aura ensuite été abandonné à lui-même. C'est de ce dernier cas que nous allons d'abord nous occuper.

385. Soient m, m', m'', etc., les masses des points matériels que nous considérons, et r, r', r'', etc., leurs distances à l'axe de rotation. Supposons que des percussions simultanées soient exercées sur tous ces points; chacune de ces forces se décomposera en deux autres, l'une parallèle à l'axe, l'autre dirigée dans un plan perpendiculaire à cette droite; et l'on pourra faire abstraction de la première, dont l'effet sera évidemment détruit par la résistance de l'axe fixe. Soient donc v, v', v'', etc., les vitesses dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe, qui seraient imprimées à m, m', m'', etc., si ces points matériels étaient libres. En désignant par ω la vitesse angulaire du système qui en résultera, ces points prendront des vitesses $r\omega$, $r'\omega$, $r''\omega$, etc., perpendiculaires à l'axe et aux rayons r, r', r'', etc., et, d'après le principe du nº 353, il y aura équilibre entre les quantités de mouvement mv, $m'v'$, $m''v''$, etc., prises dans leurs directions données, et les quantités de mouvement circulaire $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, etc., prises en sens contraire du mouvement du système, qui aura réellement lieu.

Pour former l'équation de cet équilibre, projetons les points m, m', m'', etc., et les directions des vitesses que nous considérons, sur un plan perpendiculaire à l'axe fixe. Soit Oz cet axe (fig. 89); faisons passer le plan de projection par le point O; sur ce plan, soient P la projection de m, PA la projection de la vitesse v, et PN celle de la vitesse $r\omega$, laquelle est perpendiculaire au rayon r ou OP. Soit aussi p la perpendiculaire OF, abaissée de O sur la droite PA; les momens des forces mv et $mr\omega$, projetées suivant PA et PN, seront mvp et $mr^2\omega$; et si l'on appelle aussi p', p'', etc., les perpendiculaires abaissées du même point O sur les projections des autres vitesses v', v'', etc., on aura

$$mr^2\omega + m'r'^2\omega + m''r''^2\omega + \text{etc.}$$
$$= mvp + m'v'p' + m''v''p'' + \text{etc.},$$

pour l'équation d'équilibre demandée (nº 267).

Lorsque parmi les percussions simultanées, il y en aura qui tendront à faire tourner le système dans un sens, et d'autres dans le sens opposé, il faudra prendre, avec des signes contraires, les momens des unes et des autres dans le second membre de cette équation. Le système tournera dans le sens des forces qui donneront la plus grande somme de momens, abstraction faite du signe. En représentant par L la somme, positive ou négative,

de tous ces momens pris avec des signes convenables, on tirera de l'équation précédente

$$\omega = \frac{L}{\Sigma mr^2};$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à tous les points du système.

Si toutes les vitesses v, v', v'', etc., sont égales, L sera le produit de leur valeur commune v et de la somme $mp + m'p' + m''p''$ + etc.; si, de plus, ces vitesses sont toutes parallèles entre elles, et qu'on mène par l'axe Oz, un plan parallèle à leur direction commune, p, p', p'', etc., seront les distances des points m, m', m'', etc., à ce plan; et, d'après les signes qu'on donnera aux termes de L, il faudra les considérer comme positives ou comme négatives, selon que les points m, m', m'', etc., seront situés d'un côté ou de l'autre de ce plan. Par conséquent, M désignant la somme des masses m, m', m'', etc., et q la distance positive ou négative de son centre de gravité à ce même plan, nous aurons (n° 65)

$$mp + m'p' + m''p'' + \text{etc.} = Mq;$$

il en résultera $L = Mvq$, et la valeur de ω deviendra

$$\omega = \frac{Mvq}{\Sigma mr^2};$$

Si la vitesse v est imprimée seulement à une partie des points du système, et qu'on ne communique directement aucune vitesse à l'autre partie, on aura de même

$$\omega = \frac{\mu vf}{\Sigma mr^2};$$

μ étant la somme des masses qui ont reçu la vitesse v, et f la distance du centre de gravité de cette partie du système au plan mené par l'axe fixe, parallèlement à la direction de v.

386. Supposons actuellement que le système des points m, m', m'', etc., soit un corps solide; il suffira alors de changer, dans les formules précédentes, la masse m d'un point quelconque dans l'élément différentiel de la masse du corps, que nous représenterons par dm, et la somme Σ en une intégrale. La quantité Σmr^2 deviendra donc l'intégrale $\int r^2\,dm$, étendue à la masse entière du corps, et elle exprimera son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation; par conséquent, la dernière formule se changera en celle-ci :

$$\omega = \frac{\mu vf}{\int r^2\,dm}. \qquad (1)$$

Cette formule se rapportera au cas d'un corps solide retenu par un axe fixe, et frappé par un autre corps qui s'attache au premier, de sorte que ces deux corps n'en forment plus qu'un seul, tournant autour de l'axe fixe avec la vitesse angulaire ω. La masse du corps choquant est μ, sa vitesse avant le choc, qui était commune à tous ses points et perpendiculaire à la direction de l'axe fixe, est v, et f exprime la distance de son centre de gravité à un plan parallèle à cette vitesse et passant par l'axe de rotation. L'intégrale $\int r^2\,dm$ devra s'étendre aux deux masses réunies après le choc. Si le corps choquant ne restait pas attaché à l'autre après le choc, la détermination de la vitesse angulaire de celui-ci serait un problème différent, dont nous nous occuperons dans un autre chapitre.

Quand le corps retenu par un axe fixe sera choqué simultanément par plusieurs masses μ, μ', μ'', etc., animées de vitesses v, v', v'', etc., perpendiculaires à la direction de l'axe, qui se réuniront à ce corps après le choc, on aura, pour la vitesse angulaire qui sera produite,

$$\omega = \frac{\mu vf + \mu'v'f' + \mu''v''f'' + \text{etc.}}{\int r^2\,dm};$$

l'intégrale s'étendant à la masse totale, et f, f', f'', etc., désignant les distances des centres de gravité de μ, μ', μ'', etc., à des plans menés par l'axe de rotation, parallèlement aux vitesses v, v', v'', etc. Ayant pris avec le signe + le premier terme du numérateur de cette formule, on prendra les autres termes avec le signe + ou avec le signe —, selon que les percussions correspondantes tendront à faire tourner dans le sens de celle qui répond au premier terme, ou dans le sens opposé; et selon que la valeur de ω se trouvera positive ou négative, la rotation aura lieu dans le sens de cette force ou en sens contraire. Quand on aura $\omega = 0$, le système restera en repos, et toutes les percussions se feront équilibre. Au lieu d'être simultanées, si elles sont successives, la valeur de ω, après tous les chocs, sera encore donnée par la formule précédente; car après un premier choc le mouvement est le même à chaque instant, que si ce choc avait lieu actuellement; par conséquent, on peut supposer qu'il ait lieu à l'instant du second choc, pour déterminer la vitesse angulaire après la seconde percussion; et ainsi de suite.

387. Lorsque le mouvement de rotation commence autour d'un axe fixe, cette droite éprouve des percussions qu'il est important de déterminer; elles sont dues aux quantités de mouvement perdues, à cette époque, par les différens points du mobile, qui se font équilibre au moyen de l'axe fixe, et doivent, conséquemment, se réduire à des percussions dont les directions rencontrent cet axe, ou lui sont parallèles. Les percussions parallèles se déterminent immédiatement; ce sont les composantes, suivant cette direction, des quantités de mouvement qui ont été imprimées au mobile : nous en ferons abstraction, comme dans le n° 385; et nous supposerons que le mouvement de rotation soit celui qui a été produit par un choc perpendicu-

laire à la direction de l'axe fixe, et auquel répond la formule (1).

Prenons le point P pour le centre de gravité de μ, et la droite PA pour la direction de sa vitesse avant le choc, de manière que f soit la distance OF de cette droite à l'axe Oz. Dans le plan perpendiculaire à cet axe fixe, et comprenant la droite PA, menons par le point O de cet axe deux autres axes rectangulaires Ox et Oy. Soient x, y, z, les trois coordonnées de dm, rapportées aux axes Ox, Oy, Oz; la vitesse $r\omega$ de ce point matériel étant perpendiculaire au rayon r et parallèle au plan des x et y, il est aisé de voir que les cosinus des angles qu'elle fait avec ces trois axes sont $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$ et zéro, en supposant que la rotation ait lieu dans le sens indiqué par la flèche s; par conséquent, elle se décomposera en deux vitesses $-y\omega$ et $x\omega$, parallèles aux axes Ox et Oy. Les composantes des quantités de mouvement de tous les points du corps suivant ces directions, seront donc $-\omega\int ydm$ et $\omega\int xdm$, ou, ce qui est la même chose, $-\omega My_1$ et ωMx_1, en désignant toujours par M la masse entière après le choc, et représentant par x_1 et y_1 les valeurs de x et y qui répondent à son centre de gravité. Les sommes des momens de toutes ces quantités de mouvement, par rapport au plan des x et y, seront $-\omega\int yzdm$ et $\omega\int xzdm$; elles devront être égales (n° 54) aux momens des forces totales $-\omega\int ydm$ et $\omega\int xdm$, par rapport au même plan, c'est-à-dire, à $-\omega My_1z'$ et $\omega Mx_1z''$, en appelant z' et z'' les distances de ces deux forces à ce plan; on aura donc

$$My_1z' = \int yzdm, \quad Mx_1z'' = \int xzdm, \qquad (2)$$

pour déterminer ces deux quantités z' et z'', positives ou négatives.

Cela posé, les quantités de mouvement perdues par tous les points de la masse M, et qui se font équilibre au moyen de l'axe fixe, pourront être remplacées par une force ωMy_1, parallèle à l'axe des x et située à la distance z' du plan des x et y, par une force $-\omega Mx_1$, parallèle à l'axe des y et située à la distance z'' de ce plan, et par la force μv, à laquelle on conserve sa direction, du point P vers le point A. Ces trois forces se réduiront au moins à deux, qui rencontreront l'axe fixe, et exprimeront les percussions qu'il éprouve, perpendiculairement à sa longueur. Quand elles se réduiront à une seule, l'axe éprouvera une percussion unique, et il suffira que le point où il sera rencontré par cette force soit supposé fixe, pour que cet axe puisse résister.

388. Si la droite Oz est un des trois axes principaux de M, qui se coupent au point O, on aura

$$\int xzdm = 0, \quad \int yzdm = 0.$$

Les distances z' et z'' seront donc nulles; et les forces ωMy_1 et $-\omega Mx_1$, ainsi que la force μv, étant toutes trois comprises dans le plan des x et y, la percussion unique, à laquelle elles se réduiront, passera par le point O. Pour en déterminer la grandeur et la direction, soient R cette force, a et b les angles qu'elle fait avec les axes Ox et Oy, α et β les angles que fait la droite PA avec des parallèles à ces axes, menées par le point P; nous aurons

$$R\cos a = \mu v\cos\alpha + \omega My_1,$$
$$R\cos b = \mu v\cos\beta - \omega Mx_1;$$

et comme la valeur de ω est donnée par la formule (1), et que les coordonnées x_1 et y_1 du centre de gravité de M sont aussi connues, il n'y aura rien d'inconnu dans ces valeurs des deux composantes de la force R.

Puisque cette résultante doit passer par le point O, il faudra que la somme des momens de ses trois composantes, par rapport à ce point, soit égale à zéro. Or, en désignant par y' et x' les distances aux axes Ox et Oy des forces ωMy_1 et $-\omega Mx_1$, parallèles à ces droites, et ayant égard au sens dans lequel ces deux forces et la percussion μv tendront à faire tourner autour du point O, on en conclura

$$\omega My_1y' + \omega Mx_1x' - \mu vf = 0;$$

f étant toujours la perpendiculaire OF abaissée du point M sur la droite PA. C'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier; car en considérant les momens par rapport aux plans des x et z et des y et z, de toutes les quantités de mouvement parallèles à ces plans, dont les sommes sont $-\omega My_1$ et ωMx_1, on aura

$$My_1y' = \int y^2\,dm, \quad Mx_1x' = \int x^2\,dm;$$

et ces valeurs, jointes à celles de ω, rendent identique l'équation précédente.

Pour que l'axe fixe n'éprouve aucune percussion, il est aisé de voir qu'il faut d'abord que les distances z' et z'' soient nulles; en vertu des équations (2), cela ne peut donc arriver que quand la droite Oz est un des axes principaux qui se coupent au point O, ainsi que nous venons de le supposer. Cette condition remplie, il faut, en outre, que la force R soit nulle; ce qui exige qu'on ait

$$\mu v\cos\alpha = -\omega My_1, \quad \mu v\cos\beta = \omega Mx_1.$$

On en déduit

$$\frac{x_1}{y_1}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + 1 = 0;$$

équation qui exprime que la droite PA doit être perpendiculaire au plan passant par l'axe fixe et par le centre de gravité de M. De plus, en désignant par r_1 la distance de ce point à cet axe, les équations précédentes donneront

$$\mu^2v^2 = \omega^2M^2(x_1^2 + y_1^2) = \omega^2M^2r_1^2;$$

et si l'on met pour ω sa valeur fournie par la formule (1), on en conclura

$$f = \frac{\int r^2\,dm}{Mr_1}.$$

Ainsi, quand un corps solide, retenu par un axe fixe, est frappé par un second corps dont la masse demeure attachée à celle du premier, il faut, pour qu'il n'y ait aucune percussion sur l'axe fixe, 1° que le choc soit dirigé dans le plan de deux droites qui font, avec l'axe fixe, un système rectangulaire d'axes principaux du corps formé des deux masses réunies; 2° que sa direction soit perpendiculaire au plan du centre de gravité de ce corps et de l'axe fixe; 3° que cette direction PA rencontre ce plan en un point dont la distance f à l'axe de rotation est donnée par la formule précédente. Ce point est ce qu'on appelle le *centre de percussion*.

389. Pendant qu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, les forces centrifuges de ses différens points exercent sur cet axe des pressions que nous allons déterminer, et qui sont les seules qui aient lieu dans le mouvement uniforme où les points du mobile ne sont sollicités par aucune force motrice.

En conservant les notations précédentes, on aura $r\omega^2\,dm$ (n° 169) pour la force centrifuge de l'élément dm, dont la vitesse est $r\omega$, et qui décrit un cercle du rayon r; et comme cette force est dirigée suivant le prolongement de r, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes des x, y, z, seront $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et zéro. Si donc on la transporte au point où sa direction rencontre l'axe Oz, elle pourra être remplacée par deux forces comprises dans les plans xOz et yOz, parallèles aux axes Ox et Oy, et égales à $x\omega^2\,dm$ et $y\omega^2\,dm$. La même chose ayant lieu pour tous les élémens du mobile, on en conclut que l'axe Oz sera tiré, suivant ces directions, par des forces qui auront pour valeurs $\omega^2\int x\,dm$ et $\omega^2\int y\,dm$, ou, ce qui est la même chose, $\omega^2\,\mathbf{M}x_{,}$ et $\omega^2\,\mathbf{M}y_{,,}$ d'après les notations précédentes. On voit aussi que les distances z' et z'' de ces deux pressions totales, au plan des x et y, seront données par les équations

$$\mathbf{M}x_{,}z' = \int xz\,dm, \qquad \mathbf{M}y_{,}z'' = \int yz\,dm, \qquad (3)$$

inverses des équations (2) relatives aux percussions.

Lorsqu'on aura $z' = z''$, les deux pressions $\omega^2\,\mathbf{M}x_{,}$ et $\omega^2\,\mathbf{M}y_{,,}$ seront appliquées en un même point de l'axe Oz; elles se réduiront à une seule force perpendiculaire à cette droite, dirigée dans le plan qui comprend le centre de gravité du mobile, et dont $\omega^2\,\mathbf{M}r_{,}$ sera la valeur; $r_{,}$ étant la distance de ce centre à l'axe fixe.

Ce cas aura lieu toutes les fois que Oz sera un des trois axes principaux qui se coupent au point O. Dans ce cas, les seconds membres des équations (3) seront nuls, et l'on aura $z' = 0$ et $z'' = 0$. La pression unique que l'axe éprouvera pendant le mouvement de rotation passera donc par le point O; en sorte qu'il suffira que ce point soit fixe, pour que cette pression soit détruite, et que l'axe demeure immobile. Quel que soit le point fixe O appartenant à un corps solide, ou lié invariablement à ce corps, il y a donc toujours trois droites rectangulaires, passant par ce point, autour desquelles le corps peut tourner, sans que ces axes de rotation se déplacent, et comme s'ils étaient entièrement fixes.

Telle est la propriété relative au mouvement uniforme de rotation, dont jouissent les droites que nous avons nommées *axes principaux*. Elle leur appartient exclusivement; car si le corps tourne autour d'une droite Oz, qui ne soit pas un des trois axes principaux relatifs au point fixe O, les deux pressions $\omega^2\,\mathbf{M}x_{,}$ et $\omega^2\,\mathbf{M}y_{,}$ seront, en général, irréductibles à une seule, ou bien, si elles se réduisent à une seule, à cause de $z' = z''$, cette pression unique passera par un point différent de O; par conséquent, il faudra qu'un second point, ou l'axe entier, soit supposé fixe, pour que les pressions dues aux forces centrifuges soient détruites, et que l'axe de rotation ne soit pas déplacé pendant le mouvement.

Quand un corps retenu par un point fixe O, et qui n'est soumis à aucune force motrice, aura commencé à tourner autour d'un des trois axes qui se coupent en ce point, le mouvement continuera indéfiniment autour de cette droite. Cela aura lieu, par exemple, si le mobile est mis en mouvement par un choc dirigé dans le plan des deux autres axes principaux relatifs à ce point O, puisqu'alors, d'après le numéro précédent, les percussions qu'éprouvera l'axe, dans le premier moment, se réduiront à une seule qui passera par ce point fixe, et sera détruite par sa résistance. Si O est un des points particuliers pour lesquels tous les momens d'inertie sont égaux, l'axe autour duquel le corps commencera à tourner sera nécessairement un axe principal; et, de quelque manière que le corps soit mis en mouvement autour de ce point fixe, l'axe de rotation demeurera immobile. Ainsi, un ellipsoïde de révolution, ou un parallélipipède, retenu par un des points dont nous avons déterminé précédemment la position (n° 383), tournera toujours autour d'un axe immobile. Il en sera de même à l'égard d'une sphère dont le centre est fixe; ou d'un cube retenu par le point situé à l'intersection de ses trois diagonales; et de plus, dans ces deux derniers cas, le point fixe étant le centre de gravité, l'axe de rotation demeurera encore immobile, quoique le corps soit pesant. Dans le cas général, les forces motrices qui agiront sur le mobile, produiront, comme les forces centrifuges, des pressions sur l'axe de rotation, qui contribueront à le déplacer, quand elles ne se réduiront pas à une seule force passant par le point fixe.

390. Si la droite Oz est un des trois axes principaux qui se coupent au centre de gravité G du corps que l'on considère, elle sera encore un des trois axes principaux de ce même corps au point quelconque O de sa direction. En effet, soit γ la distance OG de ce centre au point O. Sans changer la direction précédente des coordonnées x, y, z, transportons leur origine au point G; celle de l'élément quelconque

dm deviendront x, y, $z-\gamma$; et, d'après la définition des axes principaux, on aura

$$\int x\,(z-\gamma)\,dm = \int xz\,dm - \gamma\int x\,dm = 0,$$
$$\int y\,(z-\gamma)\,dm = \int yz\,dm - \gamma\int y\,dm = 0.$$

De plus, le point G étant sur l'axe des z, on a $\int x\,dm = 0$ et $\int y\,dm = 0$; il en résulte donc $\int xz\,dm = 0$ et $\int yz\,dm = 0$; d'où l'on conclut que Oz est un des trois axes principaux qui se coupent au point O.

On déterminera la direction des deux autres axes principaux dans le plan des x et y, par la transformation des coordonnées. Soient x' et y' celles de dm par rapport à ces deux autres axes; il faudra qu'on ait

$$\int x'y'\,dm = 0,\quad \int x'z\,dm = 0,\quad \int y'z\,dm = 0;$$

mais si l'on appelle θ l'angle compris entre l'axe des x' et celui des x, on aura

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,\quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta;$$

or, en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, les deux dernières disparaissent à cause de $\int xz\,dm = 0$ et $\int yz\,dm = 0$; la première devient

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\int xy\,dm + \sin\theta\cos\theta\left(\int x^2\,dm - \int y^2\,dm\right) = 0;$$

et l'on en tirera la valeur de θ. Les intégrales que cette équation renferme pourront changer de valeur avec la position du point O; en sorte que le long de l'axe Oz, les deux autres axes principaux ne seront pas, en général, parallèles à eux-mêmes.

Les quatre équations

$$\int x\,dm = 0,\quad \int xz\,dm = 0,\quad \int y\,dm = 0,\quad \int yz\,dm = 0,$$

ayant lieu en même temps, il suit des deux premières que les pressions parallèles et comprises dans le plan des x et z, qui proviennent des forces centrifuges, se réduisent à deux forces égales et directement opposées; et en vertu des deux dernières équations, la même chose a lieu à l'égard des composantes comprises dans le plan des y et z. Par conséquent, lorsqu'un corps tourne autour de l'un des trois axes principaux qui se coupent à son centre de gravité, les forces centrifuges de tous ses points ne produisent aucune pression sur l'axe de rotation; et si le mouvement a commencé autour d'un tel axe, il continuera indéfiniment, sans que cette droite ait aucun point fixe, en supposant toujours qu'aucune force motrice n'agit sur le mobile.

Ce résultat est évident dans le cas d'un ellipsoïde tournant autour d'un de ses trois axes de figure; car tout étant symétrique autour de chacune de ces droites, il n'y aurait pas de raison pour qu'elle éprouvât une pression dans un sens plutôt que dans le sens opposé.

§ II. *Mouvement de rotation varié.*

391. Soit toujours dm un élément quelconque de la masse du mobile, tournant autour de l'axe fixe Oz (fig. 90). Par un point O, pris arbitrairement sur cette droite, menons deux autres axes fixes Ox et Oy, perpendiculaires entre eux et à l'axe Oz; et au bout du temps quelconque t, désignons par x, y, z, les trois coordonnées de dm, rapportées à ces axes Ox, Oy, Oz. Au même instant, les composantes de la vitesse, parallèles à ces droites, seront $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Or, quelles que soient les forces appliquées à l'élément dm, je les décompose parallèlement à ces mêmes axes; et, au bout du temps t, je désigne par X, Y, Z, les composantes suivant les x, y, z, positives, de la force accélératrice donnée qui agit sur ce point matériel. Si ce point était libre, les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, de la vitesse, augmenteraient de Xdt, Ydt, Zdt, pendant l'instant dt (n° 147); mais ces fonctions du temps augmentent réellement de leurs différentielles $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$; par conséquent, les vitesses perdues pendant l'instant dt, suivant les directions des coordonnées, sont

$$\mathrm{X}dt - d.\frac{dx}{dt},\quad \mathrm{Y}dt - d.\frac{dy}{dt},\quad \mathrm{Z}dt - dt.\frac{dz}{dt}.$$

En les multipliant par dm, et divisant par dt, on aura

$$\left(\mathrm{X} - \frac{d^2x}{dt^2}\right)dm,\quad \left(\mathrm{Y} - \frac{d^2y}{dt^2}\right)dm,\quad \left(\mathrm{Z} - \frac{d^2z}{dt^2}\right)dm,$$

pour les composantes de la force perdue par l'élément dm, pendant cet instant dt, à raison de sa liaison avec les autres points du corps et avec l'axe de rotation. Donc, en vertu du principe du n° 350, l'équilibre devra avoir lieu autour de cet axe fixe, entre de semblables forces appliquées à tous les points du mobile.

Pour former l'équation de cet équilibre, il suffira de mettre les deux premières des trois forces précédentes à la place de P cos α et P cos β, dans

le premier terme de l'équation (5) du n° 266, et d'égaler ensuite à zéro la somme des valeurs de cette quantité, pour tous les points du corps, laquelle somme sera une intégrale étendue à la masse entière. En faisant passer les différentielles dans le premier membre et les forces données dans le second, nous aurons, de cette manière,

$$\int\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)dm=\int(xY-yX)\,dm, \quad (1)$$

pour l'équation demandée, qui sera celle du mouvement de rotation autour de l'axe des z.

392. Soit ω la vitesse angulaire au bout du temps t; et supposons que l'on considère cette quantité comme positive ou comme négative, selon que le mouvement de rotation aura lieu dans le sens indiqué par la flèche s, ou dans le sens opposé. Soit aussi r le rayon du cercle que décrit dm, ou la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe Oz; sa vitesse absolue sera $r\omega$, et l'on aura

$$\frac{dx}{dt}=-y\omega, \qquad \frac{dy}{dt}=x\omega,$$

pour les valeurs de ces deux composantes. En effet, si P est la projection de dm sur le plan des x et y, et qu'on tire le rayon OP et la perpendiculaire QPP' à OP, laquelle coupe en Q et Q' les axes Ox et Oy, on aura

$$OP=r, \quad \cos xQP=-\frac{y}{r} \quad \cos yQ'P'=\frac{x}{r};$$

et comme la vitesse $r\omega$ sera parallèle à la droite QPP', ce sera par ces cosinus qu'il faudra la multiplier, pour avoir les valeurs de ses composantes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$.

En observant que $x^2+y^2=r^2$, on déduit de ces valeurs

$$xdy-ydx=r^2\omega dt. \quad (2)$$

Je différentie par rapport à t; à cause que le rayon r est constant, on a

$$xd^2y-yd^2x=r^2d\omega dt;$$

et $d\omega$ étant une quantité commune à tous les points du corps, qui doit être regardée comme constante dans l'intégration relative à dm, l'équation (1) devient

$$\frac{d\omega}{dt}\int r^2\,dm=\int(xY-yX)\,dm; \quad (3)$$

ce qui fera connaître la valeur de $d\omega$, correspondante à une position donnée du mobile.

Si l'on décompose la force accélératrice qui agit sur dm en deux autres, l'une parallèle à l'axe Oz, et l'autre comprise dans un plan perpendiculaire à cette droite, on pourra faire abstraction de la première, qui ne peut contribuer au mouvement de rotation; la seconde, que j'appellerai φ, sera la résultante de X et Y. Je projette les trois forces X, Y, φ, sur le plan des x et y; je suppose que PC soit la direction de φ ainsi projetée; et j'appelle h la perpendiculaire OH abaissée du point O sur PC ou sur son prolongement. En considérant les momens par rapport au point O, on aura (n° 46)

$$xY-yX=\pm h\varphi,$$

selon que la force φ tendra à faire tourner dans le sens de la flèche s, ou dans le sens opposé. J'appelle aussi δ l'angle Q'PC que fait la droite PC avec la perpendiculaire PQ' au rayon OP, menée dans le sens indiqué par la flèche s. Cet angle sera aigu ou obtus, selon qu'on devra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur dans l'équation précédente; à cause de $OP=r$, on aura donc toujours

$$\pm h=r\cos\delta;$$

et, au moyen de ces valeurs, l'équation (3) deviendra

$$\frac{d\omega}{dt}\int r^2\,dm=\int r\varphi\cos\delta\,dm.$$

Or, si les forces données n'agissent sur le mobile que pendant un temps très court; qu'elles soient néanmoins capables de produire, pendant cet intervalle de temps, des vitesses données qui ne soient pas très petites; et que pendant ce même temps les directions de ces forces, non plus que les positions des points du mobile, ne changent pas sensiblement, on aura, en intégrant par rapport à t les deux membres de cette équation,

$$\omega\int r^2\,dm=\int rv\cos\delta\,dm;$$

v étant l'intégrale $\int\varphi dt$ pendant la durée de l'action des forces, c'est-à-dire, la vitesse que la percussion exercée sur dm imprimerait à ce point matériel, s'il était entièrement libre. Cette équation est celle du mouvement uniforme de rotation, et l'on en déduira, sans difficulté, les formules du n° 386.

Dans le mouvement varié, l'équation (3) se change en une équation différentielle du second ordre, de laquelle dépend la position du mobile à chaque instant, et sa vitesse en fonction du temps, ainsi qu'on le verra tout à l'heure par un exemple; mais auparavant il convient de déterminer les pressions que l'axe de rotation éprouve pendant la durée du mouvement.

393. Je considérerai seulement les pressions perpendiculaires à cet axe Oz, qui sont dues aux composantes parallèles aux axes Ox et Oy, des forces perdues par tous les points du mobile, dont les résultantes devront couper l'axe fixe.

En appelant U et V les sommes de toutes ces forces, on aura, d'après le n° 391,

$$U = \int\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)dm, \quad V = \int\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)dm;$$

et si l'on désigne par u et v les distances des forces totales U et V au plan des x et y, on aura aussi (n° 54)

$$Uu = \int\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)x\,dm, \quad Vv = \int\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)x\,dm.$$

En vertu des valeurs précédentes de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega\frac{dy}{dt} = -y\frac{d\omega}{dt} - x\omega^2,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dx}{dt} = x\frac{d\omega}{dt} - y\omega^2.$$

J'élimine $\frac{d\omega}{dt}$ au moyen de l'équation (3); je désigne par x_1 et y_1 les valeurs de x et y qui répondent au centre de gravité du mobile, et par M sa masse, de sorte qu'on ait

$$\int x\,dm = Mx_1, \qquad \int y\,dm = My_1;$$

en substituant ensuite les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ dans les formules précédentes, elles deviennent

$$U = Mx_1\omega^2 + \int X\,dm + \frac{y_1\int(xY - yX)\,dm}{\int r^2\,dm},$$

$$V = My_1\omega^2 + \int Y\,dm - \frac{x_1\int(xY - yX)\,dm}{\int r^2\,dm},$$

$$Uu = \omega^2\int xx\,dm + \int xX\,dm + \frac{\int yx\,dm.\int(xY - yX)\,dm}{\int r^2\,dm},$$

$$Vv = \omega^2\int yx\,dm + \int xY\,dm - \frac{\int xx\,dm.\int(xY - yX)\,dm}{\int r^2\,dm},$$

Quand la vitesse angulaire ω sera connue, ces équations feront connaître les pressions U et V parallèles aux axes Ox et Oy, que l'axe Ox aura à supporter, et les distances u et v comprises entre le point O et les points d'application de U et V sur cet axe. Lorsque les forces X et Y sont nulles, ces résultats coïncident avec ceux du n° 389. Quand la droite Ox passe par le centre de gravité du mobile, on a $x_1 = 0$ et $y_1 = 0$, et, conséquemment,

$$U = \int X\,dm, \qquad Y = \int Y\,dm;$$

en sorte que la charge totale de l'axe fixe est la même que dans l'état d'équilibre; mais elle est, en général, autrement distribuée. Si l'axe fixe est, en outre, un des axes principaux qui se coupent au centre de gravité, on a aussi $\int xx\,dm = 0$ et $\int yx\,dm = 0$; il en résulte

$$Uu = \int xX\,dm; \qquad Vv = \int xY\,dm;$$

et la charge de l'axe se trouve partagée, dans l'état de mouvement, comme dans l'état d'équilibre.

394. Appliquons actuellement l'équation (3) au cas d'un corps pesant, tournant autour d'un axe horizontal.

Si l'on désigne par g la pesanteur, et qu'on suppose l'axe Oy vertical et dirigé dans le sens de cette force, on aura

$$X = 0, \qquad Y = g;$$

et, à cause de $\int x\,dm = Mx_1$, l'équation (3) se réduira à

$$\frac{d\omega}{dt}\int r^2\,dm = gMx_1. \qquad (4)$$

Au bout du temps t, désignons par θ l'angle compris entre le plan mobile qui passe par le centre de gravité du corps et le plan fixe des y et z; angle que nous regarderons comme positif ou comme négatif, selon que le plan mobile se trouvera, relativement au plan fixe, du côté de l'axe des x positives ou du côté opposé. Soit a la distance constante du centre de gravité à l'axe Oz; on aura

$$x_1 = a\sin\theta;$$

et, d'après le sens de la vitesse ω, positive ou négative, on aura aussi

$$\omega = -\frac{d\theta}{dt};$$

ce qu'on déduit également de l'équation (2), appliquée au centre de gravité, c'est-à-dire, aux valeurs $x\sin\theta$, $y\cos\theta$, a, de x, y, r. Soit enfin Mk^2 le moment d'inertie du corps par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à Oz; k sera une ligne de grandeur donnée; et, d'après le théorème du n° 374, nous aurons

$$\int r^2\,dm = M(a^2 + k^2),$$

pour le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Au moyen de ces valeurs de x_1, a, $\int r^2 dm$, l'équation (4) devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{ga\sin\theta}{a^2+k^2}$$

En multipliant par $2d\theta$, et intégrant, on aura donc

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{2ga\cos\theta}{a^2+k^2} = c\,;$$

c étant la constante arbitraire. Si l'on suppose qu'on ait, à l'origine du mouvement,

$$\theta = \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\Omega,$$

cette constante aura pour valeur

$$c = \Omega^2 - \frac{2ga\cos\alpha}{a^2+k^2}\,;$$

et il en résultera, à un instant quelconque,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{2ga(\cos\alpha - \cos\theta)}{a^2+k^2} = \Omega^2. \qquad (a)$$

Cette équation est celle du mouvement d'un pendule de forme quelconque, tournant autour d'un axe horizontal. Dans son état d'équilibre, le plan passant par son centre de gravité et par l'axe fixe est horizontal, et l'on a $\alpha = 0$, $\Omega = 0$, $\theta = 0$. On écarte le corps de cette position, de sorte que ces deux plans comprennent un angle donné α. Si on l'abandonne ensuite à lui-même, on aura $\Omega = 0$; si, au contraire, le mobile éprouve une percussion à l'origine de son mouvement, la vitesse initiale Ω devra être déterminée par les règles du n° 386, ou donnée d'une manière quelconque; et, dans tous les cas, l'équation (a) fera connaître la vitesse angulaire du mobile à un instant quelconque d'après la position de son centre de gravité. En la résolvant par rapport à dt, et intégrant, on aura la valeur de t en fonction de θ, ou réciproquement; ce qui déterminera la position variable de ce centre, et, par conséquent, celle du mobile à chaque instant.

395. Si ce corps pesant se réduit à un point matériel, attaché à l'axe Ox par un fil inextensible et inflexible, dont on néglige la masse, et qui soit perpendiculaire à Ox, on aura le cas du pendule simple, d'après la définition du n° 179. En appelant l sa longueur, on aura $a = l$; M sera la masse du point matériel; et le moment d'inertie M $(a^2 + k^2)$ devra se réduire au produit de cette masse et du carré de sa distance l à l'axe fixe. On aura donc $k = 0$; par conséquent, l'équation (a), appliquée à ce cas particulier, deviendra

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{2g}{l}(\cos\alpha - \cos\theta) = \Omega^2\,; \qquad (b)$$

et, en effet, il est aisé de vérifier qu'elle s'accorde avec l'équation (1) du n° 180, relative au mouvement du pendule simple.

En comparant les équations (a) et (b), on voit que ce mouvement coïncidera avec celui d'un pendule quelconque, toutes les fois que les coefficiens $\frac{2g}{l}$ et $\frac{2ga}{a^2+k^2}$, par lesquels ces deux équations diffèrent l'une de l'autre, seront égaux, c'est-à-dire, lorsqu'on aura

$$l = a + \frac{k^2}{a}. \qquad (c)$$

C'est donc d'après cette formule que l'on calculera, ainsi que nous l'avons annoncé dans le n° 179, la longueur du pendule simple, correspondant à un pendule donné; les deux quantités a et k qu'elle renferme pourront toujours se déterminer exactement, ou par approximation, au moyen des règles connues, quand on connaîtra la forme du pendule composé.

Lorsque ce pendule fera de très petites oscillations, il en sera de même à l'égard du pendule simple. Si l'on désigne par T la durée d'une oscillation entière, on aura donc (n° 182)

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad g = \frac{\pi^2 l}{T^2}.$$

En comptant, pendant un temps considérable, le nombre des oscillations du pendule composé, et divisant le temps total par ce nombre, on aura la valeur de T; et en la substituant, dans cette dernière formule, avec la valeur de l correspondante au pendule qu'on aura employé, on en conclura, comme nous l'avons déjà expliqué (n° 192), la mesure de la pesanteur g avec une extrême précision. Les longueurs du pendule simple étant entre elles comme les carrés des durées des petites oscillations, si l'on appelle λ la longueur du pendule à secondes, et qu'on prenne la seconde pour unité, on aura aussi

$$\lambda = \frac{l}{T^2},$$

pour calculer la valeur de λ d'après celles de l et T.

396. Si l'on trace dans l'intérieur du pendule composé, au-dessous de son centre de gravité et dans le plan de ce centre et de l'axe de rotation, une droite parallèle à cet axe, dont l soit la distance à ce même axe, le mouvement des points de cette parallèle ne sera ni accéléré ni retardé par leur liaison avec les autres points du corps. Parmi tous les points de cette droite, on appelle proprement *centre d'oscillation* le point situé sur la même perpendiculaire à l'axe que le centre de gravité.

Soient ABD (fig. 91) la section du pendule perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par son centre de gravité, G ce centre, et C le point où cette sec-

tion est coupée par l'axe ; prolongeons la droite CG jusqu'en O, de sorte qu'on ait

$$CG = a; \qquad GO = \frac{k^2}{a},$$

et, conséquemment,

$$CO = a + \frac{k^2}{a} = l.$$

Le point O sera le centre d'oscillation; et après avoir fait osciller le pendule donné autour de l'axe perpendiculaire à la section ABD et passant par le point C, si on le renverse et qu'on le fasse osciller de nouveau autour de l'axe passant par le point O et perpendiculaire à cette même section, le point C deviendra le centre d'oscillation; théorème que l'on énonce ordinairement en disant que les centres C et O de suspension et d'oscillation, sont réciproques l'un de l'autre.

En effet, dans les deux cas, le moment d'inertie Mk^2 est le même, puisqu'il se rapporte toujours à l'axe perpendiculaire à ABD et passant par le point G; en sorte que la quantité k^2 ne changera pas. De plus, soit O' le point du prolongement de OG qui sera le centre d'oscillation, quand O sera devenu le centre de suspension; en appelant l' la distance OO', sa valeur se déduira de la formule (c), en y mettant OG au lieu de CG, c'est-à-dire, $\frac{k^2}{a}$ au lieu de a; on aura donc

$$l' = \frac{k^2}{a} + a = l, \qquad OO' = CO;$$

et, conséquemment, le point O' coïncidera avec le point C.

397. La durée des oscillations très petites, autour des deux axes perpendiculaires à ABD et passant par les points C et O, est la même et égale à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; l étant toujours la distance CO. Réciproquement, si la durée des oscillations très petites est la même autour de deux axes parallèles, dont le plan contient le centre de gravité G, et qui n'en sont pas équidistans, leur distance mutuelle sera la longueur l du pendule simple qui oscille aussi dans le même temps.

En effet, soient a et a' les distances inégales du centre de gravité à ces deux droites parallèles, et, conséquemment, $a + a'$ leur distance mutuelle; soit aussi Mk^2 le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité. Puisque la durée des oscillations est la même autour des deux droites, il faudra qu'on ait

$$a' + \frac{k^2}{a'} = a + \frac{k^2}{a};$$

d'où l'on tire

$$a' = a \text{ ou } a' = \frac{k^2}{a};$$

donc, en rejetant la première valeur de a', nous aurons

$$a + a' = a + \frac{k^2}{a}.$$

Par conséquent, si l'on mesure la distance $a + a'$ des deux axes synchrones, on aura la longueur du pendule simple qui correspond à la durée commune de leurs oscillations.

Ce moyen a été employé avec succès, en Angleterre, pour déterminer la longueur du pendule simple, sans aucun calcul relatif à la forme du pendule composé *.

398. Il y a une infinité d'axes différens autour desquels les petites oscillations d'un même corps sont d'égale durée.

D'abord, il est évident que la valeur de l et la durée des oscillations seront les mêmes pour tous les axes de suspension parallèles entre eux et équidistans du centre de gravité, puisque, pour tous ces axes, les quantités k et a, comprises dans la formule (c), ne varient pas. On peut aussi changer la direction de ces axes et leur distance au centre de gravité, sans que la valeur de l soit changée; car si l'on appelle α, β, γ, les angles que la parallèle à l'axe de suspension, menée par le centre de gravité, fait avec les trois axes principaux qui se coupent en ce point, et que l'on désigne par A, B, C, les momens d'inertie relatifs à ces axes, et par Mk^2, comme précédemment, celui qui répond à la parallèle, on aura, d'après l'équation (c) du n° 375,

$$Mk^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

et, par conséquent,

$$l = a + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}{Ma}.$$

Or, on peut évidemment donner à a, α, β, γ, une infinité de valeurs différentes, pour lesquelles cette valeur de l restera la même.

Si l'on voulait que cette fonction l fût un *minimum* par rapport aux variables a, α, β, γ, il résulte de sa forme qu'en supposant A la plus petite des trois constantes A, B, C, il faudrait d'abord qu'on eût $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$, et, conséquemment,

$$l = \frac{Ma^2 + A}{Ma};$$

d'où l'on conclut, par la règle ordinaire $a = \sqrt{\frac{A}{M}}$ pour la valeur de a qui répond au *minimum*, et $l = 2\sqrt{\frac{A}{M}}$ pour ce *minimum*.

* *Transactions philosophiques*, année 1818.

399. Nous savons que la résistance d'un milieu n'influe pas sur la durée des petites oscillations du pendule simple, d'une longueur donnée (n° 190); mais il faut aussi prouver que cette force ne change pas non plus la longueur du pendule simple, dont le mouvement est le même dans l'air que celui d'un pendule donné, dans ce même fluide.

Or, pour déterminer ce mouvement, il faut joindre aux forces Xdm et Ydm, que renferme le second membre de l'équation (3), et qui agissent sur tous les points de la masse du mobile, les composantes de la résistance de l'air, exercée sur les élémens de sa surface. Supposons donc que cette résistance soit exprimée, généralement, par la somme de plusieurs puissances de la vitesse, et, pour une vitesse quelconque v, représentons-la, sur l'unité de surface, par

$$Av^{\alpha} + Av^{\alpha'} + Av^{\alpha''} + \text{etc.};$$

A, A', A'', etc., α, α', α'', etc., étant des constantes données. Soit ρ la distance d'un point M de la surface du pendule, à l'axe de rotation; sa vitesse, au bout du temps t, sera $\rho\omega$, en désignant toujours par ω la vitesse angulaire à cet instant. Si l'on appelle ι l'angle que fait sa direction avec la partie intérieure de la normale en ce point, on aura $\rho\omega \cos \iota$ pour sa composante suivant cette droite; et, d'après ce qu'on a dit précédemment (n° 365), c'est cette composante normale qu'il faudra employer pour la vitesse v, dans l'expression de la résistance qui répond au point M. En appelant $d\sigma$ l'élément différentiel de la surface, en ce même point, et $Rd\sigma$ la résistance exercée sur cet élément, on aura donc

$$R = A\rho^{\alpha}\omega^{\alpha}\cos^{\alpha}\iota + A'\rho'^{\alpha'}\omega^{\alpha'}\cos^{\alpha'}\iota + \text{etc.}$$

Je désigne par μ et ν les angles que fait la normale intérieure au point M, avec des parallèles aux axes des x et des y, menées par ce point; les composantes de la résistance suivant ces droites seront $R \cos \mu d\sigma$ et $R \cos \nu d\sigma$; et si l'on appelle x' et y' les valeurs de x et y qui répondent au point M, on aura

$$x'R \cos \nu d\sigma - y'R \cos \mu d\sigma,$$

pour la partie du second membre de l'équation (3), relative à l'élément $d\sigma$; par conséquent, en prenant l'intégrale de cette quantité dans toute la portion de la surface du mobile qui éprouve la résistance du milieu, on aura la quantité qu'on devra ajouter à ce second membre, pour avoir égard à cette résistance. Je fais, pour abréger,

$$x' \cos \nu - y' \cos \mu = \iota,$$

et cette quantité aura pour expression :

$$A\omega^{\alpha} \int \zeta\rho^{\alpha} \cos^{\alpha} \iota d\sigma + A'\omega^{\alpha'} \int \zeta\rho^{\alpha'} \cos^{\alpha'} \iota d\sigma + \text{etc.}$$

Il est visible que ζ est la longueur de la plus courte distance entre l'axe de suspension et la direction de la vitesse $\rho\omega$ du point M, comprise dans un plan perpendiculaire à cet axe; ζ ne dépend donc pas du temps, non plus que l'angle ι et le rayon ρ; par conséquent, si l'on fait

$$\int \zeta\rho^{\alpha} \cos^{\alpha} \iota d\sigma = \gamma, \int \zeta\rho^{\alpha'} \cos^{\alpha'} \iota d\sigma = \gamma', \text{etc.},$$

ces intégrales γ, γ', γ'', etc., seront des constantes dépendantes de la forme du corps, et dont les valeurs pourront être différentes dans deux oscillations consécutives. Pour déterminer leurs limites, on circonscrira au mobile, dans sa position d'équilibre, un cylindre perpendiculaire au plan vertical passant par l'axe fixe; la courbe de contact de ce cylindre avec la surface du corps divisera cette surface en deux parties, dont l'une éprouvera la résistance de l'air, pendant que le mobile se mouvra dans un sens, et l'autre, pendant qu'il se mouvra dans le sens opposé; ces intégrales devront donc s'étendre à l'une de ces deux parties pour une oscillation entière, et à l'autre partie pour l'oscillation suivante; et quand ces deux parties seront différentes, les valeurs de γ, γ', γ'', etc., le seront aussi dans deux oscillations consécutives. Ces valeurs ne changeront pas, dans le cas d'un mouvement révolutif.

Cela posé, après avoir ajouté la quantité précédente au second membre de l'équation (3), ou, ce qui est la même chose, après avoir retranché cette quantité divisée par le moment d'inertie $M(a^2 + k^2)$, de la valeur de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ du n° 394, nous aurons

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{ga \sin \theta}{a^2 + k^2} - \frac{A\gamma}{M(a^2 + k^2)}\omega^{\alpha} - \frac{A'\gamma'}{M(a^2 + k^2)}\omega^{\alpha'} - \text{etc.},$$

pour l'équation du mouvement d'un peudule quelconque dans un milieu résistant. On aura de même

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin \theta - B\omega^{\alpha} - B'\omega^{\alpha} - \text{etc.},$$

pour l'équation du mouvement du pendule simple dont la longueur est l; B, B', B'', etc., désignant des coefficiens constans.

Les vitesses et les positions initiales des deux mobiles étant supposées les mêmes, si l'on veut que leurs mouvemens le soient aussi, il suffira et il sera nécessaire de prendre

$$\frac{g}{l} = \frac{ga}{a^2 + k^2}, \quad B = \frac{A\gamma}{M(a^2 + k^2)}, \quad B' = \frac{A'\gamma'}{M(a^2 + k^2)}, \text{ etc.};$$

ce qui détermine la valeur de t, qui coïncidera avec la formule (c), et celles de B, B', B'', etc., pour toute la durée de chaque oscillation.

Ainsi, quelles que soient la forme d'un pendule et la loi de la résistance du milieu dans lequel il se meut, on voit qu'il y a toujours un pendule simple dont le mouvement est le même que celui du pendule donné; que la résistance du milieu dans lequel le pendule simple doit se mouvoir, se déduit de celle du milieu donné, et de la forme du pendule composé; et que la longueur du pendule simple ne dépend que de cette forme, et nullement de la résistance.

Toutefois, il n'en résulte pas que la longueur de ce pendule correspondant à un pendule donné, soit la même dans l'air et dans le vide : la perte de poids que le pendule composé éprouve dans l'air, et qui n'est pas la même dans l'état du mouvement que dans l'état de repos, influe sur la longueur du pendule simple, réduite au vide, ainsi que nous l'avons déjà dit (n° 191).

400. Pour déterminer le mouvement d'un treuil et de deux poids suspendus, l'un à la roue et l'autre au cylindre, on formera, comme dans le n° 391, la somme des momens des forces perdues à chaque instant par tout les points du treuil, puis on ajoutera à cette somme les momens des forces perdues dans le même instant par ces deux poids, et on égalera à zéro la somme totale de tous ces momens. Or, supposons qu'une corde soit enroulée sur la roue et attachée par un bout à un point de sa circonférence, et désignons par m la masse du corps suspendu verticalement à l'autre bout; soit aussi m' la masse du corps suspendu verticalement à l'extrémité d'une seconde corde enroulée sur le cylindre et attachée par l'autre extrémité à sa surface; au bout du temps t, si l'on appelle u et u' les distances des centres de gravité de m et m' au plan horizontal passant par l'axe du treuil, les forces perdues par ces masses pendant l'instant dt, seront $m\left(g - \frac{d^2u}{dt^2}\right)$ et $m'\left(g - \frac{d^2u'}{dt^2}\right)$; leurs momens par rapport à l'axe du treuil, se déduiront de ces forces en multipliant la première par le rayon de la roue que j'appellerai c, et la seconde par le rayon du cylindre que je désignerai par c'; et parce que ces forces tendent à faire tourner le treuil en sens contraire l'une de l'autre, il faudra donner le signe + au moment de l'une, et le signe — au moment de l'autre. Pour fixer les idées, je supposerai que ce soit la première force qui tende à faire tourner le treuil dans le sens où il tourne réellement, ou, autrement dit, je supposerai que ce soit la masse m qui descende et la masse m' qui s'élève. On en conclut que le second membre de l'équation (3) se trouvera augmenté de $gmc - gm'c'$, et son premier membre, de $m\frac{d^2u}{dt^2}c - m'\frac{d^2u'}{dt^2}c'$; d'ailleurs l'intégrale que contient le second membre sera zéro, parce qu'elle doit s'étendre à tous les points du treuil, dont le centre de gravité est sur l'axe de rotation; on aura donc

$$\frac{d\omega}{dt}\int r^2dm + mc\frac{d^2u}{dt^2} - m'c'\frac{d^2u'}{dt^2} = g(mc - m'c'),$$

pour l'équation du mouvement du treuil et des deux masses m et m'.

Pendant toute la durée de ce mouvement, la vitesse $\frac{du}{dt}$ de m est égale à la vitesse $c\omega$ du point de la roue où la corde commence à se détacher de sa circonférence, et dont le rayon est horizontal; la vitesse $\frac{du'}{dt}$ de m' est de même égale et contraire à la vitesse $c'\omega$ du point de la surface du cylindre, dont le rayon est aussi horizontal, et qui est situé de l'autre côté de l'axe : on a donc constamment

$$\frac{du}{dt} = c\omega, \quad \frac{du'}{dt} = -c'\omega;$$

au moyen de quoi, l'équation précédente devient

$$(Mk^2 + mc^2 + m'c'^2)\frac{d\omega}{dt} = g(mc - m'c'),$$

en désignant par M la masse du treuil, et par Mk^2 son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Si l'on suppose nulles, pour plus de simplicité, les vitesses initiales du treuil et des masses m et m', on aura, à un instant quelconque,

$$\omega = \frac{(mc - m'c')\,gt}{Mk^2 + mc^2 + m'c'^2};$$

et, sans aller plus loin, on voit que le mouvement du treuil sera uniformément accéléré.

Les tensions des cordes auxquelles les masses m et m' sont attachées, auront pour mesure les forces perdues par ces masses; en les désignant par T et T', on aura donc

$$T = m\left(g - \frac{d^2u}{dt^2}\right), \quad T' = m'\left(g - \frac{d^2u'}{dt^2}\right);$$

et si l'on appelle p, p', P, les poids de ces corps et du treuil, de sorte qu'on ait

$$p = mg, \quad p' = m'g, \quad p = Mg,$$

on conclura des équations précédentes

$$T = p - \frac{(pc - p'c')pc}{Pk^2 + pc^2 + p'c'^2}, \quad T' = p' + \frac{(pc - p'c')p'c'}{Pk^2 + pc^2 + p'c'^2}.$$

A cause que le poids p descend, ce qui suppose $pc > p'c'$, la tension T sera moindre que ce poids, qui serait sa valeur dans l'état d'équilibre, et la tension T' sera plus grande que p'.

Les pressions exercées sur l'axe du treuil par les forces centrifuges de ces différens points, se détruisent évidemment deux à deux, à cause de la symétrie de ce corps autour de cette droite. La charge totale que l'axe éprouvera pendant le mouvement, se composera donc seulement du poids du treuil et des tensions T et T'; de sorte qu'en appelant Π cette force verticale, on aura

$$\Pi = P + T + T'.$$

En substituant pour T et T' leurs valeurs, il en résultera

$$\Pi = P + p + p' - \frac{(pc - p'c')^2}{Pk^2 + pc^2 + p'c'^2};$$

ce qui montre que cette charge est toujours moindre que celle qui a lieu dans l'état d'équilibre, et qui est égale à $P + p + p'$.

401. On appliquera ces différentes formules à la machine d'*Athood*, en y faisant $c' = c$; et elles feront connaître toutes les circonstances du mouvement des deux poids inégaux p et p', dont l'un monte et l'autre descend dans cet appareil.

Si l'on appelle, par exemple, h la hauteur dont le poids p descend dans un temps donné θ, on aura la valeur de h en intégrant celle de du ou de $cadt$, depuis $t=0$ jusqu'à $t=\theta$; ce qui donne

$$h = \frac{\frac{1}{2}(p - p')c^2 g\theta^2}{Pk^2 + (p + p')c^2}.$$

Les poids P, p, p', ainsi que le rayon de la roue, sont donnés; la quantité k^2 peut être calculée d'après la forme de la roue; et l'on peut mesurer la hauteur h. Par conséquent, si le temps θ est donné par l'observation, cette formule fera connaître la valeur de g. Mais quelque soin qu'on apporte dans cette expérience, elle ne sera jamais susceptible d'une précision comparable à celle du pendule; car, dans celle-ci, la durée de chaque oscillation s'obtient en divisant le temps pendant lequel le pendule a oscillé, par le nombre très grand des oscillations qu'il a faites, ce qui rendra toujours l'erreur à craindre, sur la durée d'une seule oscillation, beaucoup moindre que l'erreur inévitable sur la mesure du temps θ dans la machine d'*Athood*.

On fait ici abstraction de la masse du fil auquel sont suspendus les deux poids p et p'; il serait facile d'y avoir égard de la même manière que dans le problème du n° 356; mais alors la loi du mouvement serait plus compliquée. On néglige aussi la résistance que l'air oppose aux mouvemens des deux poids p et p' : pour en atténuer l'effet, et aussi pour rendre le temps θ plus facile à mesurer, on ralentira ces mouvemens, en diminuant l'excès de l'un de ces poids sur l'autre.

402. On a aussi employé le pendule pour déterminer la vitesse des projectiles de l'artillerie. Cette machine est ce qu'on appelle le *pendule de Robins*, du nom de l'ingénieur qui en a le premier fait usage : elle consiste en une masse très considérable, retenue par un axe horizontal solidement fixé. Le boulet dont on veut connaître la vitesse, pénètre dans cette masse sans la traverser, et met le pendule en mouvement; on mesure la grandeur de l'arc que décrit un point déterminé de la masse totale; d'où l'on conclut facilement sa quantité de mouvement, et, conséquemment, la vitesse du boulet à l'instant où il a atteint le pendule.

Soient, en effet, AEBF (fig. 92) une section du pendule par un plan perpendiculaire à l'axe fixe et par son centre de gravité, G ce centre, O le centre d'oscillation (n° 396), C le point où cette section coupe l'axe, de sorte que CGO soit une droite verticale, dans l'état d'équilibre. Soient aussi B le point où le prolongement de cette droite rencontre la surface inférieure du pendule, BB' l'arc de cercle qui sera décrit par ce point B et dont C est le centre, E le centre de l'ouverture circulaire que le boulet fait à la surface du pendule, ou, plus généralement, la projection de ce point sur le plan de la section AEBF. Appelons μ la masse du boulet, v sa vitesse à l'instant du choc, f la perpendiculaire abaissée du point C sur la direction de v, projetée sur le plan de AEBF, M la masse du pendule et du boulet, a la distance du centre de gravité de M à l'axe fixe, $M(a^2 + k^2)$ son moment d'inertie par rapport à cet axe; nous aurons (n° 386)

$$\Omega = \frac{\mu v f}{M(a^2 + k^2)},$$

pour la valeur de Ω qu'il faudra substituer dans l'équation (a) du n° 394, dans laquelle on fera aussi $\alpha = 0$, puisque le pendule part de sa position d'équilibre. Il s'en écartera jusqu'à ce que la vitesse angulaire soit nulle; par conséquent, si l'on désigne par ζ l'angle BCB', on aura, d'après cette équation (a),

$$\frac{\mu^2 v^2 f^2}{M^2(a^2 + k^2)} = 2ga(1 - \cos\zeta);$$

g étant la gravité. En désignant par b la corde de l'arc BB', et par c le rayon CB, nous aurons

$$\cos\zeta = 1 - \frac{b^2}{2c^2}.$$

Je substitue cette valeur dans l'équation précédente, et j'en déduis ensuite celle de v^2; ce qui donne

$$v^2 = \frac{n^2 gab^2}{f^2 c^2}(a^2 + k^2);$$

n étant le rapport de M à μ, qui sera un très grand nombre donné.

Toutes les autres quantités contenues dans cette formule seront aussi connues. La distance c se mesure immédiatement; la corde b est donnée au moyen d'un ruban attaché au point B, et passant dans un anneau fixement attaché au terrain : la partie de ce ruban qui se déroule et traverse l'anneau pendant l'élévation du pendule, est effectivement égale à b. Si le tir est horizontal, la quantité f est la distance de l'axe de la pièce à l'axe de rotation; si le tir s'écarte un peu de l'horizontalité, auquel cas la droite qui va du point E à la bouche du canon n'est plus horizontale, il est facile de calculer, avec une approximation suffisante, la quantité qu'il faut ajouter à la distance des deux axes, ou qu'il en faut retrancher, pour avoir la valeur de f. Quant aux quantités a et k, on peut les calculer d'après la forme du pendule et les densités de ses parties; mais leurs valeurs s'obtiennent aussi par l'expérience.

On attache une corde à la partie inférieure du pendule; on fait passer cette corde sur une barre fixe, parallèle à l'axe de ce mobile, et élevée à la même hauteur, au-dessus du terrain; puis, à l'autre bout de la corde, on suspend un poids qui soulève le pendule jusqu'à ce que son centre de gravité se trouve au niveau de l'axe et de la barre. Dans cette position, si l'on appelle M' le poids suspendu à la corde, et a' la distance donnée de la barre à l'axe, on a cette proportion :

$$a : a' :: M' : M,$$

qui fait connaître la valeur de a.

Si l'on fait faire au pendule de petites oscillations, et qu'on appelle T la durée d'une oscillation entière, et l la distance du centre d'oscillation à l'axe de suspension, on aura (n° 395)

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad l = \frac{a^2 + k^2}{a};$$

d'où l'on tire

$$a^2 + k^2 = \frac{gT^2 a}{\pi^2},$$

et la valeur de k sera connue d'après celle de a. Au moyen de cette valeur de $a^2 + k^2$, on aura, plus simplement,

$$v = \frac{\pi g T a b}{\pi f c}, \qquad (a)$$

pour l'expression de la vitesse du boulet.

403. Si la bouche du canon n'est pas très éloignée du pendule, la valeur de v, donnée par cette formule différera peu de la vitesse de projection du boulet; et en supposant connu le coefficient de la résistance de l'air, il sera facile de calculer au moyen de la formule (5) du n° 212, la quantité dont on devra augmenter cette quantité v, pour avoir la vitesse de projection. Mais on obtiendra immédiatement la grandeur de cette dernière vitesse, en attachant fixement le canon au pendule : la quantité de mouvement imprimée au pendule, ainsi composé, sera alors la masse μ du boulet, multipliée par la vitesse du boulet à la bouche du canon, dont le *recul*, à raison de la compressibilité de la matière, ne commencera pas sensiblement avant que le projectile ait parcouru toute la longueur de la pièce; par conséquent, la valeur de v, donnée par la formule (a), sera celle de la vitesse de projection, sans aucune correction, et sans qu'on ait besoin de connaître le coefficient de la résistance.

En tirant successivement à différentes distances données du pendule, avec un même canon, chargé de la même manière, on aura autant de valeurs de v, dont les différences entre elles et avec celle que l'on obtient quand le canon fait partie du pendule, pourront servir à vérifier la loi de la résistance de l'air, sur laquelle est fondée la formule (5) du n° 212, et à déterminer le coefficient de cette résistance.

On a fait, en Angleterre, un grand nombre d'expériences au moyen du pendule de Robins, employé des deux manières que nous venons d'indiquer *. Une des conséquences les plus générales qu'on en a déduites, consiste en ce que, toutes choses d'ailleurs égales, les carrés des vitesses de projection sont à peu près entre eux comme les poids des charges, et que ce rapport approche d'autant plus d'être exact, que la longueur de la charge est moins considérable, relativement à celle du canon.

* *Nouvelles expériences d'Artillerie*, par Ch. Hutton; ouvrage traduit de l'anglais, la première partie par Villantroys, et la seconde par M. Terquem.

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

§ Ier. *Formules préliminaires.*

404. Considérons d'abord en lui-même, et indépendamment des forces qui le produisent, le mouvement de rotation d'un corps solide de figure quelconque, autour d'un point fixe appartenant à ce corps, ou qui y soit invariablement attaché.

Soient O (fig. 88) ce point; Ox, Oy, Oz, trois axes fixes et rectangulaires, choisis arbitrairement; Ox_1, Oy_1, Oz_1, trois autres axes rectangulaires, fixes dans le corps, et mobiles avec lui autour du point O. Dans la suite, nous supposerons que ces dernières droites sont les axes principaux du corps; mais maintenant leurs directions sont entièrement arbitraires. Soient aussi x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque M du corps, rapportées aux premiers axes, et x_1, y_1, z_1, ses coordonnées rapportées aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1. En conservant toutes les notations du nº 377, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1; \end{aligned}$$

et les neuf coefficiens a, b, etc., seront liés entre eux par les équations (2), ou par les équations (4), de ce numéro.

Il est évident que ces quantités a, b, etc., sont les mêmes, à chaque instant, pour tous les points du corps; mais elles varient pendant le mouvement, et l'on doit les considérer comme des fonctions du temps. Au contraire, les coordonnées x_1, y_1, z_1, varient d'un point à un autre du mobile; mais elles restent constamment les mêmes pour un même point, et ne varient pas avec le temps. En représentant donc le temps par t, et différentiant par rapport à cette variable, on aura

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1\frac{da}{dt} + y_1\frac{db}{dt} + z_1\frac{dc}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= x_1\frac{da'}{dt} + y_1\frac{db'}{dt} + z_1\frac{dc'}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= x_1\frac{da''}{dt} + y_1\frac{db''}{dt} + z_1\frac{dc''}{dt}. \end{aligned}$$

Ces valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, exprimeront, à un instant quelconque, les composantes parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, de la vitesse du point M. Si donc on veut connaître les points du corps dont la vitesse est nulle à cet instant, on les déterminera en égalant ces quantités à zéro; ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} x_1da + y_1db + z_1dc &= 0, \\ x_1da' + y_1db' + z_1dc' &= 0, \\ x_1da'' + y_1db'' + z_1dc'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Or, en ajoutant ces équations, après les avoir multipliées par c, c', c''; faisant, pour abréger,

$$cdb + c'db' + c''db'' = pdt, \quad cda + c'da' + c''da'' = -qdt;$$

et observant que l'équation $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$ donne $cdc + c'dc' + c''dc'' = 0$; il vient

$$py_1 - qx_1 = 0.$$

Si l'on ajoute ces mêmes équations (1), après les avoir multipliées par b, b', b'', on trouve

$$rx_1 - pz_1 = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$bda + b'da' + b''da'' = rdt,$$

et observant que l'équation $b^2 + b'^2 + b''^2 = 1$ donne $bdb + b'db' + b''db'' = 0$, et que, d'après l'équation $bc + b'c' + b''c'' = 0$ du nº 377, on a aussi

$$bdc + b'dc' + b''dc'' = -cdb - c'db' - c''db'' = -pdt.$$

Enfin, les équations (1) étant multipliées par a, a', a'', et ensuite ajoutées, il en résulte

$$qz_1 = ry_1 = 0;$$

car on a $ada + a'da' + a''da'' = 0$, à cause de $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$; et, de plus, les équations $ba + b'a' + b''a'' = 0$ et $ca + c'a' + c''a'' = 0$ du numéro cité donnent

$$adb + a'db' + a''db'' = -bda - b'da' - b''da'' = -rdt,$$

$$adc + a'dc' + a''dc'' = -cda - c'da' - c''da'' = qdt.$$

Au lieu des équations (1), nous aurons, de cette manière,

$$py_1 - qx_1 = 0,\ rx_1 - pz_1 = 0,\ qz_1 - ry_1 = 0. \quad (2)$$

Chacune de celles-ci est comprise dans les deux autres; et elles appartiennent à une droite passant par l'origine O des coordonnées.

Il suit donc de cette analyse que tous les points du corps, dont la vitesse est nulle à un instant quelconque, sont rangés sur une droite passant par le centre de rotation. Cette droite peut être regardée comme immobile pendant un instant infiniment petit; donc, pendant cet instant, le corps tourne autour de cette droite comme autour d'un axe fixe; et l'on doit se représenter le mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, comme ayant lieu, à chaque instant, autour d'un axe qui reste immobile pendant un intervalle de temps infiniment petit. En général, la position de cet axe dans l'intérieur du corps change, d'un instant à l'autre, pendant le mouvement; et, pour cette raison, on l'appelle l'*axe instantané de rotation*.

405. Supposons que la droite IOI′ soit cet axe au bout du temps t; les équations (2) seront celles de ses projections sur les trois plans des coordonnées x_1, y_1, z_1; d'où l'on conclut facilement

$$\left.\begin{aligned} \cos \mathrm{IO}x_1 &= \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos \mathrm{IO}y_1 &= \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos \mathrm{IO}z_1 &= \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Lors donc que les trois quantités p, q, r, seront connues, on pourra assigner la position de l'axe instantané, par rapport aux axes mobiles Ox_1, Oy_1 Oz_1; et, d'après le signe qu'on donnera au radical, la partie OI de cette droite, à laquelle ces formules appartiendront, sera complètement déterminée : dorénavant, nous regarderons toujours ce radical comme une quantité positive.

Toutes les fois que p, q, r, seront des constantes, l'axe de rotation restera fixe dans le corps, c'est-à-dire, qu'il le traversera constamment dans les mêmes points. Or, les points du corps dont la vitesse est nulle à chaque instant, étant toujours les mêmes, ils demeureront immobiles pendant toute la durée du mouvement; donc, dans ce cas, l'axe de rotation sera aussi une droite fixe dans l'espace.

D'après l'équation (2) du n° 9, et les notations du n° 377, on aura

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{IO}x &= a \cos \mathrm{IO}x_1 + b \cos \mathrm{IO}y_1 + c \cos \mathrm{IO}z_1, \\ \cos \mathrm{IO}y &= a' \cos \mathrm{IO}x_1 + b' \cos \mathrm{IO}y_1 + c' \cos \mathrm{IO}z_1, \\ \cos \mathrm{IO}z &= a'' \cos \mathrm{IO}x_1 + b'' \cos \mathrm{IO}y_1 + c'' \cos \mathrm{IO}z_1; \end{aligned}$$

en vertu des équations (3), on aura donc

$$\left.\begin{aligned} \cos \mathrm{IO}x &= \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos \mathrm{IO}y &= \frac{a'p + b'q + c'r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos \mathrm{IO}z &= \frac{a''p + b''q + c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

pour déterminer la direction de l'axe instantané, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz. Il en résulte que quand p, q, r, seront des quantités constantes, les numérateurs de ces formules devront aussi être indépendans de t; ce qu'on vérifiera effectivement, dans la suite.

406. Puisqu'à chaque instant le mouvement a lieu autour de la droite IOI′ comme autour d'un axe fixe, il en résulte que tous les points du corps ont, pendant un instant infiniment petit, une même vitesse angulaire autour de cet axe (n° 384). Pour en déterminer la valeur, considérons le point qui se trouve sur l'axe Oz_1, à une distance du point O égale à l'unité; nous aurons relativement à ce point, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$; sa vitesse absolue sera donc

$$\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}} = \sqrt{\frac{dc^2 + dc'^2 + dc''^2}{dt^2}},$$

d'après les valeurs précédentes de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; et l'on aura, pour sa distance à l'axe de rotation,

$$\sin IOx_{,} = \sqrt{1 - \cos^2 IOx_{,}} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}};$$

donc, en divisant la vitesse absolue par cette distance, nous aurons

$$\frac{\sqrt{dc^2 + dc'^2 + dc''^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}\, dt} \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

pour la vitesse angulaire. Or, nous avons

$$-pdt = bdc + b'dc' + b''dc'', \quad qdt = adc + a'dc' + a''dc'';$$

d'où l'on déduit, en ayant égard aux équations du n° 377,

$$(p^2 + q^2)\, dt^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2 - (cdc + c'dc' + c''dc'')^2;$$

quantité qui se réduit à $dc^2 + dc'^2 + dc''^2$, à cause de $cdc + c'dc' + c''dc'' = 0$. Donc, en appelant ω la vitesse angulaire au bout du temps t, et la considérant comme une quantité positive, on aura simplement

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

On voit que cette vitesse sera constante toutes les fois que la position de l'axe de rotation sera invariable; mais la proposition inverse n'est pas également vraie; et il est possible que l'axe instantané change de position, sans que la vitesse angulaire change de valeur, ou, autrement dit, il est possible que les quantités p, q, r, soient variables, et que la valeur de ω demeure constante.

407. On appelle p, q, r, les composantes rectangulaires de la vitesse de rotation ω autour des axes $Ox_{,}, Oy_{,}, Oz_{,}$; et l'on dit aussi que chacune de ces trois quantités est la vitesse angulaire du mobile autour de l'axe correspondant.

Or, les équations (3) peuvent être remplacées par

$$p = \omega \cos IOx_{,}, \quad q = \omega \cos IOy_{,}, \quad r = \omega \cos IOz_{,};$$

et l'on peut écrire les équations (4) sous cette forme :

$$\begin{aligned} \omega \cos IOx &= ap + bq + cr, \\ \omega \cos IOy &= a'p + b'q + c'r, \\ \omega \cos IOz &= a''p + b''q + c''r; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que la décomposition des vitesses de rotation suit les mêmes lois que celle des vitesses de translation, en remplaçant les directions de celles-ci par les directions des axes de rotation.

La résultante ω étant une quantité positive, et ayant pris la partie déterminé OI de la droite IOI' pour l'axe auquel elle se rapporte, les composantes p, q, r, dont les axes sont $Ox_{,}, Oy_{,}, Oz_{,}$ seront positives ou négatives, selon que ces droites feront des angles aigus ou obtus avec l'axe OI; et généralement, on devra regarder comme égales, mais de signes contraires, les composantes de ω rapportées aux deux parties d'une même droite, ou dont les axes seront le prolongement l'un de l'autre.

408. Non seulement on peut, au moyen des trois quantités p, q, r, déterminer la vitesse angulaire du corps et la position de son axe de rotation, par rapport aux axes mobiles $Ox_{,}, Oy_{,}, Oz_{,}$, mais on peut aussi exprimer les vitesses et les forces accélératrices de ses différens points, décomposées suivant ces trois axes; ce qui nous servira, comme on le verra bientôt, à trouver de la manière la plus directe, les équations de son mouvement de rotation.

En effet, les composantes de la vitesse du point M étant $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, il s'ensuit que les composantes de la même vitesse, par rapport aux axes $Ox_{,}, Oy_{,}, Oz_{,}$, seront

$$\begin{aligned} &a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}, \\ &b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt}, \\ &c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}, \end{aligned}$$

d'après les notations du n° 377, et parce que la composition des vitesses suit les mêmes lois que celle des forces. Or, en substituant dans ces expressions les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, du n° 404, et effectuant des réductions qu'on a déjà faites dans ce numéro, on trouve

$$\begin{aligned} a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} &= qz_{,} - ry_{,}, \\ b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} &= rx_{,} - pz_{,}, \\ c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} &= py_{,} - qx_{,}, \end{aligned}$$

par conséquent, les trois quantités $qz_{,} - ry_{,}$, $rx_{,} - pz_{,}$, $py_{,} - qx_{,}$, qui sont nulles pour tous les points du corps situés sur l'axe instantané de rotation, expriment, pour un autre point quelconque M, les composantes de sa vitesse, parallèles aux droites $Ox_{,}, Oy_{,}, Oz_{,}$.

On tire de ces dernières équations, en ayant égard à celles du n° 377,

$$\frac{dx}{dt} = a\,(qz_{,} - ry_{,}) + b\,(rx_{,} - pz_{,}) + c\,(py_{,} - qx_{,}),$$
$$\frac{dy}{dt} = a'\,(qz_{,} - ry_{,}) + b'\,(rx_{,} - pz_{,}) + c'\,(py_{,} - qx_{,}),$$
$$\frac{dz}{dt} = a''(qz_{,} - ry_{,}) + b''(rx_{,} - pz_{,}) + c''(py_{,} - qx_{,});$$

et en différentiant par rapport à t, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,(z_{,}dq - y_{,}dr) + b\,(x_{,}dr - z_{,}dp) + c\,(y_{,}dp - x_{,}dq)$$
$$+ (qz_{,} - ry_{,})\,da + (rx_{,} - pz_{,})\,db + (py_{,} - qx_{,})\,dc,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = a'\,(z_{,}dq - y_{,}dr) + b'\,(x_{,}dr - z_{,}dp) + c'\,(y_{,}dp - x_{,}dq)$$
$$+ (qz_{,} - ry_{,})\,da_{,} + (rx_{,} - pz_{,})\,db' + (py_{,} - qx_{,})\,dc',$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = a''\,(z_{,}dq - y_{,}dr) + b''(x_{,}dr - z_{,}dp) + c''(y_{,}dp - x_{,}dq)$$
$$+ (qz_{,} - ry_{,})\,da'' + (rx_{,} - pz_{,})\,db'' + (py_{,} - qx_{,})dc''.$$

Les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, sont les composantes parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz, de la force accélératrice du point M; si donc on désigne par $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ les composantes de la même force, parallèles aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, on aura

$$p_{,} = a\,\frac{d^2x}{dt^2} + a'\,\frac{d^2y}{dt^2} + a''\,\frac{d^2z}{dt^2},$$
$$q_{,} = b\,\frac{d^2x}{dt^2} + b'\,\frac{d^2y}{dt^2} + b''\,\frac{d^2z}{dt^2},$$
$$r_{,} = c\,\frac{d^2x}{dt^2} + c'\,\frac{d^2y}{dt^2} + c''\,\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Or, en substituant les valeurs précédentes de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, et faisant des réductions semblables à celles du n° 404, on trouve

$$p_{,}dt = z_{,}dq - y_{,}dr + (py_{,} - qx_{,})\,qdt + (pz_{,} - rx_{,})\,rdt,$$
$$q_{,}dt = x_{,}dr - z_{,}dp + (qz_{,} - ry_{,})\,rdt + (qx_{,} - py_{,})\,pdt,$$
$$r_{,}dt = y_{,}dp - x_{,}dq + (rx_{,} - pz_{,})\,pdt + (ry_{,} - qz_{,})\,qdt;$$

et en divisant par dt, on aura les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$, exprimées au moyen des variables p, q, r, et de leurs différentielles.

409. Si l'on considère à un instant quelconque les quantités de mouvement dont tous les points du corps sont animés, leur moment par rapport à chacun des trois axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ suivant la définition du n° 273, pourront encore s'exprimer au moyen des quantités p, q, r.

Pour le faire voir, soit dm l'élément différentiel de la masse du corps qui répond au point M, et dont les coordonnées sont $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; les composantes parallèles aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, de sa quantité de mouvement seront les produits des vitesses $qz_{,} - ry_{,}$, $rx_{,} - pz_{,}$, $py_{,} - qx_{,}$, multipliées par dm; en désignant par L, M, N, les momens par rapport aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, des quantités de mouvement de tous les points du corps, on aura donc, d'après ce qu'on a vu dans le n° 274,

$$\mathrm{L} = \int[(rx_{,} - pz_{,})x_{,} - (qz_{,} - ry_{,})y_{,}]dm,$$
$$\mathrm{M} = \int[(qz_{,} - ry_{,})z_{,} - (py_{,} - qx_{,})x_{,}]dm,$$
$$\mathrm{N} = \int[(py_{,} - qx_{,})y_{,} - (rx_{,} - pz_{,})z_{,}]dm;$$

les intégrales s'étendant à la masse entière du mobile. On simplifiera ces valeurs en prenant pour $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, les trois axes principaux du corps qui se coupent au point O; ce qui rendra nulles les trois intégrales $\int x_{,}y_{,}dm$, $\int z_{,}x_{,}dm$, $\int y_{,}z_{,}dm$; et en

désignant par A, B, C, les trois momens d'inertie principaux, de sorte qu'on ait

$$\int(y_1^2 + z_1^2)dm = A,$$
$$\int(z_1^2 + x_1^2)dm = B,$$
$$\int(x_1^2 + y_1^2)dm = C,$$

on aura simplement

$$L = Cr, \quad M = Bq, \quad N = Ap.$$

Les quantités r, q, p, auront donc constamment les mêmes signes que L, M, N; par conséquent, leurs signes dépendront du sens dans lequel le corps tournera autour de chacun des trois axes principaux : selon, par exemple, que le corps tournera, parallèlement au plan x_1Oy_1, de Ox_1 vers Oy_1, ou dans le sens opposé, le moment L (n° 274) et par suite la vitesse r, seront des quantités positives, ou des quantités négatives; et, réciproquement, le signe de r fera connaître, à chaque instant, le sens de rotation autour de Ox_1.

D'après les théorèmes du n° 281, si l'on désigne par G le moment principal des quantités de mouvement que nous considérons, on aura

$$G = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2};$$

en regardant ce radical comme une quantité positive; si la droite Om (fig. 93) est l'axe de ce moment, sa direction par rapport aux axes mobiles Ox_1, Oy_1, Oz_1, sera déterminée par les formules

$$\cos mOx_1 = \frac{Ap}{G}, \quad \cos mOy_1 = \frac{Bq}{G}, \quad \cos mOz_1 = \frac{Cr}{G}; \qquad (5)$$

et pour déterminer sa direction par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, on aura

$$\left.\begin{aligned} G\cos mOx &= Apa + Bqb + Crc, \\ G\cos mOy &= Apa' + Bqb' + Crc', \\ G\cos mOz &= Apa'' + Bqb'' + Crc''; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

équations dont les seconds membres sont les momens des quantités de mouvement du mobile par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz.

410. La position de ce mobile à chaque instant, par rapport aux axes fixes, dépend des trois angles ψ, θ, φ, du n° 378; car au moyen de ces angles, les trois sections du corps que l'on a prises pour les plans mobiles des coordonnées x_1, y_1, z_1, sont déterminées de position à l'égard de ces plans fixes; et il suffit même de connaître la position de deux sections non parallèles d'un corps solide, pour que les positions de tous les points de ce corps soient entièrement connues. D'ailleurs, quand les angles ψ, θ, φ, seront connus, les coefficiens a, b, etc., le seront aussi, et l'on connaîtra, par conséquent, les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque du mobile. Le problème du mouvement de rotation autour d'un point fixe se réduit donc, en dernière analyse, à déterminer en fonctions du temps, les valeurs de ψ, θ, φ. Or, quand les valeurs de p, q, r, sont connues, celles de ces trois angles dépendent de trois équations du premier ordre, que l'on obtiendra en substituant les valeurs de a, b, etc. (n° 378), en fonctions de ψ, θ, φ, et celles de leurs différentielles, dans les valeurs de pdt, qdt, rdt, savoir :

$$pdt = -bdc - b'dc' - b''dc'',$$
$$qdt = adc + a'dc' + a''dc'',$$
$$rdt = bda + b'da' + b''da''.$$

Les valeurs de c, c', c'', ne contenant pas l'angle φ, il s'ensuit que celles de pdt et qdt ne contiendront pas sa différentielle; et comme les valeurs de b, b', b'', se déduisent de celles de a, a', a'', en augmentant φ d'un angle droit, la valeur de $-pdt$ se déduira de même de celle de qdt. Le coefficient de $d\varphi$ sera l'unité dans la valeur de rdt; car, d'après les formules du n° 378, on a

$$\frac{da}{d\varphi} = b, \quad \frac{da'}{d\varphi} = b', \quad \frac{da''}{d\varphi} = b'';$$

d'où il résulte

$$b\frac{da}{d\varphi} + b'\frac{da'}{d\varphi} + b''\frac{da''}{d\varphi} = b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,$$

pour la valeur de ce coefficient. Toutes réductions faites, la substitution des valeurs de a, b, etc., dans celles de pdt, qdt, rdt, donne

$$\left.\begin{aligned} pdt &= \sin\varphi\sin\theta d\psi - \cos\varphi d\theta, \\ qdt &= \cos\varphi\sin\theta d\psi + \sin\varphi d\theta, \\ rdt &= d\varphi - \cos\theta d\psi. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

On peut remarquer que l'angle ψ n'entre pas dans ces formules; et, en effet, l'angle ψ ou NOx étant compté à partir d'un axe Ox entièrement arbitraire, les valeurs de p, q, r, ne doivent pas changer quand on augmente ou diminue cet angle d'une quantité constante.

Puisque r est la vitesse angulaire du mobile autour de l'axe Oz_1, il s'ensuit que rdt doit être l'angle décrit dans le plan des x_1 et y_1 pendant l'instant dt, par chacun des axes Ox_1 et Oy_1; cet angle serait $d\varphi$, si la droite ON, à partir de laquelle on compte l'angle φ dans ce même plan, était immobile; mais dans l'instant dt, l'angle NOx augmente de $d\psi$, dont la projection est $\cos\theta d\psi$ sur le plan des x_1 et y_1; et, selon que l'angle θ est aigu ou obtus, il est aisé de voir que la différentielle $d\varphi$ doit être diminuée ou augmentée de cette projection, pour avoir le déplacement de Ox_1 ou Oy_1, par rapport à une droite fixe dans le plan de ces axes. Par conséquent on aura, dans tous les cas, $rdt = d\varphi - \cos\theta d\psi$, comme on vient de le trouver.

411. Il existe entre les cosinus a, b, etc., et les quantités p, q, r, des relations qui peuvent être utiles dans beaucoup d'occasions, et qui sont exprimées par les équations différentielles

$$\left.\begin{array}{lll} dc = (aq - bp)\,dt, & dc' = (a'q - b'p)\,dt, & dc'' = (a''q - b''p)\,dt, \\ db = (cp - ar)\,dt, & db' = (c'p - a'r)\,dt, & db'' = (c''p - a''r)\,dt, \\ da = (br - cq)\,dt, & da' = (b'r - c'q)\,dt, & da'' = (b''r - c''q)\,dt. \end{array}\right\} \quad (8)$$

On obtient les trois premières de ces équations, en ajoutant les équations

$$\begin{aligned} adc + a'dc' + a''dc'' &= qdt, \\ bdc + b'dc' + b''dc'' &= -pdt, \\ cdc + c'dc' + c''dc'' &= 0, \end{aligned}$$

après les avoir multipliées respectivement, soit par a, b, c, soit par a', b', c', soit par a'', b'', c'', et en ayant égard aux équations du n° 377. On obtient les trois suivantes, en opérant d'une manière analogue sur les équations

$$\begin{aligned} cdb + c'db' + c''db'' &= pdt, \\ adb + a'db' + a''db'' &= -rdt, \\ bdb + b'db' + b''db'' &= 0; \end{aligned}$$

et en opérant de même sur les équations

$$\begin{aligned} bda + b'da' + b''da'' &= rdt, \\ cda + c'da' + c''da'' &= -qdt, \\ ada + a'da' + a''da'' &= 0, \end{aligned}$$

on parvient aux trois dernières équations (8).

On a encore les équations

$$\begin{aligned} pda + qdb + cdr &= 0, \\ pda' + qdb' + cdr' &= 0, \\ pda'' + qdb'' + cdr'' &= 0, \end{aligned}$$

qui sont une conséquence immédiate des neuf équations (8), et qui servent à vérifier l'invariabilité des numérateurs des formules (4), lorsque p, q, r, sont des quantités constantes.

§ II. *Équations du mouvement de rotation autour d'un point fixe.*

412. Tout ce qui précède étant établi, supposons maintenant que des forces motrices données agissent sur tous les élémens du mobile, et cherchons, en ayant égard à ces forces, les équations différentielles de son mouvement autour du point fixe O.

Au bout du temps t quelconque, désignons par $X_i dm$, $Y_i dm$, $Z_i dm$, les trois composantes parallèles aux axes principaux Ox_i, Oy_i, Oz_i, de la force motrice de l'élément dm. Si ce point matériel était libre, ces forces lui imprimeraient, dans l'instant dt, suivant leurs directions, les vitesses $X_i dt$, $Y_i dt$, $Z_i dt$. Les accroissemens de vitesse qu'il reçoit réellement, suivant ces directions, sont les quantités $p_i dt$, $q_i dt$, $r_i dt$, du n° 408 ; les composantes de la force perdue par l'élément dm, pendant l'instant dt, sont donc

$$(X_i - p_i)\,dm, \quad (Y_i - q_i)\,dm, \quad (Z_i - r_i)\,dm.$$

Le corps sera donc en équilibre (n° 350), en supposant tous ses élémens sollicités par de semblables forces. Or, les équations d'équilibre d'un corps solide, autour d'un point fixe, sont au nombre de trois (n° 266), qui seront, relativement à ces forces,

$$\begin{aligned} \int[Y_i - q_i)\,z_i - (X_i - p_i)\,y_i]\,dm &= 0, \\ \int[X_i - p_i)\,z_i - (Z_i - r_i)\,x_i]\,dm &= 0, \\ \int[Z_i - r_i)\,y_i - (Y_i - q_i)\,x_i]\,dm &= 0; \end{aligned}$$

les intégrales s'étendant à la masse entière du mobile.

La considération des axes principaux simplifie les termes résultant de la substitution des valeurs de p_i, q_i, r_i, sous les signes $\int$. En observant qu'alors les intégrales $\int x_i y_i dm$, $\int x_i z_i dm$, $\int y_i z_i dm$, sont nulles, et désignant par A, B, C, les trois momens d'inertie principaux du mobile, de sorte que A, B, C, représentent les mêmes intégrales que dans le n° 409, et qu'on ait, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int(x_i^2 - y_i^2)\,dm &= B - A, \\ \int(z_i^2 - x_i^2)\,dm &= A - C, \\ \int(y_i^2 - z_i^2)\,dm &= C - B, \end{aligned}$$

les trois équations précédentes deviendront

$$\left.\begin{array}{l} Cdr + (B - A)\,pqdt = Rdt, \\ Bdq + (A - C)\,rpdt = Qdt, \\ Adp + (C - B)\,qrdt = Pdt, \end{array}\right\} \quad (a)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} \int(x_i Y_i - y_i X_i)\,dm &= R, \\ \int(z_i X_i - x_i Z_i)\,dm &= Q, \\ \int(y_i Z_i - z_i Y_i)\,dm &= P. \end{aligned}$$

413. Les composantes X_i, Y_i, Z_i, étant celles des forces données, suivant les axes mobiles Ox_i, Oy_i, Oz_i, leurs valeurs dépendront de la direction de ces droites dans l'espace, ou des trois angles ψ, θ, φ ; les quantités P, Q, R, seront donc des fonctions de ψ, θ, φ, données dans chaque cas particulier ; par conséquent, le problème du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, conduit à six équations différentielles du premier ordre, entre les six inconnues p, q, r, ψ, θ, φ, et la variable t, savoir, les trois équations (a), jointes aux trois équations (7) du n° 410. En éliminant, dans les premières équations, les trois inconnues p, q, r, au moyen des dernières équations, on obtiendrait trois équations différentielles du second ordre, relatives à ψ, θ, φ, qui sont les inconnues définitives du problème ; mais il vaut mieux conserver les six équations du premier ordre.

Nous nous bornerons à considérer le cas ou la pesanteur est la seule force qui agisse sur les points du mobile. Prenons, dans ce cas, l'axe Oz vertical et dirigé dans le sens de cette force constante que nous représenterons par g; ses trois composantes suivant les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ seront

$$X_{,} = ga'', \quad Y_{,} = gb'', \quad Z_{,} = gc'',$$

à cause de (n° 377)

$$a'' = \cos zOx_{,}, \quad b'' = \cos zOy_{,}, \quad c'' \cos zOz_{,};$$

et si l'on désigne par M la masse du mobile, et par α, β, γ, les trois coordonnées constantes de son centre de gravité, par rapport à ces axes mobiles, de sorte qu'on ait

$$\int x_{,}dm = M\alpha, \quad \int y_{,}dm = M\beta, \quad \int z_{,}dm = M\gamma,$$

il en résultera

$$\begin{aligned} R &= (\alpha b'' - \beta a'')\, Mg, \\ Q &= (\gamma a'' - \alpha c'')\, Mg, \\ P &= (\beta c'' - \gamma b'')\, Mg. \end{aligned}$$

Les équations (a) deviendront donc

$$\left.\begin{aligned} Cdr + (B - A)\, pqdt &= (\alpha b'' - \beta a'')\, Mgdt, \\ Bdq + (A - C)\, rpdt &= (\gamma a'' - \alpha c'')\, Mgdt, \\ Adp + (C - B)\, qrdt &= (\beta c'' - \gamma b'')\, Mgdt, \end{aligned}\right\} (b)$$

auxquelles il faudra joindre les équations (7) et celles-ci (n° 378) :

$$a'' = -\sin\theta \sin\varphi, \quad b'' = -\sin\theta\cos\varphi, \quad c'' = \cos\theta. \qquad (c)$$

414. On parvient facilement à intégrer les équations (b), lorsque leurs seconds membres sont nuls; ce qui a lieu quand on fait abstraction de la pesanteur, ou bien, lorsque le point fixe O est le centre de gravité du mobile, et où l'on a, conséquemment, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Les équations (b) se réduisent alors à

$$\left.\begin{aligned} Cdr + (B - A)\, pqdt &= 0, \\ Bdq + (A - C)\, rpdt &= 0, \\ Adp + (C - B)\, qrdt &= 0, \end{aligned}\right\} (d)$$

Or, si on les multiplie par r, q, p, et qu'on les ajoute, il vient,

$$Crdr + Bqdq + Apdp = 0;$$

et, en intégrant, on a

$$Cr^2 + Bq^2 + Ap^2 = k; \qquad (e)$$

k étant une constante arbitraire. Si l'on ajoute ces mêmes équations, après les avoir multipliées par Cr, Bq, Ap, il en résulte

$$C^2\, rdr + B^2\, qdq + A^2\, pdp = 0;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$C^2 r^2 + B^2 q^2 + A^2 p^2 = k^2; \qquad (f)$$

k^2 étant une seconde constante arbitraire, qui ne peut être qu'une quantité positive, ainsi que la première.

Ces équations (e) et (f) donnent

$$p^2 = \frac{k^2 - Bk + (B - C)\, Cr^2}{(A - B)\, A}, \quad q^2 = \frac{k^2 - Ak + (A - C)\, Cr^2}{(B - A)\, B}.$$

En substituant les valeurs de p et q dans la première équation (d), et la résolvant ensuite par rapport à dt, on a

$$dt = \frac{\pm\sqrt{AB}.\ Cdr}{[k^2 - Bk + (B - C)\, Cr^2]^{\frac{1}{2}}\, [Ak - k^2 + (C - A)\, Cr^2]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (g)$$

On regardera le dénominateur comme une quantité constamment positive : et l'on prendra, au numérateur, le signe $+$ ou le signe $-$, selon que la différentielle dr sera positive ou négative, afin que le temps soit toujours croissant, et sa différentielle toujours positive.

En intégrant cette formule (g), on aura la valeur de t en fonction de r; d'où l'on conclura, réciproquement, la valeur de r en fonction de t : les valeurs des trois quantités p, q, r, peuvent donc être censées connues en fonctions de cette variable, ou du moins elles ne dépendent plus que d'une seule intégrale, qui se réduira toujours aux fonctions elliptiques *.

On obtiendra cette intégrale sous forme finie, sans le secours de ces fonctions, lorsque deux des trois momens d'inertie A, B, C, seront égaux, ou lorsque la constante k^2 sera égale à l'une des trois quantités Ak, Bk, Ck.

415. Si l'on examine avec attention la forme des équations (d), et qu'on ait égard aux formules (8) du n° 411, on parvient à découvrir d'autres équations immédiatement intégrales.

En effet, j'ajoute les équations (d), après les avoir multipliées par c, b, a; ce qui donne

$$[cdr + (aq - bp)\, rdt]\, C + [bdq + (cp - ar)\, qdt]\, B + [adp + (br - cq)\, pdt]\, A = 0,$$

ou bien, en vertu des trois premières formules (8),

$$Cd.\ cr + Bd.\ bq + Ad.\ ap = 0.$$

* *Voyez*, sur ce point, le premier volume de la *Théorie des fonctions elliptiques*.

On trouvera semblablement

$$Cd.\ c'r + Bd.\ b'q + Ad.\ a'p = 0,$$
$$Cd.\ c''r + Bd.\ b''q + Ad.\ a''p = 0.$$

En intégrant, on aura donc

$$\left.\begin{aligned} Crc + Bqb + Apa &= l, \\ Crc' + Bqb' + Apa' &= l', \\ Crc'' + Bqb'' + Apa'' &= l'', \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

l, l', l'', étant des constantes arbitraires.

Ces trois intégrales ne sont pas des équations distinctes entre elles ; car si l'on ajoute leurs carrés, on trouve, en ayant égard aux équations du n° 377,

$$C^2 r^2 + B^2 q^2 + A^2 p^2 = l^2 + l'^2 + l''^2 ;$$

résultat qui rentre dans l'équation (f), et d'où l'on conclut, entre les constantes k, l, l', l'', la relation

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = k^2 .$$

Si l'on substitue dans ces équations (h), à la place de a, b, etc., leurs valeurs en fonctions de ψ, θ, φ (n° 378), on obtiendra trois équations entre les six variables ψ, θ, φ, p, q, r, et les constantes arbitraires l, l', l'', qui devront être des intégrales des équations (7) du n° 410 ; et c'est en effet, ce qu'il est aisé de vérifier. Comme ces trois intégrales n'équivalent qu'à deux équations réellement distinctes, il s'ensuit qu'il doit exister une troisième intégrale des équations (7); mais avant de la chercher il est nécessaire de voir ce que signifient les équations (h).

416. D'après ce qu'on a vu dans le n° 409, elles montrent que les momens des quantités de mouvement de tous les points du mobile, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, sont constans et égaux à l, l', l'', pendant toute la durée du mouvement. En les comparant aux formules (6) de ce numéro, et observant qu'en vertu de l'équation (f), le moment principal G est égal à la constante k, regardée comme positive, on aura

$$\cos mOx = \frac{l}{k},\ \cos mOy = \frac{l'}{k},\ \cos mOz = \frac{l''}{k},$$

pour déterminer la direction de l'axe Om de ce moment, qui demeurera immobile, ainsi que le plan perpendiculaire à cette droite. La position de l'axe Om changera par rapport aux axes mobiles $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$; mais on la retrouvera, à chaque instant, au moyen des formules (5) du n° 409, dans lesquelles on peut supposer connues les quantités p, q, r. On pourra donc assigner, à un instant quelconque, le point où cette droite rencontre la surface du mobile, et la trace, sur cette surface, de la section du plan mobile perpendiculaire à cette droite.

Ainsi, lorsqu'un corps solide tourne autour d'un point fixe, en vertu d'une ou plusieurs impulsions primitives, sans qu'aucune force motrice agisse sur ses points, il existe un plan passant par le point fixe, qui demeure invariable pendant le mouvement, et dont on peut déterminer la position, à chaque instant, par rapport aux plans mobiles des axes principaux du corps.

Nous aurons occasion, dans la suite, de généraliser ce théorème ; maintenant, il va nous servir à trouver la troisième intégrale des équations (7).

417. L'axe Om étant immobile, nous pouvons le prendre pour l'axe fixe Oz, dont la direction est arbitraire ; nous aurons alors

$$\cos mOx_{,} = \cos zOx_{,} = a'',$$
$$\cos mOy_{,} = \cos zOy_{,} = b'',$$
$$\cos mOz_{,} = \cos zOz_{,} = c'',$$

A cause de $G = k$ et des formules (5) du n° 409, il en résultera

$$a'' = \frac{Ap}{k},\quad b'' = \frac{Bq}{k},\quad c'' = \frac{Cr}{k};$$

les équations (c) deviendront donc

$$\sin\theta \sin\varphi = -\frac{Ap}{k},\quad \sin\theta\cos\varphi = -\frac{Bq}{k},\quad \cos\theta = \frac{Cr}{k}; \qquad (i)$$

elles s'accorderont entre elles, en vertu de l'équation (f), et serviront à déterminer les angles φ et θ, en fonctions du temps, d'après les valeurs de p, q, r.

Maintenant, si l'on élimine $d\theta$ entre les deux premières équations (7) du n° 410, on aura

$$\sin^2\theta d\psi = \sin\theta \sin\varphi\, pdt + \sin\theta\cos\varphi\, qdt ;$$

d'où l'on tire, en vertu des équations précédentes,

$$d\psi = -\frac{Ap^2 + Bq^2}{k^2 - C^2 r^2}\, kdt;$$

donc, à cause de l'équation (e), on aura

$$d\psi = -\frac{h - Cr^2}{k^2 - C^2 r^2}\, kdt; \qquad (k)$$

et en substituant la formule (g) à la place de dt, il en résultera une valeur de $d\psi$, dont l'intégration se réduira aussi aux fonctions elliptiques, et qui s'obtiendra sous forme finie dans les mêmes cas que l'intégrale de dt. De cette manière, on connaîtra donc la valeur du troisième angle ψ en fonction de r, et, par conséquent, en fonction de t.

Les quantités $h - Cr^2$ et $k^2 - C^2 r^2$ étant positives, en vertu des équations (e) et (f), et k étant aussi une quantité positive, il en résulte que la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$ sera toujours négative, et que le mouvement de la droite ON aura constamment lieu dans le même sens. A cause que l'angle ψ est compté dans le sens indiqué par la flèche i_s (n° 378),

ce mouvement se fera en sens contraire, c'est-à-dire de l'axe Ox vers l'axe Oy ; sa direction constante dépendra donc du sens de l'axe Oy, que nous déterminerons tout à l'heure.

418. Les valeurs des six variables $p, q, r, \psi, \theta, \varphi$, résultant de notre analyse, seront des fonctions du temps, qui contiendront, en outre, quatre constantes arbitraires, savoir, k, h, et les deux constantes qui seront introduites par l'intégration des formules (g) et (k). Les intégrales complètes des équations (7) et (d), dont ces valeurs dépendent, devraient renfermer six constantes arbitraires; mais le choix que nous venons de faire, de l'axe Om du moment principal, pour l'un des axes des coordonnées x, y, z, a fait disparaître deux de ces constantes; car, Om coïncidant avec Oz, les angles mOx et mOy sont droits, et, d'après les formules du n° 416, il en résulte $\delta=0$ et $\delta'=0$. Nous n'avons donc plus, pour achever la solution complète du problème, qu'à déterminer, au moyen des données initiales du mouvement, les quatre constantes restantes, et les parties des droites passant par le point O, auxquelles répondent les angles variables, pendant toute la durée du mouvement.

Pour cela, supposons que le mobile dont on considère le mouvement de rotation, soit formé, comme dans le n° 386, de deux corps, dont l'un était en repos et retenu par le point fixe O, et dont l'autre, animé d'une vitesse donnée, est venu frapper le premier, et s'y attacher. Soient μ la masse du corps choquant, v la vitesse commune à tous ses points avant le choc, FE la direction initiale de son centre de gravité, HEK la section du mobile par le plan de cette droite FE et du point O, et f la longueur de la perpendiculaire OL, abaissée de ce point sur cette droite. La percussion qui a produit le mouvement de rotation sera dirigée suivant FE, et égale à μv. D'après le principe du n° 353, si l'on prend en sens contraire de leurs directions les quantités de mouvement de tous les points du mobile, qui auront lieu immédiatement après le choc, l'équilibre devra exister entre ces quantités de mouvement finies et la force μv prise dans sa direction ; or, pour cet équilibre, il faudra (n° 282) que le moment μvf de cette force soit égal au moment principal de ces quantités de mouvement, et que les axes de ces deux momens soient dans le prolongement l'un de l'autre. Puisque ce moment principal, qu'on a appelé G, est constamment égal à k (n° 416), on aura donc d'abord

$$k = \mu vf,$$

pour la valeur de cette constante positive.

De plus, si l'on mène par le point O l'axe du moment μvf, perpendiculaire à la section donnée EHK du mobile, cette droite sera aussi l'axe du moment principal, que nous avons pris pour l'axe Oz; les directions $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, des trois axes principaux du mobile, seront également données à l'origine du mouvement; les angles que font ces droites avec Oz seront donc connus ; et d'après le numéro précédent, nous aurons

$$p = \frac{k \cos zOx_{,}}{A}, \quad q = \frac{k \cos zOy_{,}}{B}, \quad r = \frac{k \cos zOz_{,}}{C}, \qquad (l)$$

pour les valeurs initiales de p, q, r. En les substituant dans l'équation (e), on aura la valeur de la constante h.

On prendra arbitrairement pour les droites $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, les parties qu'on voudra des axes principaux du mobile qui se coupent au point O; mais après les avoir choisies, et avoir fixé les points de la surface du mobile où ces portions de droites viennent aboutir, elles ne devront plus changer pendant le mouvement.

Le sens de la percussion exercée sur le mobile, suivant la direction FE, déterminera celui de la rotation autour de chacun des axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, à l'origine du mouvement, et, par conséquent, les signes des valeurs initiales de p, q, r (n° 409). On saura donc aussi, d'après les équations précédentes, si les angles $zOx_{,}$, $zOy_{,}$, $zOz_{,}$ sont d'abord aigus ou obtus; et il suffira d'avoir égard à l'un de ces angles, plus petit ou plus grand que 90°, pour déterminer la partie de la perpendiculaire au plan de la section HEK, qu'on devra prendre pour l'axe Oz ou Om, et qui sera, pendant toute la durée du mouvement, l'axe du moment principal des quantités de mouvemens de tous les points du mobile.

L'intersection NON' du plan de la section HEK et du plan des axes $Ox_{,}$ et $Oy_{,}$, sera aussi connue, à l'origine du mouvement. Pour connaître la partie ON de cette droite, à laquelle répondent constamment les angles ψ et φ, il suffira donc de savoir si, à cette époque, φ ou $NOx_{,}$ est un angle aigu, ou un angle aigu augmenté de 190°; et comme on a

$$\cos zOx_{,} = -\sin\theta \sin\varphi, \quad \cos zOy_{,} = -\sin\theta \cos\varphi,$$

il suffira d'avoir égard au signe de l'un de ces cosinus, ou de la valeur initiale d'une des quantités p et q.

La droite fixe Ox est entièrement arbitraire dans le plan de la section HEK. Pour plus de simplicité, je supposerai qu'elle coïncide avec la position initiale de ON. En faisant $\psi=0$ dans les valeurs de a', b', c', du n° 378, on aura, à l'origine du mouvement,

$$\cos yOx_{,} = \cos\theta \sin\varphi, \quad \cos yOy_{,} = \cos\theta \cos\varphi, \quad \cos yOz_{,} = \sin\theta.$$

Connaissant les valeurs initiales des angles θ et φ, aigus ou obtus, il suffira donc de considérer le signe de $\cos yOx_{,}$ ou $\cos yOy_{,}$, pour connaître la partie de la perpendiculaire à Ox ou ON, qu'on devra prendre pour l'axe fixe Oy, et, par conséquent, le sens de la vitesse $\frac{d\psi}{dt}$, qui aura lieu de ON vers Oy, et restera le même pendant tout le mouvement.

Toutes choses restant d'ailleurs les mêmes, si le sens du choc primitif est seul changé, les valeurs initiales de p, q, r, changeront toutes trois de signe; en supposant que les angles primitifs θ et φ fussent aigus avant ce changement, ils deviendront $\pi - \theta$ et $\pi + \varphi$; et les droites Oz et ON se changeront dans leurs prolongemens. En mettant $\pi - \theta$ et $\pi + \varphi$ au lieu de θ et φ dans les équations précédentes, il n'en résultera aucun changement pour les valeurs initiales des angles $yOx_{,}$, $yOy_{,}$, $yOz_{,}$. La droite Oy restera donc la même; mais la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt}$ étant toujours négative et dirigée de Ox vers Oy, et Oz coïncidant actuellement avec ON', le sens de cette vitesse aura changé avec celui de la percussion primitive.

Enfin, on déterminera les constantes arbitraires qui seront ajoutées aux intégrales des formules (g) et (k), de manière qu'on ait $t = 0$ et $\psi = 0$, à l'origine du mouvement, c'est-à-dire, pour la valeur initiale et donnée de r.

419. Maintenant, nous ferons remarquer quelques propriétés générales du mouvement que nous venons de déterminer.

1° D'après les formules du n° 408, le carré de la vitesse de l'élément dm du mobile, à un instant quelconque, a pour expression

$$(qz_{,} - ry_{,})^2 + (rx_{,} - pz_{,})^2 + (py_{,} - qx_{,})^2 .$$

En multipliant cette quantité par dm, on aura la force vive de ce point matériel (n° 361); et en intégrant ensuite, dans toute l'étendue de la masse du corps, on obtiendra la somme des forces vives dont il est animé au bout du temps t. Or, en supprimant les termes multipliés par $\int x_{,}y_{,}dm$, $\int z_{,}x_{,}dm$, $\int y_{,}z_{,}dm$, à cause que les coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, sont rapportées à des axes principaux, et ayant égard aux valeurs des momens d'inertie A, B, C, on a, pour cette somme,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 ;$$

donc, en vertu de l'équation (e), la somme des forces vives de tous les points du mobile est constante pendant le mouvement.

2° Si l'on appelle ϖ la vitesse angulaire autour de l'axe du moment principal, qui coïncide constamment avec Oz, cette composante de la vitesse ω, relative à l'axe instantané, se déduira de celle-ci, en la multipliant par le cosinus de l'angle que fait l'axe instantané avec l'axe Oz; d'après le n° 407, on aura donc

$$\varpi = a''p + b''q + c''r ;$$

et si l'on substitue pour a'', b'', c'', leurs valeurs trouvées dans le n° 417, et qu'on ait égard à l'équation (e), il en résultera

$$\varpi = \frac{h}{k}.$$

La vitesse angulaire du mobile, parallèlement au plan dans lequel la percussion primitive a eu lieu, est donc constante et égale à la somme des forces vives de tous les points du corps, divisée par le moment de cette percussion par rapport au centre fixe.

3° Soient x', y', z', les coordonnées d'un point quelconque de l'axe instantané, rapportées aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, et u la distance de ce point à leur origine O. En observant que $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$, sont les cosinus des angles que font ces droites avec l'axe instantané (n° 407), on aura

$$x' = \frac{pu}{\omega}, \quad y' = \frac{qu}{\omega}, \quad z' = \frac{ru}{\omega};$$

si donc on multiplie les équations (e) et (f) par $\frac{u^2}{\omega^2}$, elles deviendront

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = \frac{hu^2}{\omega^2};$$

$$A^2 x'^2 + B^2 y'^2 + C^2 z'^2 = \frac{k^2 u^2}{\omega^2};$$

et si l'on élimine $\frac{u^2}{\omega^2}$ entre celles-ci, on aura

$$A(k^2 - Ah)\, x'^2 + B(k^2 - Bh)\, y'^2 + C(k^2 - Ch)\, z'^2 = 0;$$

d'où l'on conclut que l'axe instantané de rotation demeure toujours sur la surface d'un cône du second degré, que l'on peut tracer dans l'intérieur du mobile, lorsque les constantes h et k sont connues. Ce cône se change en un plan, quand le carré de k est égal à l'un des produits Ah, Bh, Ch; il devient un cône droit à base circulaire, ayant pour axe l'un des trois axes principaux relatifs à ce point, toutes les fois que deux des coefficiens de l'équation précédente sont égaux.

4° L'axe Om ou Oz du moment principal des quantités de mouvement, étant immobile, la suite des droites suivant lesquelles il traverse le corps pendant le mouvement, se trouvera sur un cône

qui a le point O pour sommet. Or, ce cône est aussi du second degré, comme le précédent. En effet, si l'on appelle x'', y'', z'', les trois coordonnées d'un point quelconque de l'axe Om, rapportées aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, et si l'on désigne par u_1 la distance de ce point à l'origine O, on aura

$$x'' = a''u_1, \quad y'' = b''u_1, \quad z'' = c''u_1,$$

et, par conséquent,

$$Ap = \frac{kx''}{u_1}, \quad Bq = \frac{ky''}{u_1}, \quad Cr = \frac{kz''}{u_1}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (e) et (f), il vient

$$\frac{k^2 x''^2}{C} + \frac{k^2 y''^2}{B} + \frac{k^2 z''^2}{A} = hu_1^2,$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = u_1^2;$$

et par l'élimination de u_1^2, on en conclut :

$$\frac{k^2 - Ah}{A} x''^2 + \frac{k^2 - Bh}{B} y''^2 + \frac{k^2 - Ch}{C} z''^2 = 0,$$

pour l'équation de la surface du cône dont il s'agit.

5° Pour que ce cône et le précédent ne soient pas imaginaires, il faudra que les quantités $k^2 - Ah$, $k^2 - Bh$, $k^2 - Ch$, ne soient pas toutes trois de même signe. Cela étant, si A est le plus grand et C le plus petit des trois moments d'inertie principaux, les deux quantités $k^2 - Ah$ et $k^2 - Ch$ devront être de signes contraires. Or, selon que la troisième quantité $k^2 - Bh$ aura le même signe que $k^2 - Ah$ ou $k^2 - Ch$, les sections de ces deux cônes seront des ellipses perpendiculaires à l'axe du plus grand ou à l'axe du plus petit moment d'inertie. Par conséquent, pendant toute la durée du mouvement, l'axe instantané de rotation ne s'écartera de l'un de ces deux axes principaux, que de quantités limitées; et, en même temps, cet axe principal ne s'écartera non plus que de quantités limitées, de l'axe Om perpendiculaire au plan de la percussion primitive et du point O.

420. Lorsque l'axe instantané de rotation OI (fig. 88) s'écarte très peu de l'un des trois axes principaux, par exemple de l'axe Ox_1, pendant toute la durée du mouvement, on peut déterminer sa position et celle du mobile à un instant quelconque, d'une manière très simple, et sans recourir aux fonctions elliptiques. A la vérité, cette autre solution du problème n'est qu'approchée; mais on pourra pousser l'approximation aussi loin qu'on voudra : celle à laquelle nous nous arrêterons suffira pour compléter ce qui a été dit dans le n° 389, sur les propriétés mécaniques des axes principaux.

Nous avons (n° 406)

$$\sin IOz_1 = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}};$$

l'angle IOz_1 étant très petit par hypothèse, p et q seront deux fractions très petites de r; si l'on néglige leur produit, la première équation (d) se réduit à $dr = 0$, et donne $r = n$; n étant une constante arbitraire qui exprimera la vitesse de rotation du corps, ou la valeur de $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, en négligeant aussi les carrés de p et q. Les deux autres équations (d) deviendront

$$\left.\begin{aligned} Bdq + (A - C)npdt &= 0, \\ Adp + (C - B)nqdt &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Pour les intégrer, je fais

$$p = \mathcal{C} \sin (n't + \gamma), \quad q = \mathcal{C}' \cos (n't + \gamma);$$

$\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, γ, n', étant des quantités constantes. En substituant ces valeurs de p et q dans les équations (1), et supprimant ensuite le sinus ou cosinus qui se trouve facteur commun à tous leurs termes, il vient

$$B\mathcal{C}'n' - (A - C)\,\mathcal{C}n = 0, \quad A\mathcal{C}n' - (B - C)\,\mathcal{C}'n = 0;$$

d'où l'on tire

$$n' = n\sqrt{\frac{(A - C)(B - C)}{AB}},$$

$$\mathcal{C}' = a\sqrt{A(A - C)},$$

$$\mathcal{C} = a\sqrt{B(B - C)};$$

a étant une constante qui restera arbitraire, ainsi que γ. Si donc on fait, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{(A - C)(B - C)}{AB}} = \delta,$$

il en résultera

$$\left.\begin{aligned} p &= a\sqrt{B(B - C)} \sin (\delta nt + \gamma), \\ q &= a\sqrt{A(A - C)} \cos (\delta nt + \gamma), \end{aligned}\right\} (2)$$

pour les intégrales complètes des équations (1).

Si l'on projette l'axe instantané OI sur le plan des x_1 et y_1, et qu'on appelle ζ l'angle que fait cette projection avec l'axe des y_1, on aura

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{q}{p};$$

de plus, la valeur de $\sin IOz_1$ se réduit à

$$\sin IOz_1 = \frac{1}{n}\sqrt{p^2 + q^2},$$

au degré d'approximation où l'on s'est arrêté; par

conséquent, les valeurs précédentes de p et q feront connaître immédiatement, à chaque instant, la position de l'axe de rotation dans l'intérieur du mobile. On va voir les conséquences qui en résultent.

421. Si, à l'origine du mouvement, cette droite a coïncidé exactement avec l'axe $Oz_{,}$, il faudra qu'on ait $p = 0$, et $q = 0$, quand $t = 0$; ce qui exige que la constante α soit nulle. Alors on aura constamment $p = 0$ et $q = 0$; et l'axe instantané OI coïncidera, pendant toute la durée du mouvement, avec l'axe $Oz_{,}$, qui demeurera immobile (n° 405). Lors donc que le corps retenu par le point fixe O aura commencé à tourner autour de l'un des trois axes principaux qui se coupent en ce point, il continuera indéfiniment à tourner autour de cet axe, comme s'il était entièrement fixe; ce qui est la proposition du n° 389.

Mais, si à l'origine du mouvement l'axe OI s'écartait un peu de $Oz_{,}$, les valeurs initiales de p et q, et, conséquemment, la constante α, seront seulement très petites. Or, pour que les valeurs de p et q demeurent toujours très petites, il faut que la constante δ soit réelle; car, lorsqu'elle est imaginaire, le sinus et le cosinus contenus dans les équations (2) se changent, par les formules connues, en exponentielles réelles, et les valeurs de p et q, qui en résultent, croissent indéfiniment avec le temps t. La réalité de δ exige que le moment principal C soit le plus grand ou le plus petit des trois momens d'inertie A, B, C. Donc, quand l'axe instantané de rotation a été un tant soit peu écarté de l'axe principal qui répond au moment d'inertie moyen, cet écart augmente avec le temps, et ne reste pas renfermé entre de très petites limites; et, au contraire, lorsqu'on l'a un peu écarté de l'axe principal auquel répond le plus grand ou le plus petit moment d'inertie, il s'en éloigne très peu, et ne fait que de très petites oscillations pendant toute la durée du mouvement.

Il y a donc une différence essentielle entre les trois axes principaux du mobile qui se coupent au point fixe O : en supposant que A soit la plus grande, et C la plus petite des trois quantités A, B, C, le mouvement de rotation est *stable* autour des axes $Ox_{,}$ et $Oz_{,}$, et ne peut être qu'instantané autour de l'axe $Oy_{,}$. S'il s'agit, par exemple, d'un ellipsoïde homogène, retenu par son centre de figure, le mouvement est stable autour du plus grand ou du plus petit de ses trois diamètres principaux, et non stable autour de son diamètre moyen.

422. Dans le cas de l'instabilité du mouvement, les formules (2) n'exprimeront les valeurs approchées de p et q que pendant les premiers instans du mouvement, et tant qu'elles seront très petites, comme le supposent les équations (1), dont elles sont déduites. Pour avoir les valeurs de p, q, r, à un instant quelconque, il faudra alors recourir à la solution rigoureuse du problème. Dans le cas de la stabilité, les valeurs approchées de p et q, données par les équations (2), subsisteront pendant toute la durée du mouvement; et l'on déterminera de la manière suivante celles des trois angles ψ, θ, φ.

Je supposerai, comme dans le n° 418, que le mouvement a été produit par le choc d'une masse μ, dont tous les points avaient une vitesse v, parallèle à une droite FE (fig. 93), passant par le centre de gravité de μ, et comprise dans le plan des x et y. Les équations (5) auront lieu comme précédemment; et en désignant toujours par f la distance de cette droite au point O, la quantité k qu'elles renferment sera encore le moment $\mu v f$ de la percussion initiale. Au moyen de $r = n$ et des formules (2), ces équations (5) deviendront

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\sin\varphi &= -\alpha\frac{A\sqrt{B(B-C)}}{\mu v f}\sin(\delta n t+\gamma),\\ \sin\theta\cos\varphi &= -\alpha\frac{B\sqrt{A(A-C)}}{\mu v f}\cos(\delta n t+\gamma),\\ \cos\theta &= \frac{Cn}{\mu v f}. \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Les angles θ et φ étant donnés à l'origine du mouvement, si l'on fait $t = 0$ dans les deux premières de ces équations, on en déduira les valeurs des deux constantes α et γ. Ces deux équations feront ensuite connaître les valeurs de φ et θ à un instant quelconque, après que la constante n aura aussi été déterminée. Il faudra que α soit une quantité très petite, pour que les valeurs de p et q, données par les équations (2), soient très petites, comme on l'a supposé. Cela étant, θ sera constamment un très petit angle, et l'axe principal $Oz_{,}$, dont s'écarte très peu l'axe instantané de rotation, s'écartera lui-même très peu de l'axe Oz perpendiculaire à la direction FE de la percussion primitive.

En négligeant le carré de θ, la troisième équation (3) se réduit à

$$\mu v f = Cn;$$

ce qui fera connaître la constante n, qui sera, à très peu près, la vitesse angulaire du mobile autour de l'axe instantané.

La troisième équation (7) du n° 410 se réduira de même à

$$n\,dt = d\varphi - d\psi;$$

d'où l'on tire

$$\psi = c + \varphi - nt;$$

c étant une constante arbitraire, que l'on déterminera d'après les valeurs initiales de φ et ψ. Cette dernière équation fera ensuite connaître l'angle ψ à un instant quelconque; ce qui complète la solution du problème.

423. Lorsque le mobile est un solide de révolution, dont Oz_1 est l'axe de figure, on a $B = A$; la première équation (d) se réduit à $dr = 0$; r est donc une constante arbitraire n; et toutes les formules du n° 420, ainsi que les équations (3), ont lieu rigoureusement.

L'angle θ n'est plus assujetti à être très petit; mais, en vertu de la troisième équation (3), sa valeur est constante pendant le mouvement; en sorte que l'axe de figure du mobile décrit un cône droit à base circulaire, autour de la droite Oz perpendiculaire à la direction FE du choc primitif. En désignant par ι la valeur constante et donnée de cet angle θ, on aura

$$\mu v f \cos \iota = Cn,$$

pour déterminer la constante n. D'après les deux premières équations (3), on aura aussi

$$\mu^2 v^2 f^2 \sin^2 \iota = \omega^2 A^3 (A - C),$$

pour déterminer la constante ω; et en vertu des équations (2) la vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané sera (n° 406)

$$\omega = \sqrt{n^2 + \frac{\mu^2 v^2 f^2}{A^2} \sin^2 \iota};$$

ce qui montre que cette vitesse sera constante, de manière que le mobile tournera uniformément, soit autour de l'axe instantané, en vertu de cette vitesse, soit autour de son axe de figure, en vertu de la vitesse n.

Les deux premières équations (3) donnent aussi

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} (\delta nt + \gamma), \quad \varphi = \delta nt + \gamma.$$

La troisième équation (7) du n° 410 devient

$$ndt = \delta ndt - \cos \iota d\psi;$$

en désignant par c une constante arbitraire, on en déduit

$$\psi = c = \frac{(1 - \delta)\, nt}{\cos \iota} = c - \frac{\mu v f}{A} t;$$

par conséquent, l'angle φ, compté sur un plan perpendiculaire à l'axe de figure, et l'angle ψ, compté sur le plan du choc primitif et du point O, varient l'un et l'autre uniformément.

424. La stabilité du mouvement autour des axes principaux du plus grand et du plus petit moment d'inertie, ayant été conclue des équations (2), qui ne sont qu'approchées, on pourrait conserver quelque doute sur l'exactitude de cette conclusion; mais on démontre rigoureusement la stabilité dont il s'agit, au moyen des intégrales exactes (e) et (f) des équations du mouvement.

En effet, en multipliant la première par C, et la retranchant de la seconde, on a

$$A (A - C) p^2 + B (B - C) q^2 = D; \quad (4)$$

D désignant, pour abréger, la constante $k^2 - Ck$. Si donc l'axe instantané s'écarte très peu de l'axe principal Oz_1 à l'origine du mouvement, de sorte que les quantités p et q soient très petites à cette époque, la constante D sera aussi très petite; d'où je conclus que les valeurs de p et q devront rester très petites pendant toute la durée du mouvement, lorsque les deux différences $A - C$ et $B - C$ seront de même signe; car il faudra, en vertu de l'équation (4), que leurs carrés, multipliés par des quantités de même signe, et ensuite ajoutés, donnent constamment une somme très petite. On peut même, dans ce cas, fixer des limites aux valeurs de p et q, et l'on voit qu'on aura toujours

$$p^2 < \frac{D}{A (A - C)}, \quad q^2 < \frac{D}{B (B - C)}.$$

Mais si les différences $A - C$ et $B - C$ sont de signe contraire, et que la constante D soit encore supposée très petite, on conçoit que l'équation (4) pourra néanmoins être satisfaite, sans que les valeurs de p et q soient astreintes à demeurer constamment très petites; et, en effet, l'analyse du n° 420 montre qu'alors ces valeurs ne sauraient être supposées très petites pendant toute la durée du mouvement.

Au reste, les axes principaux relatifs au point fixe O sont les seuls axes qui puissent rester les mêmes dans l'intérieur du mobile, et demeurer en repos, quand ils ne sont pas entièrement fixes, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le n° 389. Cela résulte actuellement des équations (d). En effet, pour que l'axe instantané de rotation conserve toujours la même position, il faut que les trois quantités p, q, r, soient constantes. On a donc $dp = 0$, $dq = 0$, $dr = 0$; ce qui réduit les équations (d) à

$$(B - A) pq = 0, \quad (A - C) rp = 0, \quad (C - B) qr = 0.$$

Si les trois momens d'inertie A, B, C, sont inégaux, il faudra supposer nulles deux des trois quantités p, q, r, pour satisfaire à ces équations; et alors l'axe instantané coïncidera avec l'un des trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1. Si deux de ces trois momens d'inertie sont égaux, de sorte que l'on ait $B = A$, par exemple, la première équation disparaîtra, et l'on satisfera aux deux autres en prenant $r = 0$. L'axe instantané sera donc alors situé dans le plan des deux axes Ox_1 et Oy_1; mais on sait que, dans un pareil cas, toutes les droites comprises dans ce plan, et passant par le point O, sont des axes principaux; l'axe de rotation immobile sera donc encore un axe principal. Enfin, lorsqu'on a

$A = B = C$, ces trois équations sont identiques, et l'on peut prendre les valeurs de p, q, r, arbitrairement; mais aussi, dans ce cas particulier, toutes les droites qui passent par le point O sont des axes principaux; par conséquent, dans tous les cas, l'axe de rotation, s'il demeure immobile, ne pourra être qu'un axe principal.

§ III. *Solution d'un cas particulier de mouvement de rotation d'un corps pesant.*

425. Lorsque le point fixe O n'est pas le centre de gravité du mobile, et qu'on ne fait point abstraction de la pesanteur, on n'est parvenu, jusqu'à présent, à intégrer le système des équations (7) et (δ) des nos 410 et 413, que quand le mobile est un solide de révolution, et que le point O appartient à son axe de figure. C'est ce cas particulier que nous allons maintenant considérer.

Supposons que l'axe principal $Oz_{,}$ soit l'axe de figure, et qu'on ait, par conséquent, $B = A$. Supposons aussi que le centre de gravité G du mobile (fig. 94) appartienne à l'axe des $z_{,}$ positives, de sorte qu'on ait (no 413) $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, et que γ soit une quantité positive et donnée, qui représente la distance OG. L'axe Oz étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, l'angle θ ou $zOz_{,}$ sera aigu ou obtus, selon que le point G se trouvera au-dessous ou au-dessus du plan horizontal mené par le point O. Dans ces deux cas, les équations (δ) deviendront

$$\left.\begin{aligned} &Cdr = 0, \\ &Adq - (C - A)\, rpdt = \gamma a'' Mgdt, \\ &Adp + (C - A)\, rqdt = -\gamma b'' Mgdt, \end{aligned}\right\} (1)$$

les quantités a'' et b'' qu'elles renferment étant, d'après les équations (c),

$$a'' = -\sin\theta \sin\varphi, \quad b'' = -\sin\theta\cos\varphi.$$

Nous appellerons *équateur* du mobile la section perpendiculaire à son axe de figure, et passant par le point O. Soient NEN'E' cette section, et NON' la droite suivant laquelle elle coupe le plan horizontal mené par ce point fixe. Toutes les droites qui passent par ce point et sont comprises dans cette section, étant des axes principaux, l'angle φ pourra se rapporter à l'une quelconque d'entre elles; et E étant un point déterminé du mobile, on pourra prendre pour φ l'angle NOE. L'angle ψ, dont la troisième équation (7) renferme la différentielle, sera l'angle NOx, compté à partir d'une droite fixe Ox, menée arbitrairement dans le plan horizontal. On aura donc, à un instant quelconque,

$$zOz_{,} = \theta, \quad NOE = \varphi, \quad NOx = \psi;$$

et l'on a suffisamment expliqué, dans le no 378, comment la position du mobile sera déterminée, sans aucune ambiguité, au moyen des trois angles ψ, φ et θ.

426. En désignant par n une constante arbitraire, on aura $r = n$, d'après la première équation (1). Le mouvement de rotation du corps sera donc uniforme, parallèlement à son équateur. Pour définir la direction de ce mouvement, nous supposerons que le point N soit le *nœud ascendant* de l'équateur; en sorte que, quand le point E parviendra au point N, son rayon EO s'élèvera au-dessus du plan horizontal, en vertu de la vitesse angulaire n, qui sera alors une quantité positive. En effet, d'après la troisième équation (7) du no 410, on aura

$$d\varphi = ndt + \cos\theta d\psi. \qquad (2)$$

Lorsque le point E est en N, l'angle φ est zéro ou un multiple de 2π; et, dans l'instant suivant, il s'élèvera ou s'abaissera, selon que l'angle φ augmentera ou diminuera (no 378); donc, pour que le point E s'élève comme on le suppose, en ayant seulement égard au mouvement du corps parallèlement à son équateur, il faudra que le premier terme de $d\varphi$ soit positif.

Cela étant, si son second terme est aussi positif, il augmentera la valeur de $d\varphi$, qui sera donc plus grande que si le nœud N était immobile; par conséquent, son mouvement projeté sur l'équateur sera *rétrograde*, ou en sens contraire du mouvement du corps, parallèlement à ce plan. Le contraire aura lieu, et le mouvement du nœud sera *direct*, lorsque le second terme de la valeur de $d\varphi$ sera négatif. Dans le second cas, si le second terme l'emportait sur le premier, la valeur de $d\varphi$ serait négative, et le point E, parvenu en N, s'abaisserait au-dessous du plan horizontal, au lieu de s'élever au-dessus; mais cela n'empêcherait pas que N ne fût toujours le nœud ascendant, eu égard au mouvement du corps autour de son axe de figure.

Ainsi, le sens du mouvement du nœud ascendant N dépendra du signe qu'aura, à chaque instant, le produit de $\cos\theta$ et $d\psi$; et ce mouvement sera direct ou rétrograde, selon que $\cos\theta$ et $d\psi$ seront de signe contraire ou de même signe.

427. En ajoutant les équations (1), après les avoir multipliées par c'', b'', a'', les seconds membres des deux dernières se détruisent, et l'on trouve, comme dans le no 415,

$$Cd.rc'' + Ad.qb'' + Ad.\,pa'' = 0;$$

donc, à cause de $r = n$, $c'' = \cos\theta$, et des valeurs de a'' et b'', on aura, en intégrant,

$$Cn\cos\theta - A\,(p\sin\theta\sin\varphi + q\sin\theta\cos\varphi) = l; \quad (3)$$

l étant une constante arbitraire, qui exprimera, comme dans le numéro cité, le moment des quantités de mouvement de tous les points du corps par rapport à l'axe Oz. Dans le mouvement que nous considérons, le moment de ces quantités de mouvement est donc une quantité constante, mais seulement par rapport à l'axe vertical, et non plus par rapport à tous les axes passant par le point O.

J'ajoute encore les deux dernières équations (1), après les avoir multipliées par q et p; ce qui donne

$$A\,(pdp + qdq) = \gamma\,(p \sin\theta \cos\varphi - p \sin\theta \sin\varphi)\,Mgdt.$$

Mais en vertu des deux premières équations (7) du n° 410, on a

$$p \sin\theta \cos\varphi - q \sin\theta \sin\varphi = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt};$$

on aura donc

$$A\,(pdp + qdq) = -Mg\gamma \sin\theta d\theta;$$

et en intégrant et désignant par h la constante arbitraire, il en résultera

$$A\,(p^2 + q^2) = 2Mg\gamma \cos\theta + h. \qquad (4)$$

D'après les équations (7) qu'on vient de citer, on a d'ailleurs

$$p \sin\theta \sin\varphi + q \sin\theta \cos\varphi = \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$p^2 + q^2 = \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2},$$

au moyen de quoi les équations (3) et (4) pourront être changées en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} &Cn \cos\theta - A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = l, \\ &A\left(\sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2}\right) = 2Mg\gamma \cos\theta + h. \end{aligned}\right\} (5)$$

Les équations (2) et (5) donneront des valeurs de dt, $d\psi$, $d\varphi$, dont chacune sera de la forme $F\theta d\theta$; il ne s'agira donc plus que d'intégrer ces trois formules différentielles, pour avoir les valeurs de t, ψ, φ, en fonctions de θ; or, leurs trois intégrales se réduiront, dans tous les cas, aux fonctions elliptiques. Mais, sans recourir à ces fonctions, on pourra aussi obtenir des valeurs approchées de ψ, φ, θ, en fonctions de t, dans les exemples que nous donnerons plus bas, après avoir déterminé les trois constantes arbitraires n, l, h, que contiennent les équations précédentes. Les trois nouvelles constantes qui seront renfermées dans leurs intégrales, se détermineront d'après les valeurs de ψ, φ, θ, qui répondent à $t = 0$: celle de θ sera donnée; on prendra, si l'on veut, $\psi = 0$ et $\varphi = 0$, pour les valeurs initiales de ψ et φ.

428. Quelles que soient les quantités de mouvement que prendront les points du corps à l'origine du mouvement, leur moment principal relatif au point O, et la direction de son axe, seront connus, d'après les percussions qu'on aura exercées sur le mobile à cet instant, et auxquelles ces quantités de mouvement inconnues, prises en sens contraire de leurs directions, devront faire équilibre (n° 353).

Par la règle du n° 281, je décompose ce moment principal en trois autres momens, dont les axes rectangulaires soient la partie $Oz_{,}$ de l'axe de figure qui comprend le centre de gravité G, une droite perpendiculaire à $Oz_{,}$ et contenue dans le plan vertical de Oz et $Oz_{,}$, et une droite horizontale perpendiculaire à ce plan. Ces trois droites étant des axes principaux, le moment par rapport à $Oz_{,}$ aura Cr ou Cn pour valeur (n° 409); il ferait donc connaître la valeur de n; mais je supposerai, au contraire, cette vitesse donnée directement, et je prendrai Cn pour ce moment.

Je désignerai par μ le moment par rapport au second axe, et par m le moment par rapport à l'axe horizontal; en sorte que la valeur initiale du moment principal sera $\sqrt{C^2 n^2 + \mu^2 + m^2}$, à cause de $B = A$ et $r = n$, son carré est $A^2 (p^2 + q^2) + C^2 n^2$ (n° 409), à un instant quelconque; si donc on appelle α la valeur initiale de l'angle θ, on aura, en vertu de l'équation (4),

$$(2Mg\gamma \cos\alpha + h)\,A = \mu^2 + m^2,$$

à l'origine du mouvement; ce qui donne

$$h = \frac{\mu^2 + m^2}{A} - 2Mg\gamma \cos\alpha.$$

L'axe du moment désigné par μ fera un angle $\alpha + 90°$ avec Oz; l'axe du moment m étant perpendiculaire à cette verticale, ce moment n'influera pas sur le moment l par rapport à Oz; d'après l'expression générale de E du n° 281, nous aurons donc simplement

$$l = Cn \cos\alpha - \mu \sin\alpha.$$

On devra se rappeler que dans ces valeurs de h et l, l'angle α sera aigu ou obtus, selon qu'à l'origine du mouvement, le centre de gravité G du mobile se trouvera au-dessous ou au-dessus du plan horizontal, passant par le point O.

429. Pour vérifier ces différentes formules, je suppose que la masse M du mobile soit concentrée à son centre de gravité, et qu'il se change en un pendule simple dont γ sera la longueur.

Dans ce cas, on n'aura point à considérer l'angle φ, et le mouvement dépendra seulement des angles ψ et θ. Si le point matériel G a reçu, à l'origine, une vitesse k' perpendiculaire à GO et dirigée dans le plan GOz, et une vitesse k perpendiculaire à ce plan, on aura

$$\mu = M\gamma k, \qquad m = M\gamma k'.$$

On aura aussi

$$C = 0, \qquad A = M\gamma^2.$$

Il en résultera

$$h = (k^2 + k'^2 - 2g\gamma \cos\alpha)\,M, \quad l = -M\gamma k \sin\alpha;$$

les équations (5) deviendront

$$\gamma \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = h \sin \alpha,$$

$$\gamma^2 \left(\sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt} \right) = h^2 + k'^2 + 2g\gamma (\cos \theta - \cos \alpha);$$

et il est aisé de les faire coïncider avec les équations (5) et (6) du n° 205.

La première, multipliée par $\frac{1}{2}\gamma dt$, exprime que l'aire décrite autour du point O pendant l'instant dt, par la projection horizontale du rayon vecteur GO du mobile, est constante et égale à sa valeur initiale $\frac{1}{2}\gamma k \sin \alpha$. Le premier membre de la seconde est le carré de la vitesse de ce point matériel, au bout du temps t; et $k^2 + k'^2$ étant le carré de cette vitesse à l'origine du mouvement, cette équation est la formule du n° 159.

430. Dans le cas d'un corps qui ne se réduit pas à un point matériel, si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre, qu'on lui imprime une vitesse de rotation autour de son axe de figure, et qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, les deux quantités μ et m seront nulles, on aura

$$l = Cn \cos \alpha, \quad h = -2Mg\gamma \cos \alpha,$$

et les équations (5) deviendront

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} &= \frac{Cn}{A} (\cos \theta - \cos \alpha), \\ \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2} &= \frac{2Mg\gamma}{A} (\cos \theta - \cos \alpha). \end{aligned}\right\} (6)$$

En vertu de la seconde, la différence $\cos \theta - \cos \alpha$ est toujours positive; en vertu de la première, la différentielle $d\psi$ le sera donc aussi; par conséquent (n° 426), le mouvement du nœud ascendant N sera direct, quand $\cos \theta$ sera négatif, ce qui suppose le centre de gravité G au-dessus du plan horizontal passant par le point O; et ce mouvement sera rétrograde, lorsque G sera au-dessous de ce plan, ce qui répond à $\cos \theta$ positif.

Quand n sera zéro, la différentielle $d\psi$, et par suite la différentielle $d\varphi$ donnée par l'équation (2), seront zéro; les angles ψ et φ seront donc constans, et pourront être supposés nuls; le mouvement se changera dans celui du pendule ordinaire, autour d'un axe horizontal par rapport auquel le moment d'inertie est A; et, effectivement, en faisant $d\psi = 0$ dans la seconde équation (6), elle se réduit à l'équation (a) du n° 394, quand on suppose dans celle-ci la vitesse initiale égale à zéro.

L'élimination de $\frac{d\psi}{dt}$ entre les deux équations (6) donne

$$\sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{\lambda} [\sin^2 \theta - 2C^2 (\cos \theta - \cos \alpha)] (\cos \theta - \cos \alpha), \qquad (7)$$

en faisant pour abréger,

$$\frac{M\gamma}{A} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{C^2 n^2}{A^2} = \frac{4gC^2}{\lambda},$$

où l'on peut remarquer que λ est la longueur du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps que le mobile, si la vitesse n était nulle. En même temps, la première équation (6) deviendra

$$\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = 2C \sqrt{\frac{g}{\lambda}} (\cos \theta - \cos \alpha), \quad (8)$$

en regardant C comme une quantité positive et donnée.

Les valeurs approchées de θ et t qu'on tirera de ces équations (7) et (5), et celle de φ qui résultera de l'équation (2), s'exprimeront aisément sous forme finie, dans les deux cas dont nous allons nous occuper.

431. Je suppose d'abord que la partie Oz', de l'axe de figure qui contient le centre de gravité G du mobile ait été très peu écartée de la verticale Oz à l'origine du mouvement, de sorte que l'angle α soit très petit; l'angle θ le sera aussi, puisqu'on a toujours $\cos \theta > \cos \alpha$; et, en négligeant les quatrièmes puissances de α et θ dans les développemens de $\cos \alpha$ et $\cos \theta$, les équations (7) et (8) deviendront

$$\left.\begin{aligned} \theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} &= \frac{g}{\lambda} [(1 + C^2) \theta^2 - C^2 \alpha^2] (\alpha^2 - \theta^2), \\ \theta^2 \frac{d\psi}{dt} &= C \sqrt{\frac{g}{\lambda}} (\alpha^2 - \theta^2), \end{aligned}\right\} (9)$$

La première montre que θ, qui doit toujours être une quantité positive (n° 378), n'excédera jamais α, et ne sera pas moindre que $\frac{C\alpha}{\sqrt{1 + C^2}}$. En la résolvant par rapport à dt, on a

$$dt = \frac{\mp \sqrt{\frac{\lambda}{g}}\, \theta d\theta}{\sqrt{[(1 + C^2) \theta^2 - C^2 \alpha^2] (\alpha^2 - \theta^2)}},$$

où l'on regardera toujours le dénominateur comme

une quantité positive, et l'on prendra le signe inférieur ou le signe supérieur, selon que θ croîtra ou décroîtra.

Pour faciliter l'intégration, je fais

$$\theta = a \sin u, \quad d\theta = a \cos u du;$$

il en résulte

$$\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\, dt = \pm \frac{d.\cos u}{\sqrt{1-(1+C^2)\cos^2 u}}$$

En intégrant, on aura donc

$$t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sqrt{1+C^2} = c \pm \text{arc}\left(\sin = \sqrt{1+C^2}\cos u\right);$$

c étant la constante arbitaire. Pour $t=0$, on a $\theta = a$ et $\cos u = 0$; l'angle qui répond au sinus zéro est zéro ou un multiple quelconque de π; on a donc $c = i\pi$, en désignant par i un nombre entier positif, négatif ou zéro; et en remettant pour $\cos u$ sa valeur, on aura

$$t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sqrt{1+C^2} = i\pi \pm \text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{1+C}{a}}\sqrt{a^2-\theta^2}\right).$$

L'angle θ décroissant d'abord depuis $\theta = a$ jusqu'à $\theta = \frac{Ca}{\sqrt{1+C^2}}$, on prendra le signe supérieur et $i=0$; croissant ensuite depuis cette dernière valeur jusqu'à $\theta = a$, on prendra le signe inférieur et $i=1$; décroissant de nouveau, depuis $\theta = a$ jusqu'à $\theta = \frac{Ca}{\sqrt{1+C^2}}$, on prendra le signe supérieur et $i=2$; et ainsi de suite. C'est de cette manière qu'on doit déterminer la constante arbitraire, ajoutée à un arc de cercle que l'on considère comme une fonction de son sinus; mais il est plus simple de passer de l'arc au sinus, avant cette détermination.

A un instant quelconque, on aura, d'après l'équation précédente,

$$\theta^2 = a^2 - \frac{a^2}{1+C^2}\sin^2 t\sqrt{\frac{g(1+C^2)}{\lambda}}.$$

En appelant T le temps pendant lequel l'angle θ passera de sa plus grande valeur a à sa plus petite valeur, qui suit immédiatement, ou reviendra de la plus petite à la plus grande, on en conclut

$$T = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g(1+C^2)}}.$$

Au moyen de cette valeur de θ^2, celle de $d\psi$, qui est donnée par la seconde équation (9), sera

$$d\psi = \frac{C\sqrt{\frac{g}{\lambda}}(1+C^2)\,dt}{C^2+\cos^2 t\sqrt{\frac{g(1+C^2)}{\lambda}}} - C\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,dt;$$

en intégrant et supposant qu'on ait $\psi = 0$ quand $t=0$, on en déduit

$$\psi = \text{arc}\left[\text{tang} = \frac{C\,\text{tang}\, t\sqrt{\frac{g(1+C^2)}{\lambda}}}{\sqrt{1+C^2}}\right] - Ct\sqrt{\frac{g}{\lambda}};$$

formule qui déterminera le mouvement rétrograde du nœud ascendant N sur le plan horizontal passant par le point O. Si la constante C n'est pas nulle, les valeurs de l'arc compris dans cette formule seront

$$\text{arc}(\text{tang} = \infty) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{arc}(\text{tang} = 0) = \pi,$$

$$\text{arc}(\text{tang} = -\infty) = \tfrac{3}{2}\pi, \quad \text{etc.},$$

au bout des premier, deuxième, troisième, etc., intervalles de temps T; par conséquent, l'arc parcouru par le point N pendant le premier intervalle de temps T, sera

$$\psi = \frac{1}{2}\pi - \frac{\frac{1}{2}\pi C}{\sqrt{1+C^2}};$$

pendant les deux premiers intervalles T, il sera

$$\psi = \pi - \frac{\pi C}{\sqrt{1+C^2}};$$

au bout des trois premiers, on aura

$$\psi = \frac{3}{2}\pi - \frac{\frac{3}{2}\pi C}{\sqrt{1+C^2}};$$

et ainsi de suite. Il en résulte que les arcs parcourus par le nœud N pendant les intervalles T successifs seront tous égaux entre eux, et auront pour valeur commune

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{(\mathfrak{C}+\sqrt{1+\mathfrak{C}^2})\sqrt{1+\mathfrak{C}^2}},$$

laquelle est d'autant moindre, que la constante $\mathfrak{C}$ sera un plus grand nombre.

Quant à la valeur de φ, si l'on néglige le carré de θ dans l'équation (2), et qu'on suppose $\varphi = 0$ quand $t = 0$, on aura

$$\varphi = nt + \psi;$$

ce qui achèvera de déterminer la position du mobile à un instant quelconque.

432. Quel que soit l'angle α, supposons actuellement que l'angle θ demeure à peu près constant, et par conséquent très peu différent de α, pendant toute la durée du mouvement. Faisons donc

$$\theta = \alpha - u, \quad d\theta = -du;$$

et considérons u comme une variable très petite. En négligeant les puissances de u supérieures au carré, on aura

$$\sin^2\theta = \sin^2\alpha - u\sin 2\alpha + u^2\cos 2\alpha,$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = u\sin\alpha - \frac{1}{2}u^2\cos\alpha;$$

et à ce degré d'approximation, l'équation (7) donne

$$\frac{\lambda}{g}\frac{du^2}{dt^2} = 2u\sin\alpha - u^2(\cos\alpha + 4\mathfrak{C}^2);$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,dt = \frac{du}{\sqrt{2u\sin\alpha - u^2(\cos\alpha + 4\mathfrak{C}^2)}}.$$

En intégrant et observant que $u = 0$ quand $t = 0$, il vient

$$t\sqrt{\frac{g}{\lambda}(\cos\alpha + 4\mathfrak{C}^2)} = \text{arc}\left[\cos = 1 - \frac{u(\cos\alpha + 4\mathfrak{C}^2)}{\sin\alpha}\right],$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 4\mathfrak{C}^2}\left[1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{\lambda}(\cos\alpha + 4\mathfrak{C}^2)}\right].$$

Pour que la variable u soit toujours très petite, comme je l'ai supposé, il faudra que la quantité $\mathfrak{C}$ soit très grande; ce qui exige, en général, qu'on ait imprimé au mobile une très grande vitesse de rotation autour de son axe de figure. On pourra alors mettre $4\mathfrak{C}^2$ à la place de $\cos\alpha + 4\mathfrak{C}^2$, et l'on aura, plus simplement,

$$u = \frac{1}{2\mathfrak{C}^2}\sin\alpha\sin^2\mathfrak{C}t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}.$$

En mettant $\alpha - u$ au lieu de θ dans l'équation (8), négligeant le carré de u, et supposant que l'angle α ne soit pas nul, ce qui permet de supprimer le facteur $\sin^2\alpha$, commun aux deux membres, nous aurons

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\mathfrak{C}}\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sin^2\mathfrak{C}t\sqrt{\frac{g}{\lambda}};$$

d'où l'on tire

$$\psi = \frac{1}{2\mathfrak{C}}t\sqrt{\frac{g}{\lambda}} - \frac{1}{4\mathfrak{C}^2}\sin 2\mathfrak{C}t\sqrt{\frac{g}{\lambda}}.$$

En vertu de l'équation (2), on aura, en même temps,

$$\varphi = nt + \psi\cos\alpha,$$

en supposant les angles φ et ψ nuls à l'origine du mouvement; et la position du mobile, à un instant quelconque, sera complètement déterminée.

On conclut de $\theta = \alpha - u$, et de cette valeur de ψ, 1° que quand le mobile que nous considérons a reçu une très grande vitesse de rotation autour de son axe de figure, après que cette droite a été écartée de la direction verticale, son équateur conserve une inclinaison à peu près constante, sur le plan horizontal passant par le point O, pendant toute la durée du mouvement qui en résulte; 2° qu'en même temps l'intersection de ces deux plans prend un mouvement à très peu près uniforme, très lent par rapport à la rotation du mobile, et qui est direct ou rétrograde, comme on l'a déjà dit (n° 430), selon que le centre de gravité du corps est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal. Pourvu que l'angle α ne soit pas zéro, l'angle ψ et le mouvement du nœud sont indépendans de sa grandeur. L'inégalité u de l'inclinaison de l'équateur, et celle qui a lieu dans le mouvement du nœud, sont d'autant moins sensibles, que la rotation est plus rapide, et la quantité $\mathfrak{C}$ un plus grand nombre.

Il existe, dans beaucoup de cabinets de physique, une machine de Bohnenberger, qui représente fidèlement toutes les circonstances de ce mouvement de rotation, de même que la machine d'Athood montre aux yeux toutes les circonstances du mouvement des corps graves. Le mouvement de rotation est produit au moyen d'un fil enroulé sur l'équateur du mobile, et attaché à l'un de ses points, que l'on déroule rapidement, comme dans le jeu de la *toupie*.

On remarquera que quand α est zéro, θ l'est aussi; ce qui rend l'équation (8) identique, et l'angle ψ indéterminé; l'angle $\varphi - \psi$, égal à nt, représente alors le mouvement du corps autour de son axe de figure, qui demeure constamment vertical.

CHAPITRE V.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE ENTIÈREMENT LIBRE.

433. Pour se représenter avec plus de facilité le mouvement d'un corps solide dans l'espace, on y substitue deux autres mouvemens, l'un de *rotation*, autour d'un des points du mobile, et l'autre de *translation*, commun à tous ses points. Cela revient évidemment à regarder, à un instant quelconque, la vitesse de chaque point comme la résultante de deux autres vitesses, dont l'une soit égale et parallèle à celle du point que l'on prend pour centre du mouvement de rotation, et dont l'autre soit particulière à chaque point du mobile : en ayant seulement égard aux vitesses particulières, le corps tourne autour du centre, comme autour d'un point fixe ; et, en vertu de la vitesse commune, tous ses points sont transportés dans l'espace, d'un mouvement commun qui n'altère en aucune manière le mouvement de rotation.

Le mouvement de translation peut être révolutif autour d'un autre corps en repos ou lui-même en mouvement. Il n'y a pas de rotation toutes les fois qu'une face ou une section déterminée du mobile reste constamment parallèle à elle-même ; il y a, au contraire, rotation dans le même temps que la révolution, lorsque le mobile tourne constamment la même face vers le corps central. C'est ce second cas qui a lieu dans le mouvement des satellites autour de leurs planètes. La lune tourne toujours la même face vers la terre ; et le rayon vecteur qui va du centre de la terre au centre de la lune, rencontre toujours en un même point la surface du satellite (n° 141); d'où il résulte que la rotation de la lune sur elle-même et sa révolution autour de la terre, s'achèvent dans un même temps, lequel est 27j,32166. On démontre, dans la *Mécanique céleste*, que l'égalité de ces deux mouvemens subsistera toujours, quoique le mouvement révolutif s'accélère de siècle en siècle (n° 244); en sorte que le mouvement de rotation participe également à cette accélération, dont Laplace a assigné la cause.

Tant qu'on aura seulement pour but de décomposer le mouvement d'un corps en deux mouvemens plus simples et plus faciles à concevoir, on pourra choisir arbitrairement le centre du mouvement de rotation ; mais lorsqu'il s'agira de déterminer effectivement ces deux mouvemens, nous prendrons pour ce point le centre de gravité du mobile, parce qu'alors, dans le premier instant, ces deux mouvemens se détermineront indépendamment l'un de l'autre, et qu'il en sera de même, dans plusieurs cas, pendant toute leur durée : le choix de ce centre de rotation rendra toujours plus simples les équations différentielles des deux mouvemens, ainsi qu'on va le voir.

434. Appelons G le centre de gravité du mobile, M sa masse, et dm un élément quelconque de M. Au bout du temps t, compté depuis l'origine du mouvement, désignons par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de ce point matériel, et par x_1, y_1, z_1, celle du point G par rapport aux mêmes axes. Nous aurons

$$Mx_1 = \int x\,dm, \quad My_1 = \int y\,dm, \quad Mz_1 = \int z\,dm,$$

en étendant les intégrales à la masse entière. Si l'on différentie ces équations par rapport à t, on pourra effectuer cette opération sous les signes $\int$. On aura, de cette manière,

$$M\frac{dx_1}{dt} = \int\frac{dx}{dt}\,dm, \quad M\frac{dy_1}{dt} = \int\frac{dy}{dt}\,dm, \quad M\frac{dz_1}{dt} = \int\frac{dz}{dt}\,dm; \qquad (1)$$

et, pour en conclure les composantes de la vitesse initiale du centre de gravité, il suffira de connaître les valeurs de ces dernières intégrales à l'origine du mouvement.

Pour cela, supposons qu'à cette époque des parties μ, μ', μ'', etc., de M, reçoivent des vitesses qui soient les mêmes pour tous les points de chacune d'elles, et que nous représenterons par v, v', v'', etc.; en sorte qu'elle prendraient les quantités de mouvement μv, $\mu' v'$, $\mu'' v''$, etc., si elles étaient libres. D'après le principe du n° 353, l'équilibre doit exister entre ces quantités de mouvement, prises en sens contraire de leurs directions, et celles que prendront réellement, dans le premier moment, tous les points du mobile, lesquelles seront, parallèlement aux axes x, y, z, les valeurs initiales de $\frac{dx}{dt}dm$, $\frac{dy}{dt}dm$, $\frac{dz}{dt}dm$, relativement à l'élément dm.

Or, les directions des vitesses v, v', v'', etc., étant

données, on pourra décomposer, parallèlement à ces axes, les quantités de mouvement qui leur correspondent. Si donc on désigne par P, Q, R, les sommes de ces composantes, suivant les directions des x, y, z; positives, et si l'on observe que, par hypothèse, le mouvement est entièrement libre, il faudra qu'on ait pour l'équibre dont il s'agit,

$$\int \frac{dx}{dt}\,dm = P, \quad \int \frac{dy}{dt}\,dm = Q, \quad \int \frac{dz}{dt}\,dm = R,$$

pour la valeur particulière $t=0$. Les équations (1) deviendront donc

$$M\frac{dx_1}{dt} = P, \quad M\frac{dy_1}{dt} = Q, \quad M\frac{dz_1}{dt} = R, \quad (2)$$

à l'origine du mouvement; et l'on en conclut que la vitesse initiale du centre de gravité sera la même en grandeur et en direction, que si la masse entière M du mobile y était concentrée, et que toutes les quantités de mouvement μv, $\mu' v'$, $\mu'' v''$, etc., ou leurs composantes P, Q, R, y fussent appliquées parallèlement à leurs directions respectives.

435. On peut supposer que μ, μ', μ'', etc., sont les masses de corps animés des vitesses v, v', v'', etc., qui sont venus frapper simultanément un autre corps en repos, et y sont restés attachés, pour former une masse totale M, dont le centre de gravité G a pris la vitesse qui a pour ses trois composantes les valeurs de $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, données par les équations (2).

Le problème serait différent si les corps choquans ne restaient pas attachés au corps choqué après les percussions. Concevons qu'une masse M en repos soit frappée par un autre corps en mouvement, qui touche M en un seul point E (fig. 95) de sa surface; supposons, de plus, que pendant la durée du choc il n'y ait pas de glissement de l'un des corps sur l'autre, ou du moins, s'il y en a un d'une très petite étendue, faisons abstraction du frottement considérable auquel il pourrait donner lieu (n° 353); supposons, enfin, que EF soit la normale en E à la surface de M, et comprise dans l'intérieur du corps. On verra, dans un autre chapitre, que le mouvement de M sera le même que si une certaine partie μ de la masse, dont le centre de gravité serait situé sur EF, recevait, suivant cette direction, une certaine vitesse v, commune à tous ses points. La droite EF est donc la direction du choc; et son intensité, c'est-à-dire, la quantité de mouvement μv, sera déterminée, dans ce chapitre, d'après le mouvement du corps choquant et la forme des deux corps, élastiques ou non élastiques.

Cela étant, si l'on appelle V la vitesse que prendra le centre de gravité G de M, elle sera dirigée suivant la droite GD, parallèle à EF, et elle aura pour valeur le rapport de μv à M, de sorte que l'on aura

$$MV = \mu v.$$

Réciproquement, si la vitesse V du centre de gravité est donnée par l'observation, en la multipliant par M, on aura la quantité de mouvement qui a été imprimée au corps choqué, suivant la partie intérieure de la normale à la surface, menée par le point E où le choc a eu lieu; propriété qui appartient exclusivement au centre de gravité G, et qui n'aurait pas lieu, en général, pour la vitesse que prend le point E, ou tout autre point de M, situé ou non sur la direction du choc.

436. Afin que l'on voie plus clairement comment le mouvement de rotation d'un corps se trouve simplifié, quand on le rapporte à son centre de gravité, supposons d'abord que l'on veuille déterminer ce mouvement autour d'un point déterminé C (fig. 96) de ce corps, que nous ferons ensuite coïncider avec son centre de gravité G.

Soient CA, en grandeur et en direction, la vitesse du point C, et BD celle d'un autre point quelconque B du mobile. Par le point B, tirons une droite BE égale et parallèle à CA, et achevons le parallélogramme BEDF. On pourra remplacer la vitesse BD par ses deux composantes BE et BF; et si l'on décompose de même les vitesses de tous les points du mobile, ils auront tous une vitesse commune, égale et parallèle à CA, et chacun d'eux aura, en outre, une vitesse particulière. Or, si l'on imprime au point B et à tous les autres points du corps, une vitesse égale, parallèle et contraire à CA, on réduira le point C au repos, sans altérer le mouvement de rotation autour de ce point, qui sera dû aux vitesses particulières des autres points, savoir, BF pour le point B. Pour déterminer ce mouvement, on pourra donc considérer C comme un point fixe, après avoir imprimé à tous les éléments du corps, des quantités de mouvement égales aux produits de leurs masses et de la vitesse CA, et dirigées en sens contraire de CA. Or, la résultante de toutes ces forces parallèles et proportionnelles aux masses, sera égale à leur somme, et passera par le centre de gravité G, comme la résultante des forces qui proviennent de la pesanteur; par conséquent, si l'on désigne par U la vitesse CA, et toujours par M la masse du mobile, il suffira de joindre aux quantités du mouvement données, qui peuvent être imprimées simultanément à différentes parties de M, une autre quantité de mouvement MU, dirigée suivant la droite GA', parallèle et contraire à CA. On déterminera ensuite le mouvement de rotation autour du point C, par les règles du chapitre précédent, et comme si C était un point fixe.

Cette détermination exigera donc que l'on connaisse la vitesse U du point C; mais lorsque ce point sera le centre de gravité G, il est évident qu'après avoir appliqué au mobile la quantité de

mouvement MU, dont la direction passera par ce point G, on en pourra faire abstraction ; car une force quelconque, passant par le centre d'un mouvement de rotation, ne peut influer en aucune manière sur ce mouvement, puisqu'elle ne saurait faire tourner le corps autour de ce point, plutôt dans un sens que dans le sens opposé.

Concluons donc que quand on imprime simultanément des quantités de mouvement données, en grandeur et en direction, à différentes parties d'un corps solide, le mobile commence à tourner autour de son centre de gravité, comme autour d'un point fixe, et sans qu'on soit obligé d'ajouter aucune autre quantité de mouvement à celles qui sont données.

437. En combinant ce théorème avec ce qui précède, on déterminera complètement le mouvement initial d'un corps solide de forme quelconque, de quelque manière qu'il soit produit.

Pour fixer les idées, supposons que le mobile dont le centre de gravité est G (fig. 95), et dont la masse est M, soit frappé en un point E de sa surface par un autre corps qui s'en détache après le choc. En prenant pour son mouvement de translation celui du point G, et ayant seulement égard à ce mouvement, tous les points du mobile décriront, dans le premier instant, des droites parallèles à la normale EF ; on pourra toujours, comme on l'a dit tout à l'heure, déterminer leur vitesse commune, qui sera la vitesse complète du point G ; mais, pour plus de simplicité, je la supposerai donnée par l'observation, et je la représenterai par V. Indépendamment de ce mouvement de translation, le corps tournera autour du point G comme s'il était fixe, et qu'une partie de la masse M, dont le centre de gravité serait sur la droite EF, reçût une quantité de mouvement équivalente à MV. Par conséquent, dans le premier moment, la direction de l'axe instantané de rotation et la vitesse angulaire du mobile autour de cet axe, se détermineront d'après les équations (*l*) du n° 418, dans lesquelles on fera

$$k = \mathrm{MV}f;$$

f étant la perpendiculaire GL, abaissée du point G sur la droite EF.

Appelons, pour cela, ω cette vitesse angulaire, et α, β, γ, les angles que fait la direction de l'axe instantané avec les trois axes principaux du mobile qui se coupent au point G ; soit aussi HEK la section du mobile qui renferme le point G et la droite EF ; par le point G, élevons sur ce plan une perpendiculaire, et représentons par a, b, c, les angles qu'elle fera avec les axes auxquels répondent α, β, γ : d'après les équations (*l*) et les formules (3) du n° 405, nous aurons

$$\mathrm{A}\omega \cos \alpha = k \cos a, \quad \mathrm{B}\omega \cos \beta = k \cos b, \quad \mathrm{C}\omega \cos \gamma\, k = k \cos c;$$

A, B, C, étant les trois momens d'inertie du mobile par rapport aux mêmes axes. On en déduit

$$\omega^2 = \frac{k^2 \cos^2 a}{\mathrm{A}^2} + \frac{k^2 \cos^2 b}{\mathrm{B}^2} + \frac{k^2 \cos^2 c}{\mathrm{C}^2}.$$

Les valeurs de a, b, c, seront données dans chaque cas ; on connaîtra donc la vitesse ω ; et les équations précédentes détermineront les angles α, β, γ, c'est-à-dire, la direction de l'axe instantané.

Si la perpendiculaire à la section HEK coïncide avec l'un des trois axes principaux, de sorte qu'on ait, par exemple, $a = 90°$, $b = 90°$, $c = 0$, il en résultera $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 0$, et l'axe instantané coïncidera aussi avec le même axe principal ; d'où il suit qu'un corps libre, qui est frappé dans le plan de deux des trois axes principaux relatifs à son centre de gravité, commencera à tourner autour du troisième axe. En mettant pour k sa valeur, celle de la vitesse initiale de rotation sera, dans ce cas,

$$\omega = \frac{\mathrm{MV}f}{\mathrm{C}}.$$

Réciproquement, il est aisé de conclure des équations précédentes que le mobile ne peut commencer à tourner autour de la perpendiculaire au plan de la section HEK, de manière que α, β, γ, soient égaux aux angles a, b, c, ou à leurs supplémens, à moins que cette perpendiculaire ne soit un des axes principaux qui se coupent au point G.

Lorsque le mobile sera une sphère homogène ou composée de couches concentriques, la perpendiculaire EF passera par le point G, qui sera son centre de figure. On aura donc $f = 0$, $k = 0$, $\omega = 0$; en sorte que le mobile ne prendra aucun mouvement de rotation. Quand on parvient, par une percussion, à faire tourner sur elle-même une sphère entièrement libre, c'est toujours parce que le corps choquant glisse plus ou moins sur cette sphère, et le mouvement de rotation est alors produit par le frottement qui a lieu pendant la durée du choc.

Quelle que soit la forme du corps choqué, si le corps choquant s'y attache, les formules précédentes auront encore lieu, en y mettant la quantité de mouvement du second corps avant le choc, à la place de MV, et prenant pour f la perpendiculaire abaissée du centre de gravité des deux masses, sur la direction primitive du centre de gravité du second corps : A, B, C, seront alors les momens d'inertie principaux du corps formé des deux masses réunies.

438. Occupons-nous maintenant du mouvement de la masse M au bout d'un temps quelconque t, et

considérons successivement ses mouvemens de translation et de rotation, rapportés l'un et l'autre à son centre de gravité.

1° A cet instant, soient X, Y, Z, les composantes parallèles aux axes des x, y, z, de la force accélératrice donnée qui agit sur l'élément quelconque dm; les forces perdues par ce point matériel, pendant l'instant dt, seront (n° 391)

$$\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)dm,\ \left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)dm,\ \left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)dm,$$

parallèlement aux mêmes axes. Le mobile étant entièrement libre, il faudra pour l'équilibre des forces perdues par tous ses élémens, que les intégrales de ces quantités, étendues à la masse entière, soient égales à zéro; par conséquent, on aura

$$\int\frac{d^2x}{dt^2}dm=\int Zdm,\ \int\frac{d^2y}{dt^2}dm=\int Ydm,\ \int\frac{d^2z}{dt^2}dm=\int Zdm.$$

Mais en différentiant de nouveau les équations (1), on a

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\int\frac{d^2x}{dt^2}dm,\ M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\int\frac{d^2y}{dt^2}dm,\ M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\int\frac{d^2z}{dt^2}dm;$$

il en résultera donc

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\int Xdm,\ M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\int Ydm,\ M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\int Zdm;\qquad(3)$$

d'où l'on conclut que pendant toute la durée du mouvement, le centre de gravité G du mobile se meut comme si sa masse entière M y était concentrée, et que les forces motrices qui agissent sur tous ses points, ou leurs composantes, y fussent appliquées parallèlement à leurs directions.

2° Après avoir détruit, comme dans le n° 436, le mouvement de translation initial du mobile, supposons qu'à chaque instant on communique à tous ses points des accroissemens de vitesse infiniment petits, égaux et de direction contraire à celui qui a lieu, au même instant, pour le point G. Ce point sera réduit au repos pendant toute la durée du mouvement; et la rotation autour de ce même point ne sera point altérée. Or, cela revient évidemment à appliquer, pendant toute la durée du mouvement, à tous les élémens du mobile, des forces accélératrices égales et contraires à celle du centre de gravité; les forces motrices correspondantes étant parallèles et proportionnelles aux masses de ces points matériels, leur résultante passera constamment par le point G; on en pourra donc faire abstraction, en déterminant le mouvement de rotation autour de G. Par conséquent, ce mouvement sera le même, à chaque instant, que si G était un point fixe, et que les forces qui agissent, à cet instant, sur le mobile, ne fussent pas changées.

Ces deux théorèmes sont semblables à ceux des n°s 434 et 436, qui se rapportent à l'origine du mouvement; mais il ne s'ensuit pas que pendant toute sa durée, le mouvement de translation du mobile et son mouvement de rotation autour du centre de gravité, soient indépendans l'un de l'autre, et puissent se déterminer séparément, comme à cette origine. Les équations (3) seront celles du mouvement de translation, et les équations (7) et (a) des n°s 410 et 412, celles du mouvement de rotation, en prenant, dans celles-ci, le centre de gravité G pour l'origine des coordonnées. Or, quand les forces motrices appliquées aux différens points du mobile dépendront de leurs positions absolues dans l'espace, les coordonnées de ces points, dont ces forces seront des fonctions données, entreront à la fois dans ces systèmes d'équations différentielles, qui ne pourront plus s'intégrer séparément, et les deux mouvemens qui dépendent de ces équations, influeront l'un sur l'autre. On ne pourra, généralement, intégrer ces équations différentielles simultanées et déterminer les deux mouvemens du mobile, que par approximation; toutefois, ils seront indépendans l'un de l'autre dans deux cas particuliers que nous allons considérer.

439. Si le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la pesanteur, les équations (3) seront celles du mouvement d'un point matériel pesant, dans le vide; quels que soient la forme du corps solide et son mouvement autour de son centre de gravité, ce point décrira donc dans l'espace une parabole tangente à la direction de sa vitesse initiale, dont le paramètre dépendra de la grandeur de cette vitesse; et son mouvement sur cette courbe sera le même que celui d'un point matériel isolé (n° 208). D'un autre côté, le poids du corps étant une force appliquée constamment à son centre de gravité, il n'aura aucune influence sur le mouvement de rotation autour de ce point, qui sera uniquement dû aux percussions initiales, et le même que si le centre de gravité ne se déplaçait pas.

Supposons, par exemple, que le corps soit un ellipsoïde homogène frappé par un autre corps qui le touche au point E de sa surface (fig. 95); la

droite GD, parallèle à la normale EF, sera la tangente à la parabole que le point G va décrire; et l'on construira aisément cette courbe, d'après la vitesse initiale du point G, que je représenterai par V. Concevons, de plus, que la section HEK du point G et de la droite EF comprenne deux des axes de figure de l'ellipsoïde; a et b étant leurs demi-longueurs, C le moment d'inertie par rapport au troisième axe, et M la masse du corps, on aura (nº 370.)

$$C = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

Or, le mobile devra tourner autour du point G, comme s'il était dénué de pesanteur, et que ce point ne prît aucun mouvement; mais alors l'axe perpendiculaire à la section HEK demeurerait tout entier immobile (nºs 389 et 437); et sa vitesse angulaire de rotation serait donnée par la formule relative au mouvement initial d'un corps solide autour d'un axe fixe. Donc, en la désignant par ω, observant que la quantité de mouvement imprimée au mobile est équivalente à MV, et appelant f la perpendiculaire GL abaissée du point G sur la droite EF, nous aurons, d'après la formule (1) du nº 386,

$$\omega = \frac{MVf}{C}.$$

ou bien, en mettant pour C sa valeur,

$$\omega = \frac{5Vf}{a^2 + b^2}$$

Les deux vitesses ω et V sont ainsi liées l'une à l'autre, parce qu'elles résultent toutes deux d'une même percussion.

Ainsi, tous les points du mobile décriront des paraboles parallèles à la trajectoire de son centre de figure; et, en même temps, le corps tournera uniformément autour de l'axe perpendiculaire à la section HEK, qui sera emporté en restant constamment parallèle à lui-même.

440. Si le mobile est une sphère homogène ou composée de couches concentriques, dont tous les points soient attirés ou repoussés en raison inverse du carré des distances, par les points d'autre corps en repos ou en mouvement, la résultante de toutes ces forces sera la même que si la masse entière du mobile était réunie à son centre de gravité; car chacune d'elles sera égale et contraire à la réaction de la sphère sur le centre dont elle émane. Par conséquent, le centre de gravité se mouvra comme un point isolé, soumis à des attractions ou répulsions données; et le mouvement de rotation du mobile sera indépendant de ces forces, et le même que si le centre de gravité demeurait en repos; en sorte que, dans ce cas, les deux mouvemens de translation et de rotation seront encore indépendans l'un de l'autre.

Abstraction faite de la non-sphéricité parfaite des couches de la terre, elle tournerait donc constamment et uniformément autour d'un de ses diamètres, qui serait toujours le même et demeurerait toujours parallèle à lui-même; en même temps le mouvement elliptique de son centre de gravité autour du soleil serait troublé par l'action des autres planètes, mais rigoureusement indépendant du mouvement de rotation.

441. Il n'en est plus de même lorsqu'on a égard à l'aplatissement du sphéroïde terrestre. D'abord, si l'axe de rotation n'a pas coïncidé exactement, à l'origine du mouvement, avec l'axe de figure, l'axe instantané de rotation oscillera autour de cette droite (nº 421), et rencontrera successivement la terre en différens points de sa surface. Les pôles et l'équateur se déplaceraient donc à la surface du globe; et il en résulterait, pour les différens lieux de la terre, des changemens dans leurs latitudes géographiques. L'amplitude de ces oscillations serait arbitraire; mais leur durée dépendrait des différences entre les momens d'inertie de la terre; et d'après ce qu'on sait sur ces différences, cette durée serait d'un peu moins d'une année. Or, dans cet intervalle de temps, les observations les plus précises ne font connaître aucune variation dans la distance du *zénith* d'un lieu déterminé de la terre au point où l'axe de rotation va rencontrer le ciel. Il en faut donc conclure que les oscillations dont il s'agit, si elles ont existé autrefois, sont devenues tout-à-fait insensibles à l'époque actuelle; en sorte qu'il n'existe plus maintenant que les forces permanentes, provenant des attractions du soleil, de la lune et des planètes sur le sphéroïde terrestre, qui puissent faire varier la direction de l'axe de rotation de la terre.

Or, à raison de la non-sphéricité des couches de la terre, ces forces renferment une partie, à la vérité très petite par rapport aux attractions sur le sphéroïde entier, dont la direction ne passe pas constamment par son centre de gravité. C'est cette partie qui produit les perturbations du mouvement de rotation, savoir, la *précession des équinoxes* et la *nutation* de l'axe de la terre.

En vertu de la précession, la rétrogradation annuelle des équinoxes sur l'écliptique fixe de 1800 est de 50″,36482; sur le plan de l'orbite de la terre, rendu mobile par l'action des autres planètes, c'est-à-dire, sur l'écliptique vraie, elle est un peu moindre, et égale à 50″,23427, comme nous l'avons déjà dit dans un autre endroit (nº 219).

La nutation est une oscillation de l'axe de la terre, qui s'approche et s'éloigne alternativement de la perpendiculaire au plan de l'écliptique: elle est due à l'attraction de la lune; sa période est celle du mouvement des nœuds de l'orbite lunaire, ou d'environ 18 ans; et son amplitude s'élève à 9″,40 (nº 223), en supposant la masse de la lune égale à un soixante-quinzième de celle de la terre.

Les actions du soleil et de la lune sur le sphé-

roïde terrestre ne produisent qu'une variation très lente et qui ne sera sensible qu'après une longue suite de siècles, dans l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique; la diminution annuelle de l'obliquité de l'écliptique, que l'on observe et qui s'élevait à $0'',45714$ au commencement du siècle, est due aux actions planétaires qui font varier le plan de l'orbite de la terre (n° 244).

Un examen approfondi de la question a fait voir que les mêmes forces qui produisent les variations que nous venons d'indiquer dans la direction absolue, ou rapportée à des lignes fixes, de l'axe de rotation de la terre, sont impuissantes pour déplacer cet axe, dans l'intérieur du sphéroïde, non plus que pour faire varier sa vitesse de rotation. Ainsi, la terre tourne constamment autour d'un même diamètre, qui est son axe de figure; et son mouvement est uniforme autour de cette droite mobile, dont la direction change continuellement dans l'espace. Le jour sidéral est donc constant; il en résulte que le jour moyen (n° 111) l'est aussi, ou, du moins, il n'est soumis qu'à une variation séculaire tout-à-fait insensible; et l'une ou l'autre de ces durées peuvent être prises pour unité de temps.

Pour tout ce qui concerne cette importante théorie, dont je n'ai pu ici qu'indiquer succinctement les principaux résultats, je renverrai à mon Mémoire *sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité*, inséré dans le tome VII des *Mémoires de l'Académie des sciences*.

442. L'invariabilité du jour est confirmée par les observations les plus anciennes, qui font voir que sa durée n'a pas changé d'un centième de seconde, par exemple, depuis 2500 ans, ainsi que nous allons l'expliquer.

Si la durée du jour était variable, les longitudes et les latitudes du soleil, de la lune et des autres corps célestes, calculées en la supposant constante, ne s'accorderaient plus avec les longitudes et les latitudes observées; le mouvement de la lune autour de la terre, à cause de sa rapidité, serait le plus propre à nous éclairer sur ce point; et si la variation du jour était progressive, les différences entre le calcul et l'observation seraient d'autant plus grandes qu'elles se rapporteraient à des époques plus éloignées de la nôtre.

Cela étant, soient l et l' les longitudes vraies de la lune et du soleil à une époque déterminée. Si l'on sait qu'à cette époque il y a eu une éclipse de lune ou de soleil, la différence $l-l'$ devra s'écarter d'un multiple de 180°, d'une quantité moindre que la demi-somme des diamètres du soleil et de la lune; si donc on appelle δ cette différence, abstraction faite du multiple de 180° qu'elle peut contenir, il faudra que δ n'excède pas un demi-degré, et soit même, en général, beaucoup au-dessous de cette limite. Or, on a calculé, dans la *Connaissance des Temps* de 1800, les valeurs de δ qui répondent à 27 éclipses observées par les Chaldéens, les Grecs et les Arabes; les valeurs qu'on a trouvées pour cette différence sont tantôt en plus, tantôt en moins, et toutes très petites. La plus grande, qui répond à une éclipse observée 382 ans avant l'ère chrétienne, s'élève à $-27'41''$; pour l'éclipse la plus ancienne, observée par les Chaldéens 720 ans avant notre ère, la valeur de δ est $2''$ seulement. Cette comparaison prouve l'exactitude des tables lunaires que nous possédons, et la nécessité des inégalités séculaires que Laplace y a introduites. Elle fait aussi voir que la durée du jour, qu'on a supposée constante dans le calcul des longitudes de la lune et du soleil, n'est, en effet, sujette à aucune variation progressive. Mais pour qu'il ne reste aucun doute sur ce point important, calculons la valeur de δ, correspondante à l'éclipse la plus ancienne, qui résulterait d'une semblable variation, si elle existait.

443. Prenons pour unité l'intervalle de temps qui forme aujourd'hui le jour moyen; supposons que, depuis une époque très éloignée, cette durée ait diminué, d'un jour au suivant, de la quantité constante α. Soit n le moyen mouvement de la lune, c'est-à-dire, le nombre de degrés qu'elle décrit dans chaque unité de temps, abstraction faite des inégalités de son mouvement vrai; les arcs parcourus aujourd'hui et les jours précédens seront n, $n(1+\alpha)$, $n(1+2\alpha)$, $n(1+3\alpha)$, et l'arc décrit pendant un très grand nombre t de jours, sera $nt+\frac{1}{2}\alpha nt(t-1)$, ou, à très peu près, $nt+\frac{1}{2}\alpha nt^2$. Le terme nt est déjà compris dans la valeur de l, calculée d'après les tables, en considérant le jour comme constant; la variation du jour augmenterait donc de $\frac{1}{2}\alpha nt^2$, la longitude vraie de la lune, à une époque séparée de nous par un nombre t de jours. Celle du soleil, à la même époque, serait augmentée de $\frac{1}{2}\alpha n't^2$, en appelant n' le moyen mouvement diurne du soleil; à raison seulement de la variation du jour, on aurait donc à cette époque

$$\frac{1}{2}\alpha(n-n')t^2=\delta; \qquad (1)$$

et, par rapport à l'éclipse observée 720 ans avant notre ère, ce serait toute la valeur de la différence des longitudes de la lune et du soleil, puisque cette différence calculée en supposant le jour constant, n'est que de $2''$, ou à peu près nulle.

Soit i le nombre de siècles contenus dans le nombre t de jours; on aura

$$t=(36525)i.$$

Soient aussi

$$\mathfrak{C}=(36525)\alpha,\quad m=(36525)n,\quad m'=(36525)n':$$

l'équation (1) se changera en celle-ci :

$$\frac{1}{2}\mathfrak{C}(m-m')i^2=\delta,$$

dans laquelle $\mathfrak{C}$ sera maintenant la diminution séculaire du jour, et m et m' représenteront les mouve-

mens séculaires de la lune et du soleil. D'après leurs valeurs déterminées au moyen des observations modernes, on a

$$m - m' = 445268^{\circ},$$

en négligeant les fractions de degrés. Or, si l'on suppose que le jour a diminué d'un dix-millionième depuis la plus ancienne éclipse chaldéenne, on aura

$$C\acute{s} = 0{,}0000001,\ \acute{s} = 25{,}32\,;$$

et il en résultera

$$\acute{s} = 34'\,;$$

valeur qui rendrait impossible l'éclipse observée.

On ne peut donc pas admettre que la durée du jour ait diminué de cette fraction, un peu moindre qu'un centième de seconde, dans un intervalle de temps qui surpasse vingt-cinq siècles. S'il existait des variations périodiques dans la durée du jour, il en résulterait des illusions dans la mesure du temps, qui produiraient des inégalités apparentes dans les mouvemens des astres. Ces inégalités seraient faciles à distinguer, parce qu'elles suivraient toutes la même loi, pour la lune, le soleil et les planètes, et que leurs grandeurs seraient proportionnelles, pour chacun de ses corps, à la rapidité de son mouvement. Les astronomes n'ont reconnu aucune inégalité de cette nature dans les mouvemens des corps célestes. Ainsi l'observation, d'accord avec la théorie, prouve que la durée du jour moyen n'est sujette à aucune variation, périodique ou progressive, qui ait une grandeur sensible.

444. Revenons actuellement à l'objet spécial de ce chapitre.

Lorsqu'un corps solide se meut dans l'air ou dans un autre fluide, les résistances exercées sur tous les points de sa surface doivent être transportées parallèlement à elles-mêmes, avec le poids du corps, à son centre de gravité ; et le mouvement de ce centre est celui d'un point matériel pesant, dans un milieu résistant; la masse de ce point étant celle du corps, et sa force motrice, provenant de la résistance, une force dont les composantes dépendront de la forme du mobile, des vitesses des différens élémens de sa surface, et des condensations ou dilatations du fluide en contact avec ces élémens. En même temps le mobile tournera autour de son centre de gravité, comme si la vitesse de ce point était nulle, et que les vitesses des points de la surface fussent, néanmoins, celles qui ont réellement lieu à chaque instant. Il en résulte que la résistance du milieu influera, à la fois, sur le mouvement de translation et sur le mouvement de rotation du mobile, et que, pour un corps de forme quelconque, ces deux mouvemens dépendront l'un de l'autre et ne pourront pas être déterminés séparément.

Si le mobile est une sphère homogène ou composée de couches concentriques, à laquelle on n'ait imprimé aucune vitesse de rotation à l'origine du mouvement, il ne s'en produira aucune pendant toute la durée de ce mouvement, qui sera un simple mouvement de translation, dans lequel tous les points du mobile auront à chaque instant des vitesses parallèles et égales entre elles. En effet, si l'on mène alors par le centre de la sphère, une tangente à la courbe qu'il décrit, il est évident que tout sera semblable autour de cette droite, soit pour les vitesses des points de la surface, soit pour les condensations ou dilatations du fluide environnant. Par conséquent, la résultante des résistances exercées sur tous les points de la surface, passera constamment par le centre de la figure, qui est aussi le centre de gravité, et elle ne pourra produire aucun mouvement de rotation. Les condensations ou dilatations du fluide en contact avec les élémens de la surface, dépendront de la vitesse commune à tous les points du mobile, et seront, d'ailleurs, différentes pour les différentes sections perpendiculaires à la tangente qu'on a menée par le centre. Donc aussi la résultante des résistances extérieures, qui coïncidera avec cette tangente, ne pourra dépendre que de cette vitesse, de l'étendue de la surface, et de la force élastique naturelle du fluide; et le mouvement du centre de gravité sera celui d'un point matériel isolé, dont la masse est celle du corps, et auquel on applique la résultante dont il s'agit, continuellement dirigée en sens contraire de sa vitesse, et, en outre, le poids du mobile. C'est ce que nous avons supposé dans le n° 210, à l'égard des projectiles de l'artillerie, supposés parfaitement sphériques et homogènes.

Dans ce cas, le centre d'un boulet ne peut pas sortir du plan vertical passant par la direction de sa vitesse initiale, et par rapport auquel tout est semblable d'un côté et de l'autre. Mais si le projectile s'écarte un peu de la forme sphérique, ou s'il n'a pas la même densité dans toute son étendue, la résultante des résistances extérieures qui sont normales à sa surface, ne passera plus constamment par le centre de gravité; elle produira donc un mouvement de rotation ; et si elle n'est pas toujours comprise dans le plan vertical où le centre de gravité commence à se mouvoir, elle le fera sortir de ce plan ; en sorte que la trajectoire du projectile, rapportée à son centre de gravité, ne sera plus une courbe plane. Tout cela est facile à concevoir, à l'égard d'un projectile non sphérique ou non homogène; mais j'ajouterai que, abstraction faite du défaut d'homogénéité ou de sphéricité, si le boulet a reçu, à la bouche du canon, une vitesse de rotation, le frottement de sa surface contre l'air, pendant son mouvement, pourra encore faire sortir d'un plan vertical son centre de gravité et de figure.

445. Pour le faire voir, soient G (fig. 97) le centre de gravité et de figure d'un corps sphérique et homogène, et AGB le diamètre tangent à sa trajectoire. Supposons, pour plus de simplicité, que l'axe

de rotation qui passe par le point G, soit perpendiculaire à ce diamètre. Soient ADBE la section du mobile, perpendiculaire à cet axe, et DGE un diamètre de cette section, qui coupe AGB à angle droit. Supposons aussi que le mouvement du point G a lieu de A vers B, ou dans le sens indiqué par la flèche *s*, et le mouvement de rotation dans le sens indiqué par les flèches placées en A, D, B, E. Le frottement de chaque élément de la surface contre l'air, qui naîtra du mouvement de rotation, sera une force tangente à la surface, et dirigée en sens contraire de ce mouvement. Sur chaque section parallèle à ADBE, il variera d'un point à un autre, à raison de la différence de densité du fluide. En avant du projectile, le fluide sera condensé; en arrière, il sera dilaté; par conséquent, le frottement sera le plus grand du côté du point B, et le plus petit du côté du point A. On conclut de là que si l'on transporte au point G, parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces provenant du frottement exercé à la surface, il en résultera une force dirigée suivant la partie GD du diamètre DGE. J'appellerai F cette force, P le poids de corps, et R la résistance proprement dite du milieu, transportée au point G, et dirigée suivant la partie GA du diamètre AGB. La force motrice du point G sera la résultante des trois forces F, P, R, et sa force accélératrice, cette résultante divisée par la masse du projectile.

Cela posé, si l'axe de rotation est vertical, et compris, par conséquent, dans le plan des deux forces P et R, la direction GD de la force F sera perpendiculaire à ce plan; elle fera donc sortir le mobile de ce plan vertical, en le poussant du côté du point D; et, dans ce cas, la trajectoire du point G sera une courbe à double courbure. Si, au contraire, l'axe de rotation est horizontal, la direction GD de la force F sera comprise dans le plan vertical des forces P et R, qui sera celui de la section ADBE; par conséquent, le point G ne sortira pas de ce plan, et sa trajectoire sera plane.

446. Dans ce dernier cas, on voit que la composante verticale de la force F augmentera ou diminuera le poids P, selon que la flèche A sera dirigée vers le haut ou vers le bas. La force F sera verticale, et cette diminution ou augmentation de poids, la plus grande, quand la direction AB sera horizontale. Ainsi, dans le tir horizontal, et en supposant que le boulet tourne autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la direction du tir, le frottement du projectile contre l'air augmentera son poids et diminuera la portée, lorsque la partie antérieure de ce corps tournera de bas en haut; et quand cette partie tournera de haut en bas, le frottement diminuera le poids et augmentera la portée. Il pourrait même arriver, dans ce second cas, que la trajectoire devînt convexe vers le terrain : il suffirait, pour cela, que la rotation fût assez rapide pour rendre la force F plus grande que le poids P; mais alors le frottement diminuerait la vitesse de rotation, la force F décroîtrait, et finirait par devenir moindre que P; ce qui ramènerait la trajectoire à sa forme concave vers le terrain, comme à l'ordinaire.

Ces considérations jointes à celles du numéro précédent, montrent qu'indépendamment du défaut de sphéricité ou d'homogénéité du boulet, le frottement de sa surface contre l'air, provenant du mouvement de rotation qu'il peut avoir contracté en roulant dans l'ame du canon, est une circonstance qui peut influer, soit sur la justesse du tir, parce que ce frottement fait sortir le centre du boulet du plan vertical de projection, soit sur l'inégalité des portées, à cause que cette force augmente ou diminue le poids du mobile. Toutefois, on doit observer qu'aucun de ces effets n'aura lieu, si le boulet tourne autour du diamètre AB, dans le sens duquel il se meut; car alors le frottement est égal et contraire pour deux élémens opposés de chaque section de la surface, perpendiculaire à l'axe de rotation; d'où il résulte que les forces provenant du frottement exercé sur tous les élémens, étant transportées au centre de gravité, s'y détruiront deux à deux; en sorte que le mouvement de ce point ne sera pas dérangé par le frottement total, dû à la rotation.

CHAPITRE VI.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE PESANT SUR UN PLAN DONNÉ.

§ Ier. *Cas où l'on n'a pas égard au frottement.*

447. Pour simplifier, je supposerai que le mobile ne touche le plan donné qu'en un seul point, que j'appellerai K, et qui variera, en général, sur sa surface et sur le plan. Les forces perdues dans chaque instant infiniment petit devant se faire équilibre, il faudra qu'elles se réduisent à une seule force, passant par le point K, normale au plan donné, et dirigée de manière qu'elle tende à appuyer le mobile sur ce plan. Cette résultante sera la pression que ce plan éprouvera, et qui sera détruite par sa résistance, que je représenterai par R. En joignant au poids du corps la force R, de grandeur inconnue, on pourra faire abstraction du plan donné, et considérer le mobile comme entièrement libre.

Son centre de gravité, que j'appellerai G, se mouvra donc comme un point matériel isolé, dont la masse serait celle du mobile, et auquel on appliquerait, parallèlement à leurs directions, le poids de ce corps et la force R. Au bout du temps t, je représenterai par x_1 y_1, z_1, les coordonnées du point G, rapportées à des axes fixes et rectangulaires, et par λ, μ, ν, les angles que la direction de la force R fait avec des parallèles à ces axes, menées par le point K. En supposant l'axe des z_1 positives, vertical et dirigé de bas en haut, et en appelant g la pesanteur et M la masse du corps, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= R\cos\lambda, \\ M\frac{d^2 y_1}{dt^2} &= R\cos\mu, \\ M\frac{d^2 z_1}{dt^2} &= R\cos\nu - Mg, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

pour les trois équations différentielles du mouvement du point G. Si le plan donné est fixe, les angles λ, μ, ν, seront constans et donnés; s'il est en mouvement, nous supposerons que ce mouvement soit connu, et ne puisse pas être modifié par celui du corps : λ, μ, ν, seront alors des fonctions données de t. Le mobile étant un corps pesant, il faudra, pour qu'il ne se détache pas de ce plan, fixe ou mobile, qu'il soit toujours situé au-dessus; en sorte que la composante verticale R cos ν de la résistance du plan sera constamment positive, et ν un angle aigu : les deux autres angles donnés λ et μ pourront être aigus ou obtus.

En même temps, le corps tournera autour du point G comme autour d'un point fixe, en vertu des forces R et Mg, appliquées aux point K et G (n° 438); mais le poids Mg n'influera pas sur ce mouvement de rotation, dont les équations différentielles ne dépendront que de la force R. Pour les former, on prendra pour les seconds membres des équations (a) du n° 412, les momens multipliés par dt, de la force R, par rapport aux trois axes principaux du mobile, qui se coupent au point G. En appelant α, β, γ, les coordonnées du point K rapportées à ces axes, et λ', μ', ν', les angles que fait la direction de la force R avec les parallèles à ces mêmes axes, menées par le point K, ces momens seront

$$\begin{aligned} &\alpha R\cos\mu' - \beta R\cos\lambda', \\ &\gamma R\cos\lambda' - \alpha R\cos\nu', \\ &\beta R\cos\nu' - \gamma R\cos\mu', \end{aligned}$$

et les équations (a) deviendront

$$\left.\begin{aligned} Cdr + (B - A)\,pqdt &= R\,(\alpha\cos\mu' - \beta\cos\lambda')\,dt, \\ Bdq + (A - C)\,rpdt &= R\,(\gamma\cos\lambda' - \alpha\cos\nu')\,dt, \\ Adp + (C - B)\,qrdt &= R\,(\beta\cos\nu' - \gamma\cos\mu')\,dt; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

A, B, C, désignant les momens d'inertie qui répondent respectivement aux mêmes axes que les angles λ', μ', ν', et que les composantes p, q, r, de la vitesse angulaire de rotation (n° 407).

Il y faudra joindre les équations (7) du n° 410; savoir :

$$\left.\begin{aligned} pdt &= \sin\theta \sin\varphi d\psi - \cos\varphi d\theta, \\ qdt &= \sin\theta \cos\varphi d\psi + \sin\varphi d\theta, \\ rdt &= d\varphi - \cos\theta d\psi. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nous supposerons que les neuf cosinus a, b, etc., dont les valeurs en fonctions de φ, ψ, θ, ont été données dans le n° 378, sont ceux des angles que font les axes fixes des coordonnées x_1, y_1, z_1, du point G, avec des parallèles aux axes principaux relatifs à ce point, menées par l'origine de ces coordonnées; et, d'après la signification des angles λ, μ, ν, λ', μ', ν', et l'équation (2) du n° 9, nous aurons alors

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda' &= a\cos\lambda + a'\cos\mu + a''\cos\nu, \\ \cos\mu' &= b\cos\lambda + b'\cos\mu + b''\cos\nu, \\ \cos\nu' &= c\cos\lambda + c'\cos\mu + c''\cos\nu, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

pour les valeurs de $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$ $\cos\nu'$, qu'on devra substituer dans les équations (2).

La position du mobile à un instant quelconque, par rapport aux plans fixes des x_1, y_1, z_1, sera complètement déterminée au moyen de ces coordonnées et des trois angles φ, ψ, θ, précédemment définis (n° 378); la position de l'axe instantané de rotation, dans l'intérieur du mobile, et sa vitesse autour de cet axe, dépendront, en outre, des trois quantités p, q, r : la solution du problème consistera donc à déduire des neuf équations (1), (2), (3), les valeurs de ces neuf inconnues en fonctions de t; mais comme ces équations renferment la force R et les trois coordonnées α, β, γ, qui sont aussi inconnues, il faudra encore quatre autres équations, que l'on obtiendra de la manière suivante.

448. Soit L une fonction donnée de α, β, γ, et représentons par $L = 0$, l'équation de la surface du mobile, rapportée à ses axes principaux qui se coupent au point G. Si nous faisons

$$V = \left[\left(\frac{dL}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dL}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dL}{d\gamma}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

nous aurons (n° 21)

$$\cos\lambda' = V\frac{dL}{d\alpha}, \quad \cos\mu' = V\frac{dL}{d\beta}, \quad \cos\nu' = V\frac{dL}{d\gamma}, \quad (5)$$

où l'on prendra le signe de V de manière que les angles λ', μ', ν', se rapportent à la partie intérieure de la normale à la surface du mobile, qui sera la partie supérieure de la normale au plan donné. L'une de ces équations sera une suite des deux autres. En mettant les formules (4) à la place de $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, et les joignant ensuite à l'équation $L=0$, on aura déjà trois des quatre équations demandées.

Si l'on représente par x, y, z, les coordonnées courantes du plan donné, rapportées aux mêmes axes fixes que x_1, y_1, z_1, et en observant que λ, μ, ν, sont les angles que fait la normale à ce plan avec ces axes, on aura pour son équation,

$$x.\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = \zeta;$$

ζ étant une quantité donnée, qui sera constante, quand le plan donné sera fixe, et, généralement, une fonction donnée de t. D'ailleurs, en supposant, que x, y, z, répondent au point K qui appartient à ce plan, on aura, d'après les formules du n° 377,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + a\alpha + b\beta + c\gamma, \\ y &= y_1 + a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \\ z &= z_1 + a''\alpha + b''\beta + c''\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Les valeurs de x, y, z, devront donc satisfaire à l'équation précédente; en les substituant dans cette équation, et ayant égard aux formules (4), on aura

$$x_1\cos\lambda + y_1\cos\mu + z_1\cos\nu + \alpha\cos\lambda' + \beta\cos\mu' + \gamma\cos\nu' = \zeta, \quad (7)$$

pour la quatrième équation qu'il s'agissait d'obtenir.

Lorsque le mobile sera terminé par une pointe, et qu'il touchera constamment le plan donné par son extrémité, les coordonnées α, β, γ, du point K seront constantes, et données d'après la position de cette pointe sur la surface et ses distances aux plans des axes principaux du mobile, qui se coupent au point G. Mais les équations (5) n'auront plus lieu en un point de cette nature; l'équation (7), qui exprime que ce point appartient au plan donné, subsistera toujours, et il suffira de la joindre aux équations du numéro précédent, pour déterminer les neuf inconnues du problème et la grandeur de la force R que ces équations renferment.

449. Quand le plan donné sera fixe et horizontal, on le prendra pour le plan des coordonnées x et y; il en résultera

$$\cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 1, \quad \zeta = 0;$$

ce qui réduira les formules (4) à

$$\cos\lambda' = a'', \quad \cos\mu' = b'', \quad \cos\nu' = c''.$$

En vertu des deux premières équations (1), le mouvement horizontal du point G sera rectiligne et uniforme; sa vitesse, parallèlement au plan donné, dépendra de la percussion horizontale que le mobile aura éprouvée à l'origine du mouvement. La troisième équation (1) donnera

$$R = M\left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} + g\right);$$

ce qui fera connaître la valeur de R, quand celle de s_1 aura été déterminée. En même temps, les équations (2) deviendront

$$\left.\begin{aligned} Cdr + (B - A)\,pqdt &= M\left(\frac{d^2 s_1}{dt^2} + g\right)(\alpha b'' - \beta a'')\,dt, \\ Bdq + (A - C)\,rpdt &= M\left(\frac{d^2 s_1}{dt^2} + g\right)(\gamma a'' - \alpha c'')\,dt, \\ Adp + (C - B)\,qrdt &= M\left(\frac{d^2 s_1}{dt^2} + g\right)(\beta c'' - \gamma b'')\,dt; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

et l'équation (7) se changera en celle-ci :

$$s_1 + a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0, \qquad (9)$$

de laquelle on tirera la valeur de s_1, pour la substituer dans les équations précédentes.

Ainsi, dans ce cas, le problème dépendra des équations (3) et (8), qui serviront à déterminer p, q, r, φ, ψ, θ, en fonctions de t, comme dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Si le point K varie à la surface du mobile, il faudra éliminer de ces équations les quantités α, β, γ, au moyen de $L = 0$ et des formules (5), qui seront maintenant

$$a'' = V\frac{dL}{d\alpha}, \quad b'' = V\frac{dL}{d\beta}, \quad c'' = V\frac{dL}{d\gamma} \qquad (10)$$

Si, au contraire, K est constamment le même point de la surface du mobile, on mettra dans les équations (8), à la place de α, β, γ, les coordonnées constantes et données de ce point. Ce second cas sera celui du mouvement de la *toupie* sur un plan horizontal, abstraction faite du frottement de la pointe K contre ce plan.

Dans l'état d'équilibre d'un corps pesant sur un plan fixe et horizontal, la droite GK sera verticale; si cet état est stable, et qu'après en avoir écarté le mobile un tant soit peu, on l'abandonne à lui-même, il fera des oscillations très petites que l'on déterminera, aussi approximativement qu'on voudra, au moyen des équations précédentes. Je me contente d'indiquer cet exemple, comme un exercice de calcul. On pourra supposer, pour fixer les idées et simplifier la question, que le mobile soit un ellipsoïde homogène, ou bien une sphère dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre de figure.

450. On peut obtenir deux intégrales premières des équations (8).

D'abord en les ajoutant après les avoir multipliées par c'', b'', a'', leurs seconds membres disparaissent, et, en intégrant, on trouve, comme dans le n° 415,

$$Aa''p + Bb''q + Cc''r = l;$$

l étant une constante arbitraire qui exprimera la somme des momens des quantités de mouvement de tous les points du corps, par rapport à un axe vertical passant par le point G.

Pour obtenir une seconde intégrale de ces mêmes équations (8), je les ajoute, après les avoir multipliées par r, q, p; ce qui donne

$$\begin{aligned} Crdr + Bqdq + Apdp = M\left(\frac{d^2 s_1}{dt^2} + g\right)[\alpha(b''r - c''q) \\ + \beta(c''p - a''r) + \gamma\,(a''q - b''p)]\,dt, \end{aligned}$$

ou bien, à cause des trois dernières équations (8) du n° 411,

$$Crdr + Bqdq + Apdp = M\left(\frac{d^2 s_1}{dt^2} + g\right)(\alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'').$$

En différentiant l'équation (9), par rapport à t, on a

$$ds_1 + \alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' = -(a''d\alpha + b''d\beta + c''d\gamma).$$

Or, le second membre de cette équation est nul, quand K est toujours le même point de la surface du mobile, puisque alors ses coordonnées α, β, γ, sont constantes. Il est encore zéro, lorsque K se déplace à cette surface; car, en vertu des équations (10), on a

$$a''d\alpha + b''d\beta + c''d\gamma = V\left(\frac{dL}{d\alpha}d\alpha + \frac{dL}{d\beta}d\beta + \frac{dL}{d\gamma}d\gamma\right) = VdL;$$

quantité nulle, à cause que l'on a $L = 0$ pendant toute la durée du mouvement, et, conséquemment, $dL = 0$. On aura donc, dans ces deux cas,

$$a da'' + C db'' + \gamma dc'' = - dz_1 ;$$

d'où il résulte

$$Crdr + Bqdq + Apdp + M\left(\frac{d^2 z_1}{dt^2} + g\right)dz_1 = 0,$$

et, en intégrant,

$$Cr^2 + Bq^2 + Ap^2 + M\left(\frac{dz_1^2}{dt^2} + 2gz_1\right) = h;$$

h étant la constante arbitraire.

Ces deux intégrales suffiront pour résoudre le problème, lorsqu'il s'agira d'un solide homogène terminé par une surface de révolution; ce qui a lieu, par exemple, dans le cas de la toupie. L'axe de figure est la droite GK; en supposant que C soit le moment d'inertie qui répond à cet axe, on aura

$$B = A, \quad a = 0, \quad C = 0;$$

γ sera la longueur de GK; et, d'après l'équation (9) et $c'' = \cos\theta$, on aura

$$z_1 = - \gamma \cos\theta,$$

pour l'ordonnée verticale du point G. La première équation (8) donnera $r = n$, en désignant par n une constante arbitraire qui représentera la vitesse de rotation du mobile autour de son axe de figure. Mais d'après les valeurs de a'' et b'' (n° 378), et les deux premières équations (3), on a

$$a''p + b''q = - \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}, \quad p^2 + q^2 = \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2};$$

les deux intégrales qu'on a trouvées deviendront donc

$$Cn \cos\theta - A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = l,$$

$$A\left(\sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2}\right) + M\left(\gamma^2 \sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} - 2\gamma g \cos\theta\right) = h,$$

en comprenant $-Cn^2$ dans la constante h.

Ces deux dernières équations feront connaître, au moyen des fonctions elliptiques, les valeurs de ψ et t en fonctions de θ, la troisième équation (3) donnera ensuite la valeur de φ; et le problème sera résolu, comme celui du n° 425, dont nous nous sommes occupés en détail.

451. Le mobile étant toujours un solide de révolution homogène et terminé par une pointe, et ce corps touchant constamment le plan donné, par l'extrémité K de cette pointe, supposons maintenant que ce plan soit en mouvement, de sorte que les angles λ, μ, ν, et la quantité ξ soient des fonctions données de t. L'axe de figure répondant au moment d'inertie C, les deux autres moments B et A seront égaux, les coordonnées a et c seront zéro, et γ exprimera la longueur de GK. En désignant par n une constante arbitraire, la première équation (2) donnera encore $r = n$; en sorte que la vitesse angulaire du mobile autour de son axe de figure, sera constante, comme dans le cas du plan fixe. Si l'on a égard aux formules (4), les deux autres équations (2) deviendront

$$\left.\begin{aligned} Adp + (A - C)\, npdt &= R\gamma\,(a \cos\lambda + a' \cos\mu + a'' \cos\nu)\, dt, \\ Adq - (A - C)\, nqdt &= - R\gamma\,(b \cos\lambda + b' \cos\mu + b'' \cos\nu)\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

L'équation (7) deviendra de même

$$x_1 \cos\lambda + y_1 \cos\mu + z_1 \cos\nu + \gamma\,(c \cos\lambda + c' \cos\mu + c'' \cos\nu) = \xi; \qquad (12)$$

et les équations (1) et (2) ne changeront pas.

Le système des équations (1), (3), (11), (12), devra donc servir à déterminer les neuf inconnues p, q, φ, ψ, θ, x_1, y_1, z_1, R; mais l'intégration rigoureuse de ces équations est impossible; et, pour en déduire des valeurs approchées des inconnues, qui ne soient pas très compliquées, on est obligé de restreindre la généralité de la question, par différentes suppositions que l'on énoncera à mesure qu'elles seront nécessaires.

452. Je supposerai, en premier lieu, que la rotation du mobile autour de son axe de figure est très rapide, et que les différens mouvemens du plan donné sont très lents par rapport à cette rotation; en sorte que, si, par exemple, la perpendiculaire au plan donné, menée par le point K, oscille de part et d'autre ou tourne autour de la verticale qui passe par ce même point, la durée de chaque oscillation ou de chaque révolution soit très grande, relativement à une révolution du mobile autour de l'axe KG, et de même, si le plan donné exécute des oscillations parallèlement à lui-même.

Je supposerai, secondement, que les angles θ et ψ varient aussi très lentement par rapport à l'angle φ,

hypothèse qui devra être confirmée *à posteriori*, par les valeurs que l'on obtiendra pour ces trois angles.

En négligeant, dans une première approximation, la différentielle $d\psi$ que contient la troisième équation (3), et en supposant qu'on ait $\varphi=0$ quand $t=0$, on aura $\varphi=nt$, à un instant quelconque. Au moyen des formules du n° 378, on aura alors

$$a\cos\lambda + a'\cos\mu + a''\cos\nu = P\sin nt + Q\cos nt,$$
$$b\cos\lambda + b'\cos\mu + b''\cos\nu = P\cos nt - Q\sin nt,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$P = \cos\lambda\cos\theta\sin\psi + \cos\mu\cos\theta\cos\psi - \cos\nu\sin\theta,$$
$$Q = \cos\lambda\cos\psi - \cos\mu\sin\psi;$$

et les équations (11) deviendront

$$Adq + (A - C)\,npdt = R\gamma(P\sin nt + Q\cos nt)dt,$$
$$Adp - (A - C)\,nqdt = R\gamma(Q\sin nt - P\cos nt)dt.$$

Or, dans la seconde hypothèse, les quantités P et Q varieront très lentement; il en sera de même, comme on le verra tout à l'heure, à l'égard de R; en intégrant ces équations, on pourra donc considérer, dans une première approximation, P, Q, R, comme des quantités constantes, et n'avoir égard qu'à la variation de $\sin nt$ et $\cos nt$ dans leurs seconds membres. Si m est une très petite fraction de n, et que le coefficient de $\sin nt$ contienne, par exemple, un terme qui ait $\cos mt$ pour facteur, $\sin nt$ devrait être remplacé par $\frac{1}{2}\sin(n+m)t + \frac{1}{2}\sin(n-m)t$; en regardant comme constant le coefficient de $\sin nt$, cela revient donc à négliger mt à l'égard de nt, du moins dans la première approximation.

De cette manière, les intégrales complètes des équations précédentes seront

$$p = D\sin\frac{(A-C)nt}{A} + E\cos\frac{(A-C)nt}{A} - \frac{R\gamma}{Cn}(Q\cos nt + P\sin nt),$$

$$q = D\cos\frac{(A-C)nt}{A} - E\sin\frac{(A-C)nt}{A} + \frac{R\gamma}{Cn}(Q\sin nt - P\cos nt);$$

D et E étant les deux constantes arbitraires. Pour les déterminer, je suppose qu'à l'origine du mouvement, l'axe instantané de rotation a coïncidé avec l'axe de figure; on aura alors $p=0$ et $q=0$, quand $t=0$; et si l'on désigne par P', Q', R', les valeurs de P, Q, R, qui ont eu lieu, à la même époque, il en résultera

$$E = \frac{\gamma R'Q'}{Cn},\quad D = \frac{\gamma R'P'}{Cn}.$$

Nous aurons donc, à un instant quelconque,

$$p = \frac{\gamma}{Cn}\left[R'\left(P'\sin\frac{(A-C)nt}{A} + Q'\cos\frac{(A-C)nt}{A}\right) - R(P\sin nt + Q\cos nt)\right],$$

$$q = \frac{\gamma}{Cn}\left[R'\left(P'\cos\frac{(A-C)nt}{A} - Q'\sin\frac{(A-C)nt}{A}\right) - R(P\cos nt - Q\sin nt)\right].$$

En faisant $\varphi = nt$ dans les deux premières équations (3), on en déduit,

$$\sin\theta d\psi = (p\sin nt + q\cos nt)dt,$$
$$d\theta = (q\sin dt - p\cos nt)dt;$$

et en y mettant pour p et q leurs valeurs précédentes, il vient

$$\sin\theta d\psi = \frac{\gamma dt}{Cn}\left[R'\left(P'\cos\frac{Cnt}{A} + Q'\sin\frac{Cnt}{A}\right) - RP\right],$$

$$d\theta = \frac{\gamma dt}{Cn}\left[R'\left(P'\sin\frac{Cnt}{A} - Q'\cos\frac{Cnt}{A}\right) + RQ\right].$$

Or, si C n'est pas une très petite fraction de A, il faudra, pour que θ et ψ varient très lentement, comme on l'a supposé, que les termes dépendans de $\sin\frac{Cnt}{A}$ et $\cos\frac{Cnt}{A}$ disparaissent dans ces formules; condition que l'on remplira toujours, en supposant qu'à l'origine du mouvement, l'axe de figure KG coïncidait avec la perpendiculaire au plan donné.

En effet, à l'origine du mouvement, soient α l'angle que la perpendiculaire au plan donné fait

avec la verticale, et ε' l'angle que sa projection horizontale fait avec la droite d'où l'on compte l'angle ψ. A cette époque, on aura (n° 8)

$$\cos\nu = \cos\varepsilon,\ \cos\mu = \sin\varepsilon\cos\varepsilon',\ \cos\lambda = \sin\varepsilon\sin\varepsilon',$$

et en supposant que ψ' et θ' soient les valeurs initiales de ψ et θ, il en résultera

$$P' = \cos\theta'\sin\varepsilon\cos(\varepsilon' - \psi') - \sin\theta'\cos\varepsilon,$$
$$Q' = \sin\varepsilon\sin(\varepsilon' - \psi').$$

Or, si l'axe de figure a été perpendiculaire au plan donné, quand le mouvement a commencé, on aura $\psi' = \varepsilon'$ et $\theta' = \varepsilon$; d'où il résultera $P' = 0$ et $Q' = 0$; ce qui réduit les formules précédentes à

$$\sin\theta d\psi = -\frac{RP\gamma dt}{Cn},\quad d\theta = \frac{RQ\gamma dt}{Cn}. \quad (13)$$

453. Maintenant, il faut encore supposer que la perpendiculaire au plan donné et l'axe de figure du mobile, s'écartent très peu de la direction verticale, pendant toute la durée du mouvement. Le supplément de l'angle θ sera constamment très petit; car θ est l'angle obtus, compris entre la verticale menée de bas en haut par le point G, et la droite menée de G vers le point K qui est au-dessous de G. Nous négligerons le carré de $\sin\theta$, et nous prendrons $\cos\theta = -1$. Les quantités $\cos\lambda$ et $\cos\mu$ seront très petites; en négligeant leurs carrés, on aura $\cos\nu = 1$. On a d'ailleurs (n° 378)

$$c = \sin\theta\sin\psi,\ c' = \sin\theta\cos\psi,\ c'' = \cos\theta = -1,$$

En négligeant donc les produits $\sin\theta\cos\lambda$ et $\cos\theta\cos\mu$, l'équation (12) donnera

$$z_1 = \gamma + \zeta - x_1\cos\lambda - y_1\cos\mu.$$

Si donc, indépendamment de la petitesse de $\cos\lambda$ et $\cos\mu$, les oscillations verticales du plan donné sont aussi supposées très petites, les variations de z_1 le seront également; la valeur de R, donnée par la troisième équation (1), savoir,

$$R = Mg + M\frac{d^2 z_1}{dt^2},$$

différera très peu de Mg; et si l'on néglige les produits de $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ et de chacune des quantités $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\sin\theta$, il suffira de mettre Mg à la place de R, dans les équations (13). En y mettant aussi les valeurs de P et Q, elles deviendront

$$\sin\theta d\psi = \frac{Mg\gamma}{Cn}(\sin\theta - \cos\lambda\sin\psi - \cos\mu\cos\psi)dt,$$

$$d\theta = \frac{Mg\gamma}{Cn}(\cos\lambda\cos\psi - \cos\mu\sin\psi)\,dt.$$

Les deux premières équations (1) deviendront, en même temps,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g\cos\lambda,\quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = g\cos\mu. \quad (14)$$

En différentiant par rapport à t les valeurs de c et c', et mettant $d\theta$ au lieu de $d.\sin\theta$, on a

$$dc = \sin\psi\,d\theta + \cos\psi\sin\theta d\psi,$$
$$dc' = \cos\psi\,d\theta - \sin\psi\sin\theta d\psi;$$

et si l'on substitue dans ces formules, à la place de $\sin\theta d\psi$ et $d\theta$, leurs valeurs précédentes, il en résulte

$$\left.\begin{aligned} dc - c'm dt &= -m\cos\mu dt,\\ dc' + cm dt &= m\cos\lambda dt,\end{aligned}\right\} (15)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{Mg\gamma}{Cn} = m.$$

Ainsi la question est réduite finalement à l'intégration de ces équations linéaires, à coefficiens constans et du premier ordre, par rapport aux inconnues c et c'. C'est aussi en employant ces mêmes inconnues, c'est-à-dire, $\sin\theta\sin\psi$ et $\sin\theta\cos\psi$, dans le problème du mouvement de la lune autour de son centre de gravité, que Lagrange a ramené à la forme linéaire les équations différentielles de ce problème; ce qui l'a conduit à l'explication complète du phénomène de la *libration*, qu'il n'avait pas donnée dans ses premières recherches sur ce sujet.

454. En intégrant les équations (15) par la méthode ordinaire, désignant par k et k' les deux constantes arbitraires, et remettant pour c et c' ce que ces lettres représentent, on a

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\sin\psi &= k\sin mt + k'\cos mt\\ &\quad - m\sin mt\int(\cos\mu\sin mt - \cos\lambda\cos mt)\,dt\\ &\quad - m\cos mt\int(\cos\mu\cos mt + \cos\lambda\sin mt)\,dt,\\ \sin\theta\cos\psi &= k\cos mt - k'\sin mt\\ &\quad - m\cos mt\int(\cos\mu\sin mt - \cos\lambda\cos mt)\,dt\\ &\quad + m\sin mt\int(\cos\mu\cos mt + \cos\lambda\sin mt)\,dt.\end{aligned}\right\} (16)$$

Je supposerai que les intégrales indiquées dans ces formules commencent avec t, et je représenterai, comme plus haut, par θ' et ψ' les valeurs initiales de θ et ψ; en faisant $t = 0$, on aura

$$k = \sin\theta'\cos\psi',\quad k' = \sin\theta'\sin\psi',$$

pour les valeurs de k et k', qui seront nulles, lorsque l'axe de figure du mobile sera vertical à l'origine du mouvement, auquel cas on aura $\theta' = 0$.

Lorsque les valeurs de $\cos\lambda$ et $\cos\mu$ en fonctions de t, seront effectivement données, on effectuera les intégrations indiquées, et les équations (16) fe-

ront connaître les valeurs de θ et ψ, et, par conséquent, la position de l'axe de figure du mobile, à un instant quelconque. D'après la troisième équation (3), on aura, en même temps,

$$\varphi = nt - \psi + \psi',$$

en y faisant $\cos\theta = -1$, et supposant $\varphi = 0$, quand $t = 0$. Les deux premières équations (3), dans lesquelles on fera simplement $\varphi = nt$, donneront les valeurs de p et q, lesquelles, en les joignant à $r = n$, détermineront, à un instant quelconque, l'axe de rotation et la vitesse angulaire du mobile autour de cet axe. Enfin, par deux intégrations successives, on tirera des équations (14) les valeurs de x_1 et y_1 en fonctions de t; d'où l'on déduira immédiatement celles de z_1 et R.

Les valeurs approchées de toutes les inconnues du problème seront donc déterminées, au moyen des valeurs données de $\cos\lambda$ et $\cos\mu$. Au moyen de ces valeurs approchées, on pourra calculer celles des quantités qu'on a négligées dans cette première approximation; en ayant égard, dans une seconde approximation, à ces quantités ainsi calculées, on parviendra à d'autres valeurs des inconnues, plus approchées que les premières; et, si l'on continue de cette manière, on obtiendra, par le procédé général des approximations successives, des expressions des inconnues, aussi approchées qu'on voudra. Nous nous arrêterons à la première approximation; la seconde et les suivantes n'auraient d'autre difficulté que leur longueur.

455. La vitesse de rotation n, imprimée au mobile autour de son axe de figure, étant supposée très grande, la quantité m sera généralement très petite. Il résulte donc des formules (16) que les variations de $\cos\lambda$ et $\cos\mu$, provenant des petites oscillations de la normale au plan donné sur lequel le mobile s'appuie, seront très affaiblies dans la valeur de θ. Par conséquent, si le mobile est terminé à sa partie supérieure par une surface plane perpendiculaire à son axe de figure, et qu'à l'origine du mouvement cette surface soit horizontale et l'axe vertical, ce qui fera disparaître les termes multipliés par k et k', cette surface conservera sensiblement son horizontalité pendant toute la durée du mouvement, malgré les petites oscillations du plan donné, et cela d'autant plus exactement que la vitesse de rotation imprimée au mobile sera plus considérable. C'est sur ce principe qu'est fondé le moyen qui a été proposé pour obtenir à la mer, indépendamment des mouvemens de *roulis* et de *tangage* du vaisseau, un horizon artificiel qui puisse servir aux observations astronomiques.

A raison de la petitesse de m, on peut considérer $\sin mt$ et $\cos mt$ comme des quantités constantes dans les intégrales que contiennent les formules (16). Ainsi, par exemple, en intégrant par partie, on aura

$$\int \cos\lambda \cos mt dt = \cos mt \int \cos\lambda\, dt + m \sin mt \iint \cos\lambda\, dt^2 + \text{etc.};$$

et si les variations de $\cos\lambda$ sont très rapides par rapport à celles de $\sin mt$ et $\cos mt$, quoique très lentes par rapport à la rotation du mobile, cette série sera très convergente et pourra se réduire à son premier terme; ce qui revient à considérer $\cos mt$ comme une quantité constante dans l'intégrale $\int \cos\lambda \cos mt dt$.

De cette manière, et en supposant $k = 0$ et $k' = 0$, les formules (16) se réduiront à

$$\sin\theta \sin\psi = -m\int \cos\mu dt, \quad \sin\theta\cos\psi = m\int \cos\lambda\, dt.$$

Si l'on suppose aussi que le centre de gravité du mobile n'ait reçu, à l'origine du mouvement, aucune vitesse horizontale, de sorte qu'on ait $\frac{dx_1}{dt} = 0$ et $\frac{dy_1}{dt} = 0$, quand $t = 0$, les équations (14) donneront

$$\frac{dx_1}{dt} = g\int \cos\lambda\, dt, \quad \frac{dy_1}{dt} = g\int \cos\mu\, dt;$$

les intégrales commençant avec t, comme dans les équations précédentes. En les éliminant et remettant pour m sa valeur, on aura donc

$$\sin\theta \sin\psi = -\frac{M\gamma}{Cn}\frac{dy_1}{dt}, \quad \sin\theta\cos\psi = \frac{M\gamma}{Cn}\frac{dx_1}{dt}.$$

La différence de signe dans ces deux formules provient de ce que l'angle ψ augmentant de 90°, l'axe des abscisses positives va tomber sur l'axe des ordonnées négatives, et celui-ci sur l'axe des abscisses positives (n° 378); en sorte qu'en mettant $\psi + 90°$ dans la première formule, il y faut, en même temps, changer y_1 en $-x_1$; ce qui donne la seconde formule.

En divisant ces équations l'une par l'autre, il vient

$$\tang\psi = -\frac{dy_1}{dx_1}.$$

Or, si l'on mène par le point G un plan perpendiculaire à l'axe de figure GK, ψ est l'angle que fait l'intersection de cet équateur du mobile et du plan horizontal des x_1 et y_1, avec l'axe des x_1; d'ailleurs, les variables x_1 et y_1 sont les coordonnées de la projection du point G sur ce plan horizontal; il en résulte donc que cette intersection est constamment parallèle à la tangente à la courbe décrite par la projection horizontale du centre de gravité du mobile. Si l'on appelle u la vitesse horizontale de ce point, de sorte qu'on ait

$$u^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2}{dt^2},$$

on aura aussi

$$\sin\theta = \frac{M\gamma n}{Cn},$$

pour le sinus de l'inclinaison du mobile sur le plan horizontal, laquelle inclinaison est le supplément de l'angle θ.

Ces différentes formules, et les conséquences qui s'en déduisent, subsisteront tant que la vitesse n de rotation du mobile autour de son axe de figure sera très grande; mais la résistance de l'air et le frottement de la pointe K contre le plan sur lequel le mobile s'appuie, diminueront continuellement cette vitesse; et quand elle aura cessé d'être très grande, l'axe GK s'écartera de plus en plus de la direction verticale, et le mobile finira par tomber sur ce plan, comme dans le cas de la toupie ordinaire.

On doit aussi observer que les oscillations verticales du plan donné, d'où il résulte des variations alternatives de la quantité ζ, n'ont aucune influence sur les variations des angles ψ et θ. Mais si le plan donné s'élève ou s'abaisse verticalement d'un mouvement uniformément accéléré, la quantité ζ comprise dans son équation (n° 448), renfermera un terme $\pm\frac{1}{2}g't^2$, dans lequel g' représentera une quantité constante et positive. La valeur de R dont on a fait usage dans le n° 453, au lieu d'être Mg, sera alors $M(g \pm g')$; on devra donc remplacer g par $g \pm g'$ dans la valeur de ω; en sorte qu'un mouvement de cette nature influera sur les variations de θ et ψ. Si le plan donné s'abaisse, auquel cas on devra prendre le signe inférieur devant g', il faudra qu'on ait $g' < g$, sans quoi la valeur de R deviendrait négative; ce qui signifierait que le mobile cesserait de s'appuyer sur le plan donné, qui tomberait plus vite que ce corps pesant, et s'en détacherait par conséquent.

§ II. *Cas où l'on a égard au frottement.*

456. Dans l'état actuel de la science, les lois du frottement des corps en mouvement ne peuvent être déterminées que par l'expérience; avant d'introduire cette force, d'un genre particulier, dans les équations du mouvement d'un corps qui s'appuie sur un plan donné, nous allons donc faire connaître les résultats généraux de l'observation sur cette matière *.

1° Le frottement d'un corps solide sur un autre est indépendant de la vitesse du mobile;

2° Il ne dépend pas non plus de l'étendue de la surface frottante;

3° Il est proportionnel à la pression totale exercée sur cette surface.

* Les expériences les plus récentes sur ce sujet important sont celles de M. Morin, officier d'artillerie attaché à l'École de Metz, dont le travail est inséré dans le tome V des Mémoires présentés à l'Académie des sciences.

Ces deux dernières lois sont celles qui ont aussi lieu dans l'état de repos (n° 269), à l'instant où l'équilibre va se rompre, et quand le contact des corps a duré assez long-temps pour que le frottement ait atteint son *maximum*.

Relativement à un fluide qui coule sur un corps solide, le frottement suit des lois différentes. On admet, d'après l'expérience, qu'il est alors proportionnel à la vitesse du fluide et à l'étendue de la surface, et qu'il ne dépend pas de la pression. Quand il s'agit d'un fluide aériforme, il y a lieu de croire que le frottement augmente ou diminue avec la densité, comme nous l'avons supposé dans le n° 444; de sorte qu'à température égale, il se trouve dépendre indirectement de la grandeur de la pression.

457. Supposons actuellement qu'un corps solide, dont la base est une surface plane d'une étendue quelconque, soit posé sur un plan fixe et horizontal, et que la verticale menée par son centre de gravité G (fig. 98) rencontre le plan fixe dans l'étendue de cette base, ce qui est la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre. Soient M sa masse, et P son poids. En un point A de sa surface, situé dans le plan horizontal mené par le point G, attachons une corde qui vienne passer sur une poulie fixe B, de sorte que BA soit le prolongement de GA. A l'extrémité inférieure C de cette corde, suspendons un autre corps dont la masse soit M', et le poids P', et qui ait son centre de gravité G' sur la verticale menée par le point C.

L'équilibre subsistera tant que le poids P', augmenté du poids de la partie verticale de la corde, sera moindre que le frottement de M sur le plan fixe, et de la corde sur la poulie B; et si P' augmente graduellement, l'équilibre se rompra à l'instant où P' surpassera cette somme de frottemens, diminuée du poids de la corde verticale. Si l'on néglige ce dernier poids relativement à P', et que l'on désigne par F et F' les frottemens de M contre le plan fixe et de la corde contre la poulie fixe, qui ont lieu immédiatement avant la rupture de l'équilibre, on aura

$$P' = F + F'.$$

La pression exercée sur la base de M est le poids P de ce corps; le frottement F est donc proportionnel à P. D'après ce qu'on a vu dans le n° 302, le frottement F' est aussi proportionnel à la force F; par conséquent, on a

$$F = fP, \quad F' = f'F,$$

en désignant par f et f' des fractions indépendantes des grandeurs de P et F. Au moyen de ces valeurs, l'équation précédente devient

$$P' = fP + f'fP;$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{1}{1 + f'}\frac{P'}{P}.$$

Le poids P' étant connu à l'instant où l'équilibre commence à se rompre, cette équation déterminera la valeur de f, relative au corps M et au plan horizontal sur lequel il est posé, quand on connaîtra la valeur de f' qui répond à la corde et à la gorge de la poulie. Le moyen indiqué dans le n° 269 fait connaître cette valeur de f, indépendamment d'aucune autre quantité de même nature, d'après l'angle sous lequel le mobile commence à glisser sur un plan que l'on incline graduellement.

458. Dès que le poids P', augmenté du poids de la corde verticale, l'emportera un tant soit peu sur la quantité F + F', l'équilibre sera rompu, et, à plus forte raison, pour un poids P' encore plus grand. Le corps M glissera sur le plan horizontal, et M' descendra verticalement. Pendant ce mouvement, j'appellerai H le frottement de M contre ce plan, qui sera une fraction donnée de la pression P. Quant à la poulie B, on pourra supposer qu'elle est entièrement fixe et demeure immobile, ou bien, qu'elle tourne autour d'un axe horizontal, perpendiculaire au plan de la corde ABC. Dans le premier cas, il y aura, pendant le mouvement, un certain frottement H' contre la poulie, qui sera différent de F', et devra être ajouté à H; dans le second cas, si la corde ne glisse aucunement sur la poulie, il n'y aura aucun frottement de l'une contre l'autre; mais il faudra tenir compte du mouvement communiqué à la poulie par l'intermédiaire de la corde, comme si elle y était attachée. Je supposerai que ce soit le second de ces deux cas qui ait lieu.

Pour former l'équation du mouvement, désignons, au bout du temps quelconque t, par z et z' les parties horizontale et verticale de la corde ABC, et par μ et μ' leurs masses. Les vitesses de M et M', à cet instant, seront $-\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dz'}{dt}$; et l'on pourra représenter par $a\frac{dz^2}{dt^2}$ et $a'\frac{dz'^2}{dt^2}$ les résistances de l'air exercées à leurs surfaces; a et a' étant des constantes qui dépendront de leur forme et de leur étendue. Si l'on appelle g la gravité, les forces motrices appliquées au système seront donc le poids $(M'+\mu')g$, diminué de la résistance $a'\frac{dz'^2}{dt^2}$, et la force horizontale H, augmentée de la résistance $a\frac{dz^2}{dt^2}$. Leurs momens, par rapport à l'axe de la poulie B, devront se retrancher l'un de l'autre; et en appelant c le rayon de cette poulie circulaire, on aura

$$c\left[(M'+\mu')g - a'\frac{dz'^2}{dt^2} - H - a\frac{dz^2}{dt^2}\right]. \quad (a)$$

pour leur différence. Les forces motrices qui auront effectivement lieu seront $(M'+\mu')\frac{d^2z'}{dt^2}$ dans le sens vertical, $-(M+\mu)\frac{d^2z}{dt^2}$ dans le sens horizontal, et celles de tous les points de la poulie. Les momens de toutes ces forces par rapport à l'axe de la poulie devront s'ajouter; et la vitesse angulaire de la poulie étant $-\frac{1}{c}\frac{dz'}{dt}$, si l'on représente par m sa masse, et par mk^2 son moment d'inertie relatif à son axe, on en conclura, comme dans le n° 392, $\frac{mk^2}{c}\frac{d^2z'}{dt^2}$ pour le moment de ces dernières forces par rapport à cet axe; par conséquent, la somme des momens des forces effectives, par rapport au même axe, sera

$$c\left[\left(M'+\mu'+\frac{mk^2}{c^2}\right)\frac{d^2z'}{dt^2} - (M+\mu)\frac{d^2z}{dt^2}\right]. \quad (b)$$

Or, pour que les forces motrices appliquées au système fassent équilibre, au moyen de l'axe de la poulie, aux forces effectives, prises en sens contraire de leur direction, il faudra que les deux quantités (a) et (b) soient égales entre elles; d'où il résultera

$$\left(M'+\mu'+\frac{mk^2}{c^2}\right)\frac{d^2z'}{dt^2} - (M+\mu)\frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$= (M'+\mu')g - H - a'\frac{dz'^2}{dt^2} - a\frac{dz^2}{dt^2}.$$

La corde ABC étant regardée comme inextensible, la somme de ses parties sera constante; en appelant l sa longueur totale, on aura donc

$$z + z' = l, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dz}{dt}, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Soient ϖ le poids de la corde entière, et p le poids de la masse m de la poulie, on aura aussi

$$g\mu = \frac{\varpi z}{l}, \quad g\mu' = \varpi - \frac{\varpi z}{l}, \quad gm = p;$$

on a également

$$gM = P, \quad gM' = P';$$

et parce que le frottement H est proportionnel au poids P, on a, en outre,

$$H = hP,$$

en désignant par h un coefficient indépendant de P. Au moyen de ces différentes valeurs, l'équation

du mouvement deviendra

$$\left(P + P' + \varpi + \frac{pk^2}{c^2}\right)\frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= g\left[kP - P' - \varpi + \frac{\varpi s}{l} + (a + a')\frac{ds^2}{dt^2}\right].$$

459. Elle n'est point intégrable sous forme finie, à moins qu'on ne néglige les termes qui proviennent de la résistance de l'air; ce qui la réduit à

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{g\mathcal{C}s}{l} + g\alpha = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{P' - kP + \varpi}{P + P' + \varpi + \frac{pk^2}{c^2}} = \alpha, \quad \frac{\varpi}{P + P' + \varpi + \frac{pk^2}{c^2}} = \mathcal{C}.$$

Son intégrale complète sera alors

$$s = Ce^{t\sqrt{\frac{\mathcal{C}g}{l}}} + C'e^{-t\sqrt{\frac{\mathcal{C}g}{l}}} + \frac{\alpha l}{\mathcal{C}}$$

C et C' étant les deux constantes arbitraires, et e la base des logarithmes népériens.

En substituant cette valeur de s dans les termes de l'équation du mouvement qui proviennent de la résistance de l'air, et intégrant de nouveau cette équation, on aura une valeur de s plus approchée; mais nous nous arrêterons à la précédente; et pour déterminer les constantes C et C', j'appellerai γ la valeur initiale de s; on aura $s = \gamma$ et $\frac{ds}{dt} = 0$, quand $t = 0$; d'où il résulte

$$C + C' + \frac{\alpha l}{\mathcal{C}} = \gamma, \quad C - C' = 0;$$

ce qui donne

$$C = C' = \frac{1}{2}\gamma - \frac{\alpha l}{2\mathcal{C}},$$

et, par conséquent,

$$s = \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\alpha l}{\mathcal{C}}\right)\left(e^{t\sqrt{\frac{\mathcal{C}g}{l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{\mathcal{C}g}{l}}}\right) + \frac{\alpha l}{\mathcal{C}},$$

à un instant quelconque.

Si l'on appelle θ le temps que le poids P emploiera à atteindre la poulie B, c'est-à-dire, à parcourir la distance γ, on aura à la fois $t = \theta$ et $s = 0$; d'où l'on conclut

$$(\alpha l - \mathcal{C}\gamma)\left(e^{\theta\sqrt{\frac{\mathcal{C}g}{l}}} + e^{-\theta\sqrt{\frac{\mathcal{C}g}{l}}}\right) = 2\alpha l.$$

Lorsque θ sera donné par l'observation, cette équation servira à déterminer la valeur de α, et, par suite, celle du coefficient k relatif au frottement du poids P en mouvement sur le plan horizontal. Dans cette expérience, on pourra prendre pour P' un poids quelconque, pourvu qu'il surpasse le frottement qui a lieu dans l'état d'équilibre. Si le poids ϖ est très petit par rapport aux poids P et P', $\mathcal{C}$ sera une très petite fraction, et l'on pourra développer les exponentielles en séries très convergentes, suivant les puissances de $\mathcal{C}$. De cette manière, on aura

$$\gamma = (\alpha l - \mathcal{C}\gamma)\left(\frac{g\theta^2}{2l} + \frac{\mathcal{C}g^2\theta^4}{24l^2} + \text{etc.}\right);$$

et si l'on néglige tout-à-fait la quantité $\mathcal{C}$, on aura simplement

$$\gamma = \frac{1}{2}g\alpha\theta^2;$$

ce qui doit être, en effet, puisque alors le mouvement du poids P est uniformément accéléré.

Quel que soit le mouvement du système que nous considérons, la tension de la partie horizontale de la corde ABC est constamment égale à la plus petite des deux forces qui agissent à ses extrémités (n° 352), c'est-à-dire, au frottement H augmenté de la résistance de l'air, exercée sur la surface de H. Elle est donc constante et égale à H, ou kP, pendant toute la durée du mouvement, lorsqu'on fait abstraction de la résistance de l'air; et sa valeur, mesurée par l'extension d'un ressort placé dans la longueur de cette corde, peut aussi servir à déterminer le coefficient k.

460. Les valeurs que l'expérience a données pour ce coefficient, soit par l'observation du temps θ, soit par la mesure de la tension de la corde, varient avec le degré de poli des surfaces frottantes et la matière des corps; elles ne dépendent pas, comme celles du coefficient f (n° 269), du temps pendant lequel les corps ont été en contact avant de glisser l'un sur l'autre. Quand celles-ci ont atteint leur *maximum*, elles surpassent toujours les valeurs correspondantes de k; en sorte que, dans l'état de mouvement, le frottement H est moindre que le frottement F qui a lieu à l'instant où l'équilibre va commencer à se rompre; et la tension de la corde en mouvement est aussi plus petite que celle qui avait lieu au dernier moment de l'équilibre.

Le poids P étant en repos, l'équilibre subsiste tant que le poids P' est plus petit que F; mais on a remarqué que si P', quoique moindre que F, surpasse notablement H, il suffit d'agiter un peu le

plan horizontal, par de petites percussions, pour que le poids P se mette en mouvement.

Quand le coefficient k est connu, il est facile de déterminer le mouvement du poids P sur un plan incliné. Je désignerai par i l'inclinaison de ce plan sur un plan horizontal, qui devra surpasser l'angle sous lequel l'équilibre commencera à se rompre, on être tel qu'on ait $\tang i > f$ (n° 269). Les composantes de P, parallèles et perpendiculaires à ce plan, seront $P \sin i$ et $P \cos i$. La première, diminuée du frottement H, sera la force motrice du mobile, dont M est la masse; en appelant z l'espace parcouru au bout du temps t, on aura donc

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = P \sin i - H.$$

D'ailleurs, la pression sur ce plan étant l'autre composante $P \cos i$, on aura aussi

$$H = kP \cos i;$$

à cause de $P = Mg$, l'équation précédente deviendra donc

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = (1 - k \cot i)\, g \sin i;$$

ce qui montre que le mouvement sera uniformément accéléré, et le même que si le frottement n'existait pas, et que le sinus de l'inclinaison fût diminué dans le rapport de $1 - k \cot i$ à l'unité. Cette quantité $1 - k \cot i$ est positive, puisque l'on a, par hypothèse, $k < f$ et $f \cot i < 1$.

461. Le frottement H étant proportionnel à la pression, et indépendant de l'étendue de la surface frottante, il s'ensuit que les poids P et P′ du n° 457, restant les mêmes, le mouvement de P sur le plan horizontal ne changera pas, quelle que soit l'étendue de sa base, pourvu qu'elle ait toujours le même degré de poli. Ainsi, en prenant pour ce corps un parallélipipède rectangle, d'une matière homogène, et dont toutes les faces soient également polies, son mouvement horizontal sera toujours le même, si on le pose successivement sur chacune de ses faces; et il en sera encore de même, sur un plan incliné, sans le secours du poids P′.

Au reste, cette proposition, que le frottement est indépendant de l'étendue et du contour de la base de P, et simplement proportionnel au poids P, revient à dire qu'à chaque point de cette base, le frottement est proportionnel à la pression relative à ce point. En effet, soient b cette base, $d\sigma$ l'un de ses élémens différentiels, et $p d\sigma$ la pression verticale que supporte cet élément, de sorte que p représente la pression rapportée à l'unité de surface. Il faudra que la résultante des pressions exercées sur tous les élémens de b, reproduise le poids P appliqué au centre de gravité G; il faudra donc qu'on ait

$$\int p d\sigma = P; \qquad (a)$$

et si l'on mène par la projection du point G sur le plan fixe, deux axes horizontaux et rectangulaires, dont l'un sera, par exemple, la projection de la droite GB, et qu'on appelle x la distance de $d\sigma$ à cette projection, et y sa distance à l'autre axe, on devra aussi avoir

$$\int x p d\sigma = 0, \quad \int y p d\sigma = 0; \quad (b)$$

ces intégrales et celle que contient l'équation (a) s'étendant à la base b tout entière. Cela étant, supposons le frottement de l'élément $d\sigma$ sur le plan fixe, proportionnel à la pression $p d\sigma$ qu'il éprouve, et représentons-le par $k p d\sigma$, en désignant par k un coefficient indépendant de p et relatif à la nature de la surface $d\sigma$; nous aurons

$$H = \int k p d\sigma,$$

pour le frottement total; et comme les frottemens de tous les élémens sont parallèles à la direction GB du mouvement, si l'on appelle $x_{,}$ la distance de leur résultante H au plan vertical passant par la droite GB, on aura également

$$H x_{,} = \int k x p d\sigma.$$

Or, si la base du mobile a le même degré de poli dans toute son étendue, le coefficient k sera constant, et il en résultera

$$H = k \int p d\sigma = kP, \qquad H x_{,} = k \int x p d\sigma = 0;$$

par conséquent, le frottement total ne dépendra que du poids P, quels que soient l'étendue et le contour de sa base; et la direction de cette force tombant, à cause de $x_{,} = 0$, dans le plan vertical passant par la droite GB, elle ne pourra imprimer aucune rotation au mobile, dont le mouvement sera parallèle à ce plan, comme on l'a supposé.

Lorsque les centres de gravité du poids P et de la base b sont situés sur une même perpendiculaire à cette base, comme dans le cas d'un prisme ou d'un cylindre vertical, on satisfait aux équations (a) et (b), en supposant la pression p constante et égale au rapport de P à b. Réciproquement, pour une valeur constante de p, les équations (b) donnent

$$\int x d\sigma = 0, \quad \int y d\sigma = 0;$$

ce qui exige que le centre de gravité de b coïncide avec la projection horizontale du point G; par conséquent, lorsque cette condition n'est pas remplie, la pression p varie nécessairement d'un point à un autre de la base du mobile. La détermination de sa valeur en un point quelconque est alors un problème très difficile, qu'on ne peut résoudre qu'en ayant égard à la flexibilité de la matière du mobile et à celle du plan horizontal sur lequel il s'appuie, et qui donnerait lieu, sans cette considération, à une indétermination apparente, comme dans le problème du n° 270.

Si l'on suppose que les deux centres de gravité

soient sur une même verticale, on aura donc à la fois, quel que soit le coefficient h,

$$p = \frac{P}{b}, \quad H = \frac{P}{b} \int h d\sigma, \quad \varpi_1 \int h d\sigma = \int h \varpi d\sigma.$$

Par conséquent, la base restant la même, le frottement total H sera proportionnel au poids P, comme si le degré de poli était le même dans toute l'étendue de cette base; mais, en général, on n'aura plus $\varpi_1 = 0$, la direction de la force H ne coïncidera plus avec la projection horizontale de la droite GB, et quand le poids P entraînera le poids P sur le plan horizontal, le frottement fera tourner le mobile autour de la verticale qui passe par son centre de gravité G.

462. Le poids P étant toujours posé sur un plan fixe horizontal, et la projection horizontale du point G coïncidant avec le centre de gravité de la base b, supposons que l'on imprime à ce corps, par un moyen quelconque, des quantités de mouvement parallèles au plan fixe, qui ne le fassent pas trébucher, c'est-à-dire, qui ne détachent pas sa base b de ce plan. Le mobile prendra deux mouvemens horizontaux, l'un de translation, qui sera celui de son centre de gravité G, et l'autre de rotation, autour de la verticale passant par ce point. Or, il s'agit d'examiner l'influence du frottement sur ces deux mouvemens différens.

Représentons par $\frac{hP}{b} d\sigma$ le frottement éprouvé par l'élément $d\sigma$ de b, et dont la direction sera contraire à celle de la vitesse de cet élément. Appelons r sa distance à l'axe de rotation; au bout du temps t, désignons par x et y les coordonnées rectangulaires du centre de gravité de b, rapportées à des axes fixes menés arbitrairement dans le plan horizontal, et par θ l'angle que fait r avec le prolongement de x. Les coordonnées de $d\sigma$ seront, au même instant, $x + r \cos \theta$ et $y + r \sin \theta$; et si l'on désigne par v la vitesse, et par α et β les angles que fait sa direction avec des parallèles aux axes des x et y, on aura

$$\left.\begin{aligned} v \cos \alpha &= \frac{dx}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \\ v \cos \beta &= \frac{dy}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

pour les deux composantes de cette vitesse. Celles du frottement seront, en même temps,

$$-\frac{hP}{b} \cos \alpha d\sigma, \quad -\frac{hP}{b} \cos \beta d\sigma.$$

Or, le mouvement du centre de gravité G étant le même que si la masse du mobile y était concentrée, et que les forces motrices de tous ses points y fussent appliquées parallèlement à leurs directions, nous aurons, pour les équations de ce mouvement,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{hg}{b} \int \cos \alpha d\sigma, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{hg}{b} \int \cos \beta d\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

en désignant par g la gravité, de sorte que $\frac{P}{g}$ soit la masse, et supposant le coefficient h constant dans toute l'étendue de b.

En même temps, le mobile tournera autour de la verticale passant par le point G, comme si cette droite était fixe, et que les forces qui agissent sur ce corps ne fussent pas changées. Le moment du frottement de $d\sigma$ sera égal à la différence des momens de ses deux composantes, et aura pour valeur

$$-\frac{hP \cos \beta d\sigma}{b} . r \cos \theta + \frac{hP \cos \alpha d\sigma}{b} . r \sin \theta,$$

en supposant que la rotation a lieu dans le sens où l'angle θ augmente, c'est-à-dire, de l'axe des x positives vers celui des y positives. Cela étant, si l'on désigne par ω la vitesse angulaire du mobile au bout du temps t, et par $\frac{Pk^2}{g}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, on aura (n° 392)

$$k^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{hg}{b} \int (\cos \beta \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) r d\sigma, \quad (3)$$

pour l'équation du mouvement autour de cet axe, dans laquelle on fera $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, et l'on étendra l'intégrale à la base entière b du mobile.

Dans ces équations (2) et (3), les variables x, y, θ, ne sont pas séparées; les mouvemens de translation et de rotation dépendent ainsi l'un de l'autre, et ne peuvent être déterminés, en général, que par approximation. Il y a deux cas qui peuvent se résoudre aisément, et que nous allons considérer.

463. Si le centre de gravité G demeure en repos, on aura $\frac{dx}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$; les équations (1) donneront

$$\cos \alpha = -\sin \theta, \quad \cos \beta = \cos \theta, \quad v = r \frac{d\theta}{dt};$$

et pour que les équations (2) soient satisfaites, il faudra que les intégrales $\int \sin \theta \, d\sigma$ et $\int \cos \theta \, d\sigma$ soient nulles; ce qui ne dépendra que du contour de b, et aura lieu, par exemple, toutes les fois qu'il sera symétrique autour du centre de gravité de cette base. L'équation (3) deviendra

$$k^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{hg}{b} \int r d\sigma;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{hcg}{bk^2},$$

en appelant c la constante $\int r d\sigma$. Le mouvement de rotation sera donc uniformément retardé; et si l'on appelle Ω la vitesse initiale angulaire, on aura, à un instant quelconque.

$$\omega = \Omega - \frac{hcgt}{bk^2};$$

ce qui montre que ce mouvement se terminera au bout d'un temps exprimé par $\frac{bk^2\Omega}{hcg}$, pour lequel on aura $\omega = 0$, et le corps sera en repos.

Lorsque la vitesse de rotation sera, au contraire, très petite par rapport à celle du mouvement de translation, et qu'on négligera le carré de $r\frac{d\theta}{dt}$, les équations (1) donneront

$$v^2 = u^2 - 2\left(\frac{dx}{dt}\sin\theta - \frac{dy}{dt}\cos\theta\right) r\frac{d\theta}{dt},$$

en désignant par u la vitesse du point G, de sorte qu'on ait

$$u^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}.$$

On déduira de là et des mêmes équations (1)

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^3}\left(\frac{dx}{dt}\sin\theta - \frac{dy}{dt}\cos\theta\right)\frac{rd\theta}{dt},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{u}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{u^3}\left(\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta\right)\frac{dy}{dt}\frac{rd\theta}{dt},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{u}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{u^3}\left(\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta\right)\frac{dx}{dt}\frac{rd\theta}{dt}.$$

L'origine des coordonnées polaires r et θ étant le centre de gravité de la base b, on a d'ailleurs

$$\int r\sin\theta d\sigma = 0, \quad \int r\cos\theta d\sigma = 0.$$

Cela étant, si l'on substitue ces valeurs de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ dans les équations (2), et si l'on observe que $\int d\sigma = b$, elles deviendront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{hg}{u}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{hg}{u}\frac{dy}{dt}. \quad (4)$$

Pour plus de simplicité, je supposerai la base b symétrique autour de son centre de gravité, de manière qu'on ait

$$\int r^2\cos\theta\sin\theta\, d\sigma = 0, \quad \int r^2\sin^2\theta d\sigma = \int r^2\cos^2\theta d\sigma = b\gamma^2;$$

γ étant une ligne donnée. Par la substitution des valeurs de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, l'équation (3) se réduira alors à

$$k^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{hg\gamma^2}{u}\frac{d\theta}{dt}, \quad (5)$$

en observant que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

Les intégrales complètes des équations (4) sont

$$\frac{dx}{dt} = (a - hgt)\cos\varepsilon, \quad \frac{dy}{dt} = (a - hgt)\sin\varepsilon;$$

a et ε étant les deux constantes arbitraires. On en déduit

$$u = a - hgt;$$

et l'on voit que le mouvement du point G sera uniformément retardé, et que a et ε seront la vitesse initiale et l'angle que sa direction fait avec l'axe des x. L'équation (5) devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{hg\gamma^2}{k^2(a - hgt)}\frac{d\theta}{dt};$$

son intégrale complète est donc

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega\left(1 - \frac{hgt}{a}\right)^{\frac{\gamma^2}{k^2}},$$

en désignant par Ω la constante arbitraire, qui exprimera la vitesse angulaire initiale. Les valeurs de u et $\frac{d\theta}{dt}$ ou ω, seront d'autant plus approchées, que le produit de Ω et de la plus grande valeur de r sera une plus petite fraction de la vitesse u; elles montrent que les mouvemens de translation et de rotation finiront ensemble au bout d'un temps égal à $\frac{a}{hg}$.

464. Lorsqu'un corps solide se meut sur un plan fixe, en le touchant constamment par un seul point de sa surface, il peut arriver plusieurs cas qu'il importe de distinguer.

1° Le corps peut rouler, sans glisser, sur le plan fixe, de manière que les deux courbes tracées sur ce plan et sur la surface du mobile, qui sont les lieux géométriques de leurs points de contact successifs, aient constamment des longueurs égales.

2° Le mobile peut tourner sur lui-même, en touchant constamment le plan fixe, en un même point de ce plan.

3° Le corps peut glisser sans tourner, de sorte que le point de contact soit constamment le même point de sa surface.

4° Enfin, il peut glisser et tourner à la fois sur le plan fixe.

Dans le deuxième et dans le troisième cas, le

frottement du mobile contre le plan fixe est le même que si le contact avait une étendue quelconque ; sa grandeur est proportionnelle à la pression qui a lieu au point de contact, et sa direction contraire à celle de la vitesse de ce point. En le désignant par H, et la pression par P, on a $H = kP$; le coefficient k étant le même que dans le n° 458. Cette loi est une conséquence de ce que le frottement est indépendant de l'étendue du contact; elle aurait besoin, toutefois, d'être vérifiée par des expériences directes. La force H est ce qu'on appelle un *frottement de la première espèce.*

Dans le premier cas, le frottement du mobile contre le plan fixe se nomme un *frottement de seconde espèce.* L'observation fait voir que cette force est généralement très petite, et peut être négligée.

Dans le dernier cas, les deux espèces de frottement ont lieu en même temps; on néglige celui de la seconde espèce par rapport au frottement de la première espèce, qui est dirigé, à chaque instant, en sens contraire de la vitesse du point de contact, et toujours proportionnel à la pression en ce point.

Ces résultats ne conviennent pas au cas où le point de contact est l'extrémité d'une pointe, ou quand il appartient à une arête vive; ils auront encore lieu lorsque le mobile sera un cylindre qui touchera le plan fixe suivant une ligne droite; et, toutes les fois que sa surface n'aura n'y pointes ni arêtes vives, ils suffiront pour former les équations différentielles des mouvemens de translation et de rotation. L'exemple suivant montrera comment on en devra faire usage pour cet objet.

465. Je suppose que le mobile soit une sphère homogène, posée sur un plan fixe horizontal. On imprime à ce corps un mouvement de rotation autour d'un diamètre horizontal, et à son centre une vitesse horizontale et perpendiculaire à ce diamètre. Il est évident que le mobile tournera autour de ce diamètre, qui sera transporté parallèlement à lui-même et au plan fixe, et que le centre de figure et de gravité décrira une droite horizontale, dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation. Il s'agit de déterminer, à un instant quelconque, les vitesses de ces deux mouvemens.

La figure 99 représente une section du mobile, perpendiculaire à son axe de rotation et passant par son centre G. La droite AKB est la section du plan fixe; la parallèle CGD est la droite que décrit le point G, et le contact, au bout du temps quelconque t, a lieu au point K. A cet instant soient x la distance CG, comptée à partir du point fixe C; $\frac{dx}{dt}$ la vitesse du point G, ω la vitesse angulaire du mobile autour de son axe de rotation, qui sera regardée comme positive ou comme négative, selon que la rotation aura lieu dans le sens indiqué par la flèche s ou en sens contraire. En appelant, au même instant, v la vitesse absolue du point K, et désignant par c le rayon KG de la sphère, on aura

$$v = \frac{dx}{dt} + c\omega.$$

Selon que cette quantité sera positive ou négative, le point K s'avancera vers B ou vers A; et le frottement qui a lieu en ce point K en sens contraire de v, sera dirigé suivant KA ou suivant KB. Quand on a $v = 0$, le corps roule sans glisser, et le frottement n'est plus que de la seconde espèce.

Cela posé, désignons toujours par P le poids du corps, par g la gravité, par $\frac{Pk^2}{g}$ le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, et par kP le frottement au point K. En supposant, pour fixer les idées, la vitesse v positive, et, conséquemment, le frottement dirigé suivant KA, les équations différentielles des mouvemens de translation et de rotation seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kg, \quad k^2\frac{d\omega}{dt} = -kcg; \quad (a)$$

car le centre G devra se mouvoir comme si la masse $\frac{P}{g}$ du mobile y était réunie, et que le frottement y fût appliqué parallèlement à sa direction; et, en même temps, le mobile devra tourner autour de son axe de rotation, comme si cet axe était fixe, et que le point d'application du frottement et le sens de cette force ne fussent pas changés. Le mobile étant une sphère, on a aussi

$$k^2 = \frac{2c^2}{5};$$

les équations précédentes auraient encore lieu, mais avec une valeur différente de k^2, si ce corps était un solide de révolution, ou un cylindre droit à base circulaire, tournant, dans ces deux cas, autour de l'axe de figure.

En supposant le coefficient k constant, et intégrant les équations (a), on a

$$\frac{dx}{dt} = a - kgt, \quad \omega = \alpha - \frac{kcgt}{k^2}; \quad (b)$$

a et α étant les deux constantes arbitraires qui représenteront les valeurs initiales des vitesses $\frac{dx}{dt}$ et ω. On aura, en même temps,

$$v = a + c\alpha - \left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) kgt.$$

Par hypothèse, la constante $a + c\alpha$ est positive; la vitesse v l'est donc aussi pendant un temps θ, au

bout duquel elle est nulle, et qui a pour valeur

$$\theta = \frac{(a + c\omega)\, k^2}{(v^2 + k^2)\, gh} = \frac{2\,(a + c\omega)}{7hg},$$

dans le cas de la sphère. Pendant l'intervalle de temps θ, les valeurs précédentes de $\frac{dx}{dt}$ et ω subsisteront, et les deux mouvemens du mobile seront uniformément retardés. Au bout d'un temps égal à $\frac{a}{hg}$, la valeur de $\frac{dx}{dt}$ sera nulle; si donc ce temps est moindre que θ, ce qui aura lieu si l'on a

$$a < \frac{2c\omega}{5},$$

la vitesse $\frac{dx}{dt}$ deviendra négative au delà de $t = \frac{a}{hg}$, et le centre de la sphère rétrogradera. C'est ce qui arrive par exemple, lorsqu'on frappe une bille de billard de manière à la faire tourner rapidement autour d'un diamètre horizontal et à faire avancer en même temps son centre avec une moindre vitesse, en sorte que les quantités a et ω soient toutes deux positives et satisfassent à l'inégalité précédente. Le frottement contre le tapis détruit bientôt le mouvement de translation; mais le mouvement de rotation subsistant encore, le frottement continue d'agir en sens contraire de ce dernier mouvement; et c'est cette force, transportée au centre de gravité, qui le ramène vers son point de départ.

Si, à l'origine du mouvement, la sphère ne tourne pas, de sorte qu'on ait $\omega = 0$, ou, plus généralement, si l'on a

$$a > \frac{2c\omega}{5},$$

la vitesse $\frac{dx}{dt}$ ne deviendra pas nulle avant la vitesse v, et le centre G ne rétrogradera pas. Mais dans tous les cas, au bout du temps θ, le point d'appui K du mobile n'ayant plus de vitesse, le frottement hP de la première espèce disparaîtra; la sphère continuera de rouler sans glisser; et il se produira un frottement qui ne sera plus que de la seconde espèce. Les vitesses $\frac{dx}{dt}$ et ω deviendront constantes, ou ne décroîtront plus que très lentement; leurs valeurs seront celles des formules (5), qui répondent à $t = \theta$, savoir :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5a - 2c\omega}{7}, \quad \omega = \frac{2c\omega - 5a}{7c}.$$

Ainsi, l'effet général du frottement ordinaire ou de la première espèce, est de réduire au repos les corps qui glissent sans tourner, et de réduire seulement à l'uniformité et à l'égalité, en sens opposés, les deux mouvemens des corps qui glissent et roulent en même temps. Dans un vide parfait, le roulement du mobile qui résulte de ces deux mouvemens, subsisterait indéfiniment, et le frottement de la seconde espèce maintiendrait la vitesse v nulle, et les deux vitesses $\frac{dx}{dt}$ et ω égales et contraires. Mais la résistance de l'air trouble cette égalité; le frottement de la première espèce reparaît, et le concours de ces deux forces finit par réduire le mobile à l'état de repos.

CHAPITRE VII.

DU CHOC DES CORPS DE FORME QUELCONQUE.

466. la position et l'état d'un corps solide en mouvement sont complètement déterminés à un instant donné, lorsque l'on connaît, à cet instant, les coordonnées de son centre de gravité, les composantes de la vitesse de ce point, les directions des trois axes principaux qui se coupent en ce même point, et les composantes de la vitesse angulaire de rotation autour de ces trois axes. Si ce corps est rencontré par un autre mobile, pour lequel toutes ces choses soient également connues, les composantes de leurs vitesses de translation et de rotation seront changées par le choc, mais non pas les positions de leurs centres de gravité, ni les directions de leurs axes principaux ; car, quoique le choc ne soit pas instantané, cependant la durée de ce phénomène est toujours assez petite pour qu'on puisse faire abstraction du déplacement des différens points des deux mobiles, pendant qu'il s'accomplit, et, par conséquent, pour qu'on puisse considérer comme sensiblement immobiles leurs centres de gravité et les points des deux mobiles qui appartiennent à leurs axes principaux. Le problème du choc des corps aura donc pour objet de déterminer en grandeur et en direction, leurs vitesses de translation et de rotation après le choc, au moyen de ces mêmes quantités avant le choc, et d'après la forme et la situation relatives des mobiles.

Nous allons donner la solution générale de ce problème, dans les deux cas extrêmes où les mobiles sont mous et dénués d'élasticité, et où ces corps sont au contraire parfaitement élastiques.

467. Supposons d'abord que les mobiles soient au nombre de deux, qu'ils se touchent par un seul point, et qu'ils soient entièrement libres. Soient M et M' leurs masses, G et G' (fig. 100) leurs centres de gravité, K leur point de contact, HKH' la normale à leurs surfaces en ce point. Soient aussi Gx, Gy, Gz, les axes principaux de M, et $G'x'$, $G'y'$, $G'z'$, ceux de M'.

Immédiatement avant le choc, désignons par u, v, w, les composantes de la vitesse de G suivant les axes Gx, Gy, Gz; appelons en même temps ω la vitesse angulaire de M autour de l'axe instantané de rotation, passant par le point G, et p, q, r, les trois composantes de cette vitesse, autour des mêmes axes Gx, Gy, Gz; en sorte que $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$, soient les cosinus des angles que l'axe instantané fait avec ces trois droites (n° 407), et qu'on ait

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 .$$

Cela étant, si x, y, z, sont les trois coordonnées d'un point quelconque de M, rapportées aux axes Gx, Gy, Gz, les composantes de sa vitesse, parallèles à ces axes et provenant de la rotation du mobile (n° 418), seront $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$; par conséquent, on aura celles de sa vitesse absolue, en y ajoutant les composantes u, v, w, de la vitesse du point G; ce qui donne

$$u + qz - ry, \quad v + rx - pz, \quad w + py - qx.$$

Je désigne par u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1 ce que deviennent u, v, w, p, q, r, immédiatement après le choc. En observant que le point dont les coordonnées sont x, y, z, ne change pas sensiblement de position pendant le choc, les trois composantes précédentes deviendront

$$u_1 + q_1z - r_1y, \quad v_1 + r_1x - p_1z, \quad w_1 + p_1y - q_1x;$$

et comme les axes Gx, Gy, Gz, auxquels elles sont parallèles, sont aussi supposés immobiles pendant le choc, on aura les vitesses perdues par ce point suivant ces axes, en retranchant ces dernières quantités des précédentes. Si donc on désigne par dm l'élément de la masse M qui répond aux coordonnées x, y, z, nous aurons

$$[u - u_1 + (q - q_1)z - (r - r_1)y]dm,$$
$$[v - v_1 + (r - r_1)x - (p - p_1)z]dm,$$
$$[w - w_1 + (p - p_1)y - (q - q_1)x]dm,$$

pour les composantes parallèles à Gx, Gy, Gz, de la quantité de mouvement perdue par dm, pendant la durée du choc.

En vertu du principe général de la Dynamique (n° 353), les quantités de mouvement ainsi perdues par M et M' devront se faire équilibre; et, d'après ce qu'on a vu dans le n° 265, on formera les équations d'équilibre de ces deux corps solides, appuyés l'un contre l'autre, en considérant chacun d'eux isolément, après avoir joint aux forces relatives à M, une force inconnue N, dirigée suivant KH, et aux forces appliquées à M', la même force N agissant au point K suivant KH'.

Ces forces N, dirigées suivant KH et KH', seront les quantités de mouvement imprimées par le choc aux masses M et M'; et, avant d'écrire les équations d'équilibre, on peut remarquer que les effets du

choe, qu'elles serviront à déterminer, seront les mêmes, pour la masse M, par exemple, que si l'on appliquait à une partie arbitraire μ de cette masse, ayant son centre de gravité sur la droite KH, une vitesse k parallèle à KH, et telle que l'on eût $\mu k = N$; car il est évident que la résultante des quantités de mouvement de μ serait N, en grandeur et en direction : la percussion exercée sur M, suivant KH, équivaut donc toujours, comme nous l'avons dit dans le n° 435, à des vitesses égales, imprimées, parallèlement à cette normale KH, à tous les points d'une partie de M, qui a son centre de gravité sur cette droite.

468. Cela posé, désignons par a, b, c, les trois coordonnées de K, rapportées aux axes Gx, Gy, Gz, et par α, β, γ, les angles que la droite KH fait avec des parallèles à ces axes, menées par le point K; les six équations d'équilibre des quantités de mouvement perdues par tous les points de M, seront

$$\begin{aligned}
&N\cos\alpha + \int[u - u_1 + (q - q_1)\,z - (r - r_1)\,y]\,dm = 0,\\
&N\cos\beta + \int[v - v_1 + (r - r_1)\,x - (p - p_1)\,z]\,dm = 0,\\
&N\cos\gamma + \int[w - w_1 + (p - p_1)\,y - (q - q_1)\,x]\,dm = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&N\,(a\cos\beta - b\cos\alpha)\\
&+ \int[v - v_1 + (r - r_1)\,x - (p - p_1)\,z]\,x\,dm\\
&- \int[u - u_1 + (q - q_1)\,z - (r - r_1)\,y]\,y\,dm = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&N\,(c\cos\alpha - a\cos\gamma)\\
&+ \int[u - u_1 + (q - q_1)\,z - (r - r_1)\,y]\,z\,dm\\
&- \int[w - w_1 + (p - p_1)\,y - (q - q_1)\,x]\,x\,dm = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&N\,(b\cos\gamma - c\cos\beta)\\
&+ \int[w - w_1 + (p - p_1)\,y - (q - q_1)\,x]\,y\,dm\\
&- \int[v - v_1 + (r - r_1)\,x - (p - p_1)\,z]\,z\,dm = 0;
\end{aligned}$$

les intégrales s'étendant à la masse entière M.

A cause que le point G est le centre de gravité de M, et que Gx, Gy, Gz, sont ses axes principaux, on a

$$\int x\,dm = 0,\quad \int y\,dm = 0,\quad \int z\,dm = 0,$$
$$\int yz\,dm = 0,\quad \int xz\,dm = 0,\quad \int xy\,dm = 0.$$

Désignons, de plus, par A, B, C, les momens d'inertie de M par rapport à ces mêmes axes de sorte qu'on ait

$$A = \int(y^2 + z^2)\,dm,\quad B = \int(z^2 + x^2)\,dm,\quad C = \int(x^2 + y^2)\,dm.$$

En observant que $\int dm = M$, les six équations d'équilibre se réduiront à

$$\left.\begin{aligned}
&N\cos\alpha + M\,(u - u_1) = 0,\\
&N\cos\beta + M\,(v - v_1) = 0,\\
&N\cos\gamma + M\,(w - w_1) = 0,\\
&N\,(a\cos\beta - b\cos\alpha) + C\,(r - r_1) = 0,\\
&N\,(c\cos\alpha - a\cos\gamma) + B\,(q - q_1) = 0,\\
&N\,(b\cos\gamma - c\cos\beta) + A\,(p - p_1) = 0,
\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Par rapport à M' et à ses axes principaux $G'x'$, $G'y'$, $G'z'$, je désignerai les quantités qui entrent dans ces équations par les mêmes lettres, avec un trait supérieur; en sorte que, par exemple, α', β', γ', seront les angles que fait la droite KH' avec des parallèles à ces axes, menées par le point K, et que a', b', c', seront les coordonnées de ce point, rapportées à ces mêmes axes. En observant que la grandeur de N doit être la même pour les deux corps M et M', les équations d'équilibre des quantités de mouvement perdues par M' seront

$$\left.\begin{aligned}
&N\cos\alpha' + M'\,(u' - u_1') = 0,\\
&N\cos\beta' + M'\,(v' - v_1') = 0,\\
&N\cos\gamma' + M'\,(w' - w_1') = 0,\\
&N\,(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha') + C'\,(r' - r_1') = 0,\\
&N\,(c'\cos\alpha' - a'\cos\gamma') + B'\,(q' - q_1') = 0,\\
&N\,(b'\cos\gamma' - c'\cos\beta') + A'\,(p' - p_1') = 0.
\end{aligned}\right\}\ (2)$$

Outre les douze inconnues u_1, v_1, w_1, u_1', v_1', w_1', p_1, q_1, r_1, p_1', q_1', r_1', que contiennent ces douze équations (1) et (2), elles renferment encore l'inconnue N; elles seront donc en nombre insuffisant pour déterminer ces treize inconnues; et il y faudra joindre une treizième équation, que l'on obtiendra par la considération suivante, dans le cas des corps dénués d'élasticité.

469. La solution du problème serait, en effet, indéterminée, si l'on considérait les deux mobiles comme absolument durs, et qu'on fît abstraction

de la compression qu'ils éprouvent pendant la durée du choc. Mais en ayant égard à cette compression, quelque petite qu'on la suppose, on conçoit qu'elle est due à ce que les points des deux mobiles, par lesquels ils viennent se toucher, n'ont pas la même vitesse suivant la normale commune à leurs surfaces. A raison de la différence des vitesses normales de ces deux points, les deux corps s'appuient et se compriment graduellement l'un contre l'autre; en même temps, cette différence diminue par degrés infiniment petits, jusqu'à ce qu'elle ait entièrement disparu; et quand les deux mobiles sont dénués d'élasticité, le phénomène du choc est achevé à l'instant où cette différence est devenue nulle, et ces deux corps conservent la forme qu'ils ont prise à cet instant de leur plus grande compression. C'est cette égalité des vitesses normales des deux points de contact, à la fin du choc, qui fournit la troisième équation demandée, et qui fait disparaître l'indétermination du problème.

En tant que le point K appartient au corps M, ses coordonnées, rapportées aux axes Gx, Gy, Gz, sont a, b, c; en les substituant à la place de x, y, z dans les formules du n° 467, on a, immédiatement après le choc, $u_1+q_1c-r_1b$, $v_1+r_1a-p_1c$, $w_1+p_1b-q_1a$, pour les composantes de sa vitesse parallèles à ces trois axes; et comme α, β, γ, sont les angles que la droite KH fait avec les directions de ces composantes, on en conclut

$$(u_1+q_1c-r_1b)\cos\alpha+(v_1+r_1a-p_1c)\cos\beta+(w_1+p_1b-q_1a)\cos\gamma)$$

pour la vitesse finale de ce point suivant cette droite. Si l'on considère le même point K comme faisant partie du corps M', sa vitesse après le choc, suivant la direction KH', sera

$$(u_1'+q_1'c'-r_1'b')\cos\alpha'+(v_1'+r_1'a'-p_1'c')\cos\beta'+(w_1'+p_1'b-q_1'a)\cos\gamma'.$$

Or, pour que, dans les deux cas, la vitesse normale du point K soit la même, et dirigée dans le même sens, il faudra que ces deux dernières quantités soient égales et de signe contraire, ou que leur somme soit nulle; par conséquent, on aura

$$\left.\begin{aligned}&(u_1+q_1c-r_1b)\cos\alpha+(u_1'+q_1'c'-r_1'b')\cos\alpha'\\&+(v_1+r_1a-p_1c)\cos\beta+(v_1'+r_1'a'-p_1'c')\cos\beta'\\&+(w_1+p_1b-q_1a)\cos\gamma+(w_1'+p_1'b'-q_1'a')\cos\gamma'=0.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Les équations (1), (2), (3), du premier degré, par rapport aux inconnues N, u_1, v_1, etc., donneront, dans chaque cas particulier, des valeurs entièrement déterminées pour ces quantités qui feront connaître l'état des deux mobiles après le choc, et les quantités de mouvement, égales et contraires, que la percussion leur aura imprimées suivant la normale commune à leurs surfaces

470. Maintenant, si les deux corps sont élastiques, il faudra distinguer trois époques successives dans le phénomène du choc : la première répondra à l'instant où les deux mobiles commencent à se toucher par un point K de leurs surfaces; la deuxième sera celle de leur plus grande compression, où les vitesses normales du point K seront égales et dans le même sens pour ces deux corps; la troisième sera la fin du choc, où les deux mobiles se sépareront l'un de l'autre, après avoir repris exactement leurs formes primitives, s'ils sont supposés parfaitement élastiques.

Depuis la première jusqu'à la seconde époque, le phénomène est le même que si les deux mobiles étaient dénués d'élasticité. Ainsi, l'on déterminera, au moyen des équations précédentes, les douze composantes u_1, v_1, etc., des vitesses de translation et de rotation des mobiles à l'instant de leur plus grande compression, et la quantité de mouvement N que chacun des deux corps aura reçue, suivant KH pour M, et suivant KH' pour M'. Depuis la deuxième époque jusqu'à la troisième, ces deux corps, en revenant à leurs formes primitives, recevront, suivant ces directions, une nouvelle quantité de mouvement, qui sera encore égale à N, dans le cas d'une parfaite élasticité. Par conséquent, cette seconde partie du phénomène devra être considérée comme une seconde percussion, identique avec la première, mais exercée sur des corps animés des vitesses de translation et de rotation qui ont lieu à la fin de la première partie.

D'après ce principe, conforme à ce qui a déjà été expliqué dans le n° 360, si l'on appelle à la troisième époque, U, V, W, les composantes de la vitesse du point G, suivant les axes Gx, Gy, Gz, et P, Q, R, les composantes de la vitesse angulaire de M autour des mêmes axes, on aura, pour déterminer ces six inconnues, les six équations

$$\begin{aligned}&N\cos\alpha+M(u_1-U)=0,\\&N\cos\beta+M(v_1-V)=0,\\&N\cos\gamma+M(w_1-W)=0,\\&N(a\cos\beta-b\cos\alpha)+C(r_1-R)=0,\\&N(c\cos\alpha-a\cos\gamma)+B(q_1-Q)=0,\\&N(b\cos\gamma-c\cos\beta)+A(p_1-P)=0,\end{aligned}$$

qui se déduisent des équations (1), en y mettant U, V, W, P, Q, R, à la place de u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1, et ces dernières quantités au lieu de u, v, w, p, q, r, et en conservant la quantité N.

Pour faire disparaître les inconnues intermédiaires u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1, j'ajoute chacune de ces six équations à l'équation (1) qui lui correspond;

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}
&2N\cos\alpha + M(u - U) = 0,\\
&2N\cos\beta + M(v - V) = 0,\\
&2N\cos\gamma + M(w - W) = 0,\\
&2N(a\cos\beta - b\cos\alpha) + C(r - R) = 0,\\
&2N(c\cos\alpha - a\cos\gamma) + B(q - Q) = 0,\\
&2N(b\cos\gamma - c\cos\beta) + A(p - P) = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Ces équations (4) sont celles de l'équilibre des quantités de mouvement perdues par M pendant la durée totale du choc, jointes à la quantité de mouvement 2N imprimée à cette masse, suivant la direction KH, pendant cette même percussion. On y mettra pour N la valeur de cette inconnue, qu'on tirera de l'équation (3), après y avoir substitué les valeurs des inconnues u_1, v_1, etc., u_1', v_1', etc., données par les équations (1) et (2). Nous nous dispenserons d'écrire ici l'expression générale de cette quantité N, qui serait très compliquée, et dont on calculera, sans difficulté, la valeur numérique, dans chaque cas particulier. Si les deux mobiles n'étaient pas supposés parfaitement élastiques, N serait moindre dans la seconde partie du choc que dans la première; il faudrait prendre alors pour sa valeur, dans la seconde partie, une fraction f de sa valeur, déduite des équations (1), (2), (3), et mettre $(1+f)$ N à la place de 2N dans les équations (4). Cette fraction f dépendrait du degré d'élasticité des deux mobiles, et ne pourrait se déterminer que par des expériences faites sur des corps de la même matière, dans le cas le plus simple, par rapport à leur forme et à leur mouvement primitif. Nous nous bornerons à considérer le cas de l'élasticité parfaite, en observant, toutefois, que la remarque qui termine le n° 467 a également lieu, quel que soit le degré de l'élasticité.

Quant au corps M', si l'on désigne, à la fin du choc, par U', V', W', les composantes de la vitesse de G' suivant les axes G'x', G'y', G'z', et par P', Q', R', les composantes de la vitesse angulaire de M' autour de ces axes, on aura pour déterminer ces six inconnues des équations semblables aux équations (4), savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&2N\cos\alpha' + M'(u' - U') = 0,\\
&2N\cos\beta' + M'(v' - V') = 0,\\
&2N\cos\gamma' + M'(w' - W') = 0,\\
&2N(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha') + C'(r' - R') = 0,\\
&2N(c'\cos\alpha' - a'\cos\gamma') + B'(q' - Q') = 0,\\
&2N(b'\cos\gamma' - c'\cos\beta') + A'(p' - P') = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Telle est donc la solution complète et générale du problème du choc, dans le cas de deux corps entièrement libres, dénués de toute élasticité, ou parfaitement élastiques. On l'étendra, sans difficulté, au choc simultané de trois ou d'un plus grand nombre de mobiles; nous en donnerons plus bas un exemple.

471. On peut conclure des équations précédentes que le choc des corps M et M' n'altère nullement les vitesses de leurs centres de gravité G et G', parallèlement au plan tangent commun en K à leurs deux surfaces.

En effet, par le point G menons une droite parallèle à ce plan, qui fasse des angles λ, μ, ν, avec les axes Gx, Gy, Gz; cette droite étant perpendiculaire à la parallèle à KH, menée par le même point G, on aura

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0;$$

Et d'après, cela, si l'on ajoute les trois premières équations (1) ou (4), après les avoir multipliées par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, il en résultera

$$\begin{aligned}
u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu &= u_1\cos\lambda + v_1\cos\mu + w_1\cos\nu\\
&= U\cos\lambda + V\cos\mu + W\cos\nu;
\end{aligned}$$

ce qui montre que la vitesse de G, suivant une direction quelconque, parallèle au plan tangent en K, sera la même avant et après le choc des corps mous ou élastiques. Il suffira donc, pour connaître, en grandeur et en direction, la vitesse finale de G, de déterminer, dans chaque cas, la vitesse de ce point après le choc, parallèlement à la normale KH, et de la composer avec la vitesse de G parallèle au plan tangent en K, qui avait lieu auparavant, et qui n'aura pas changé pendant la percussion. La même chose aura lieu relativement au centre de gravité G' de M'.

En ajoutant les trois dernières équations (1) ou (4), après les avoir multipliées par $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$, il vient

$$\begin{aligned}
Cr\cos\gamma + Bq\cos\beta + Ap\cos\alpha &= Cr_1\cos\gamma + Bq_1\cos\beta + Ap_1\cos\alpha\\
&= CR\cos\gamma + BQ\cos\beta + AP\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Or, ces trois quantités égales sont les momens par rapport à l'axe KH (n° 409), des quantités de mouvement dont sont animés tous les points de M, avant le choc, à l'instant de la plus grande compression, à la fin du choc; d'où il résulte que la percussion ne change rien à la grandeur de ce moment, pour le mobile M, et, de même, pour le mobile M', mous ou élastiques.

472. Appliquons maintenant à différens exemples les équations générales que nous avons obtenues.

Supposons d'abord que la normale KH au point de contact des deux mobiles, passe par le centre de gravité G de M, de manière qu'elle soit la droite KGH (fig. 191). D'après la signification des lettres α, β, γ, a, b, c, il est aisé de voir qu'on aura

dans ce cas,

$$a \cos \beta = b \cos \alpha,$$
$$c \cos \alpha = a \cos \gamma,$$
$$b \cos \gamma = c \cos \beta;$$

alors les trois dernières équations (1) et (4) donneront

$$p_{,} = p,\ q_{,} = q,\ r_{,} = r,\ P = p,\ Q = q,\ R = r;$$

ce qui signifie que la direction de l'axe instantané de M et la vitesse de rotation seront les mêmes immédiatement avant et après le choc. Donc, toutes les fois que la normale au point de contact passe par le centre de gravité de l'un des deux mobiles mous ou élastiques, le choc ne change rien au mouvement de rotation de celui-ci, et n'influe que sur son mouvement de translation.

Si la même normale passe aussi par le centre de gravité G' de M', de sorte qu'on ait également

$$a' \cos \beta' = b' \cos \alpha',$$
$$c' \cos \alpha' = a' \cos \gamma',$$
$$b' \cos \gamma' = c' \cos \beta',$$

les vitesses de rotation disparaîtront de l'équation (3), qui se réduira à

$$u_{,} \cos \alpha + v_{,} \cos \beta + w_{,} \cos \gamma + u_{,}' \cos \alpha' + v_{,}' \cos \beta + w_{,}' \cos \gamma' = 0;$$

mais les trois premières équations (1) et (2) donnent

$$\left.\begin{aligned} N &= M\,[(u_{,} - u) \cos \alpha + (v_{,} - v) \cos \beta + (w_{,} - w) \cos \gamma], \\ N &= M'\,[(u_{,}' - u') \cos \alpha' + (v_{,}' - v') \cos \beta' + (w_{,}' - w') \cos \gamma'] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

et en divisant ces équations par M et M' et les ajoutant ensuite à la précédente, il en résulte

$$\frac{N}{M} + \frac{N}{M'} + u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma + u' \cos \alpha' + v' \cos \beta' + w' \cos \gamma' = 0.$$

Or, si GL et G'L' sont les directions de G et G' avant le choc et θ et θ' leurs vitesses initiales, on aura

$$\theta \cos HGL = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma,$$
$$\theta' \cos H'G'L' = u' \cos \alpha' + v' \cos \beta' + w' \cos \gamma',$$

d'après ce que les lettres $u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, u', v', w', \alpha', \beta', \gamma'$, représentent. On aura donc

$$N = -\frac{MM'(\theta \cos HGL + \theta' \cos H'G'L')}{M + M'},$$

pour la valeur de N, qui devra être essentiellement positive : lorsqu'elle sera négative, on en conclura qu'il n'y a pas de choc entre les deux mobiles M et M'.

De même, si Gl et G'l' sont les directions de G et G' à l'instant de la plus grande compression des deux mobiles, et $\theta_{,}$ et $\theta_{,}'$ leurs vitesses au même instant, on aura aussi

$$\theta_{,} \cos HG\,l = u_{,} \cos \alpha + v_{,} \cos \beta + w_{,} \cos \gamma,$$
$$\theta_{,}' \cos H'G'\,l' = u_{,}' \cos \alpha' + v_{,}' \cos \beta' + w_{,}' \cos \gamma',$$

et de ces diverses équations, on conclut

$$\left.\begin{aligned} \theta_{,} \cos HG\,l &= \frac{M\theta \cos HGL - M'\theta' \cos H'G'L'}{M + M'}, \\ \theta_{,}' \cos H'G'\,l' &= \frac{M'\theta' \cos H'G'L' - M\theta \cos HGL}{M + M'}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

pour les composantes des vitesses de G et G' suivant GH et G'H', à l'instant que nous considérons. Elles sont, comme on voit, égales et contraires; d'où il suit qu'à l'instant de la plus grande compression, les centres de gravité des deux mobiles ont la même vitesse, en grandeur et en direction, suivant la normale au point de contact K. Dans le cas des corps mous, cette vitesse normale sera celle qui aura lieu après le choc. Lorsque les deux mobiles seront parfaitement élastiques, on aura

$$\theta_{,} \cos HG\,l = U \cos \alpha + V \cos \beta + W \cos \gamma,$$
$$\theta_{,}' \cos H'G'\,l' = U' \cos \alpha' + V' \cos \beta' + W' \cos \gamma',$$

en supposant que les vitesses $\theta_{,}$ et $\theta_{,}'$ et les directions Gl et G'l' se rapportent à la fin du choc. Donc, en vertu des trois premières équations (4) et (5), et de la valeur qu'on vient de trouver pour N, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \theta_{,} \cos HG\,l &= \frac{(M - M')\,\theta \cos HGL - 2M'\theta' \cos H'G'L'}{M + M'}, \\ \theta_{,}' \cos H'G'\,l' &= \frac{(M' - M)\,\theta' \cos H'G'L' - 2M\theta \cos HGL}{M + M'}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

pour les composantes des vitesses finales de G et G' suivant les directions GH et G'H'.

473. Dans le cas particulier où les deux points G' et G' se meuvent, avant le choc, sur la normale HKH', leurs vitesses perpendiculaires à cette droite seront nulles, et elles le seront encore après le choc; en sorte que l'on aura

$$\cos HGL = \pm 1, \quad \cos HG\,l = \pm 1,$$
$$\cos H'G'L' = \pm 1, \quad \cos HG\,l' = \pm 1,$$

selon le sens de leurs directions, en considérant, dans tous les cas, les vitesses θ, θ', $\theta_{,}$, $\theta_{,}'$, comme des quantités positives.

Si G et G' vont dans le même sens avant le choc, par exemple, de H' vers H, l'angle HGL sera zéro, et l'angle H'G'L' égale à deux droits; en vertu des équations (7), on aura donc

$$\cos HG\,l = 1, \cos H'G'\,l' = -1, \theta_{,} = \theta_{,}' = \frac{M\theta + M'\theta'}{M + M'}.$$

Si, au contraire, G et G' vont au devant l'un de l'autre avant le choc, de manière que le point G se meuve de H vers H', et le point G' de H' vers H, on aura $\cos HGL = \cos H'G'L' = -1$, et les équations (7) donneront

$$\cos HGl = \mp 1, \quad \cos H'G'l' = \pm 1, \quad \theta_{,} = \theta_{,}' = \pm \frac{M\theta - M'\theta'}{M + M'};$$

les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu selon que la différence $M\theta - M'\theta'$ sera positive ou négative. On appliquera de même les formules (8) à ces deux hypothèses.

Ces résultats coïncident avec ceux qu'on a obtenus dans les nos 361 et 362, relativement au choc des corps sphériques et homogènes; mais on voit de plus qu'ils sont indépendans de la forme de ces corps et de leur mouvement de rotation, et qu'ils supposent seulement que les centres de gravité des deux mobiles se meuvent, avant le choc, sur la normale au point de contact.

474. Si l'on suppose $M' = M$, les équations (8) deviennent

$$\theta_{,} \cos HGl = -\theta' \cos H'G'L', \quad \theta_{,}' \cos H'G'l' = -\theta \cos HGL,$$

d'où l'on conclut que dans le choc de deux corps parfaitement élastiques et égaux en masses, les centres de gravité des deux mobiles échangent leurs vitesses parallèles à la normale au point de contact, lorsque cette normale, commune aux deux surfaces en ce point, passe à la fois par ces deux centres.

Quand le point G' sera en repos avant le choc, en sorte qu'on ait $\theta' = 0$ et que, de plus, la masse M, à raison de sa densité, sera très petite et négligeable par rapport à M', on aura, en vertu des équations (7)

$$\theta_{,} \cos HGl = 0, \quad \theta_{,}' \cos H'G'l' = 0,$$

en sorte que les centres de gravité G et G' de deux corps mous n'auront, dans ce cas, aucune vitesse normale après le choc. Mais, en vertu des équations (8), si ces corps sont, au contraire, parfaitement élastiques, on aura

$$\theta_{,}' \cos H'G'l' = 0, \quad \theta_{,} \cos HGl = -\theta \cos HGL;$$

ce qui montre que le centre de gravité G' ne prendra aucune vitesse, et que G prendra, après le choc, une vitesse normale égale et contraire à celle qu'il avait auparavant.

Il est aisé d'en conclure que le centre de gravité G sera réfléchi en faisant avec la normale au point de contact des deux mobiles, l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

En effet, prenons sur le prolongement de GL (fig. 102), une partie gG pour représenter, avant le choc, la vitesse de G, qui se mouvra de g vers G; soit toujours GH la normale au point de contact des deux mobiles, laquelle passe par hypothèse, par le point G; décomposons la vitesse gG en deux autres, l'une aG, dirigée suivant cette normale, et l'autre bG parallèle au plan tangent : la seconde ne sera pas changée par le choc, et la première sera changée en une vitesse cG égale et contraire à aG. Donc, si l'on achève le rectangle Gbdc, et qu'on prolonge la diagonale Gd d'une quantité Gl = Gd, la vitesse du point G, après le choc, sera Gl, en grandeur et en direction; par conséquent, l'angle de réflexion HGl, sera égal à l'angle d'incidence HGg, et, de plus, la vitesse du mobile aura la même grandeur avant et après le choc. Ce cas est celui d'un corps élastique qui vient rencontrer un obstacle fixe, doué également d'une parfaite élasticité.

475. Lorsque les mobiles sont des sphères homogènes, la condition que la normale HKH' (fig. 101) passe par leurs centres de gravité G et G', est toujours remplie. Par conséquent, si ces corps sont parfaitement élastiques, ils échangeront, en se choquant, leurs vitesses dans le sens de la droite qui va d'un centre à l'autre, et conserveront, sans altération, leurs vitesses perpendiculaires à cette droite; et, quand ils viendront frapper un obstacle fixe et aussi parfaitement élastique, ils se réchiront en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

C'est sur ces principes qu'est fondé le jeu de *billard;* mais il faut observer que non seulement ils supposent l'élasticité parfaite des *bandes* et des *billes;* mais que la non-altération, par le choc, de la vitesse des mobiles, soit parallèlement à leur plan tangent commun, soit parallèlement aux bandes qu'ils rencontrent, n'a lieu que quand on fait abstraction du frottement provenant de leur rotation et du glissement d'une surface sur l'autre. On va voir, par exemple, que l'angle de réflexion dépend de la rotation de la bille, et qu'il n'est plus égal à l'angle d'incidence, quand on tient compte du frottement de la bille contre la bande. La même chose a lieu dans le *ricochet* d'un boulet : le frottement de ce projectile contre le terrain et sa vitesse de rotation influent aussi sur l'angle de réflexion, qui peut être, pour cette raison, différent de l'angle d'incidence.

Cette question nous fournira l'occasion d'expliquer comment on doit avoir égard au frottement dans le choc des corps, et de compléter ce que nous avons dit, sur ce genre de résistance, dans le second paragraphe du chapitre précédent. Nous allons d'abord exposer les principes qui nous guideront dans cette matière délicate; on y est conduit par l'analogie; mais ils auraient besoin, ainsi que les conséquences qui s'en déduisent, d'être confirmés par des expériences directes.

476. En formant les équations d'équilibre des quantités de mouvement perdues dans le choc, par

les deux masses M et M', nous n'avons point tenu compte des quantités de mouvement produites par les poids de ces corps pendant la durée de la percussion, parce que cette durée étant très petite, ces quantités, qui lui sont proportionnelles, sont aussi très petites, et peuvent être négligées par rapport à celles que les mobiles reçoivent de leur choc mutuel. Mais il n'en est pas de même, comme nous l'avons déjà remarqué (n° 353), à l'égard du frottement qui a lieu pendant le choc, lorsque les surfaces des deux mobiles en contact glissent l'une sur l'autre. Quoiqu'on n'ait pas fait d'observations sur l'intensité de ce frottement, on peut supposer, par induction, qu'il suit les lois générales du frottement des corps soumis à des pressions proprement dites, puisque la percussion n'est autre chose qu'une pression d'une très grande intensité, exercée pendant un temps très court. On peut donc admettre que pendant la durée du choc le frottement, à chaque instant, est proportionnel à la grandeur de la pression normale, qui appuie, à cet instant, les deux mobiles l'un contre l'autre; qu'il est dirigé, pour chaque mobile, en sens contraire de la vitesse relative du glissement de ce mobile sur l'autre, et indépendant de la grandeur de cette vitesse; et qu'il disparaît, ou devient négligeable, quand le glissement se change en un simple roulement.

Or, la quantité totale de mouvement imprimée à M suivant la normale KH (fig. 100), a été représentée par N, quand ces deux mobiles sont dénués d'élasticité, ou par 2N, quand ils sont parfaitement élastiques. Si donc, pendant toute la durée du choc, la surface de M glisse, dans une même direction, sur celle de M', et qu'on appelle Q la quantité de mouvement imprimée à M par le frottement, en sens contraire de cette direction, on aura $Q = kN$, dans le cas des corps dénués d'élasticité, et $Q = 2kN$, dans le cas des corps parfaitement élastiques; k étant un coefficient qui ne dépend que de la nature des surfaces de M et M', au point de contact K, et pour lequel on pourra prendre celui qui a été déterminé par l'expérience, relativement à des pressions ordinaires (n° 459).

Si le glissement a lieu dans un sens pendant une partie du choc, et dans le sens opposé pendant l'autre partie, on aura $Q = k(N' - N'')$, en désignant par N' et N'' les quantités de mouvement produites par la percussion pendant ces deux parties du choc, de sorte que N ou 2N soit leur somme $N' + N''$, et en supposant $N' > N''$. Si, à la fin de la première partie, le glissement se change en un simple roulement, on prendra $Q = kN'$, en négligeant le frottement de la seconde espèce, qui aura lieu pendant la seconde partie.

En appelant Q' ce que Q devient relativement à M', il est évident que Q' sera, dans tous les cas, une quantité de mouvement égale et directement opposée à Q; car la pression normale que M' exerce sur M pendant toute la durée du choc, est de même grandeur que celle de M sur M', et la vitesse relative du glissement de M' sur M est toujours égale et contraire à celle du glissement de M sur M'.

Il résulte de là que pour former les équations d'équilibre des quantités de mouvement perdues pendant le choc par le corps M, en ayant égard au frottement, il suffira de joindre à la quantité de mouvement N ou 2N, imprimée à ce mobile suivant la normale KH, une autre quantité de mouvement Q, perpendiculaire à KH, et exprimée comme on vient de le dire; et que pour obtenir, en même temps, les équations relatives à M', il faudra joindre à la quantité de mouvement N ou 2N, dirigée suivant KH', une quantité de mouvement Q' égale et contraire à Q. C'est ce que nous allons faire, dans le cas du choc d'un projectile sphérique et homogène contre un obstacle fixe.

477. Pour fixer les idées, je supposerai que l'obstacle fixe que la sphère M vient frapper est un plan horizontal, et que cette sphère tourne, avant le choc, autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la direction GH de son centre de gravité. La figure 103 représente une section du plan fixe et de M par ce plan vertical. Tout étant semblable de part et d'autre de cette section, le point G ne s'écartera point de ce dernier plan pendant le choc, M continuera de tourner autour du diamètre perpendiculaire à ce même plan, et le même point de contact K glissera, pendant cette percussion le long de AB, intersection de ce plan vertical et du plan fixe.

Immédiatement avant le choc, j'appelle a la vitesse horizontale de G, dirigée suivant GD, b sa vitesse verticale, dirigée suivant GK, et γ l'angle d'incidence HGK, de sorte qu'on ait

$$\tang \gamma = \frac{a}{b}.$$

Le mobile M étant supposé parfaitement élastique, ainsi que l'obstacle fixe qu'il vient frapper, il perdra d'abord, en se comprimant, sa quantité de mouvement verticale Mb, puis il reprendra, en revenant à sa figure primitive, une quantité de mouvement égale et contraire; en sorte qu'après le choc, le centre de gravité G aura une vitesse verticale b, dirigée suivant le prolongement GE de GK. Si donc on appelle, à cette époque, a' sa vitesse horizontale, dirigée suivant GD, ou en sens contraire, selon qu'elle sera positive ou négative; que GH' soit la direction de ce point, et qu'on désigne par γ' l'angle de réflexion EGH', on aura

$$\tang \gamma' = \frac{a'}{b}$$

La droite GH' sera située à gauche de la verticale EK, comme la droite GH, ou à droite de EK, selon que la quantité a' sera positive ou négative. Pour que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence, il faudra que cette vitesse a' soit positive et

égale à α; la différence $\gamma' - \gamma$ de ces deux angles sera toujours de même signe que $\alpha' - \alpha$; et le point G rétrogradera quand la vitesse a' sera négative.

Soit aussi α la vitesse angulaire de rotation de M avant le choc, laquelle vitesse sera considérée comme positive ou comme négative, selon qu'elle aura lieu dans le sens indiqué par la flèche s, ou dans le sens opposé. Désignons par α' ce que devient cette vitesse angulaire après le choc. Le problème consistera à déterminer les valeurs de a' et α' d'après celles de a et α. Selon que la vitesse absolue du point K sera positive ou négative, c'est-à-dire, dirigée suivant KA ou suivant KB, pendant une partie de la durée du choc, ou pendant sa durée entière, la solution présentera différens cas distincts, que nous allons examiner successivement dans le numéro suivant.

478. Je supposerai, en premier lieu, que la vitesse du point K soit positive, ou dirigée suivant KA, pendant toute la durée du choc. En appelant c le rayon GK de M, cette vitesse sera $a + c\alpha$ au commencement, et $a' + c\alpha'$ à la fin; de sorte que ces deux quantités devront être positives. La quantité totale de mouvement imprimée à M suivant GK, soit pendant que le mobile se comprime, soit pendant qu'il revient à sa figure primitive, étant égale à $2Mb$, la quantité de mouvement provenant du frottement, et dirigée suivant KB, sera $2hMb$, d'après le n° 476; par conséquent, la vitesse horizontale a' du centre de gravité G après le choc, sera la même que si la masse M y était réunie, et que les quantités de mouvement Ma et $2hMb$ y fussent appliquées, en sens contraire l'une de l'autre; ce qui donne

$$a' = a - 2hb.$$

En observant que $2/5\, Mc^2$ est le moment d'inertie de M par rapport à son axe de rotation, et que $2hMbc$ est le moment, par rapport au même axe, du frottement dirigé suivant KB, on verra, sans difficulté, que la diminution $\alpha - \alpha'$ de la vitesse angulaire de rotation sera déterminée par l'équation

$$\tfrac{2}{5} Mc^2 (\alpha - \alpha') = 2hMbc;$$

d'où l'on tire

$$\alpha' = \alpha - \frac{5hb}{c}.$$

De ces valeurs de a' et α', il résultera

$$a' + c\alpha' = a + c\alpha - 7hb;$$

et cette quantité $a' + c\alpha'$ devant être positive dans le cas que nous examinons, il faudra que la quantité $a + c\alpha$, aussi positive, soit plus grande que $7hb$. Quand cette condition aura lieu, on aura

$$\text{tang}\, \gamma' = \frac{a}{b} - 2h = \text{tang}\, \gamma - 2h,$$

pour déterminer l'angle de réflexion γ' d'après l'angle d'incidence γ et le coefficient h.

Si la vitesse absolue du point K est constamment négative, ou dirigée suivant KB, le frottement sera dirigé suivant KA, et il suffira de changer les signes des termes multipliés par h, dans les formules du cas précédent, qui deviendront

$$a' = a + 2hb, \quad \alpha' = \alpha + \frac{5hb}{c}, \quad \text{tang}\, \gamma' = \text{tang}\, \gamma + 2h.$$

Pour que ce cas ait lieu, il faudra que la vitesse initiale du point K soit en sens contraire de celle de G; ce qui suppose que la rotation primitive ait lieu dans le sens opposé à celui qui est indiqué par la flèche s. A cause de

$$a' + c\alpha' = a + c\alpha + 7hb,$$

il faudra, en outre, que cette quantité négative $a + c\alpha$ l'emporte sur le terme positif $7hb$. Dans ce second cas, l'angle de réflexion surpassera l'angle d'incidence, tandis que, dans le premier cas, γ' était moindre que γ.

La vitesse du point K étant positive au commencement du choc, si elle devient zéro à un certain instant de sa durée, et qu'elle reste ensuite nulle jusqu'à la fin, on prendra, d'après le n° 476, $hM(b + b')$ pour l'effet total du frottement, en désignant par b' la vitesse verticale de G à l'instant dont il s'agit, et regardant b' comme une quantité négative ou positive, selon que cet instant arrivera pendant que le mobile se comprime ou pendant qu'il revient à sa figure primitive. On en conclura, comme dans le premier cas,

$$a' = a - h(b + b'), \quad \alpha' = \alpha - \frac{5h(b + b')}{2c},$$

et, par suite,

$$\text{tang}\, \gamma' = \text{tang}\, \gamma - \frac{h(b + b')}{b}.$$

Si la vitesse du point K est zéro dès le commencement du choc, on aura $b' = -b$; et le frottement étant nul, ou de la seconde espèce, pendant toute la durée de la percussion, il n'influera pas sur les valeurs de a', α', tang γ'. Si, au contraire, la vitesse de K ne devient nulle qu'à la fin du choc, on aura $b' = b$, et ces formules coïncideront avec celles du premier cas. Généralement, la valeur de b' sera inconnue, et l'on saura seulement qu'elle ne peut pas dépasser $\pm b$; mais comme on suppose nulle la vitesse finale du point K, il faudra qu'on ait

$$a' + c\alpha' = a + c\alpha - \frac{7}{2} h(b + b') = 0;$$

d'où l'on tire

$$h\,(b + b') = \frac{2\,(a + ca)}{7};$$

et par conséquent,

$$a' = -\,ca' = \frac{5a - 2ca}{7},\ \text{tang}\,\gamma' = \text{tang}\,\gamma - \frac{2\,(a + ca)}{7b}.$$

La vitesse du point K étant positive dans une première partie du choc, si elle devient négative dans la partie suivante, et que b' soit la vitesse verticale, positive ou négative, de G, à l'instant de ce changement de signe, les quantités de mouvement imprimées à M, suivant la direction de KG, seront $M\,(b + b')$ et $M\,(b - b')$ pendant ces deux parties de la percussion. D'après le n° 476, on prendra donc $hM\,(b + b') - hM\,(b - b')$ pour la quantité totale de mouvement produite par le frottement suivant la direction KB ou KA, selon qu'elle sera positive ou négative; et comme cette quantité se réduit à $2hMb'$, on en conclut que les formules relatives à ce quatrième cas se déduiront de celles du premier, en y mettant b' au lieu de b. On y changera le signe de h, comme dans le second cas, si la vitesse de K a d'abord été négative, pour devenir ensuite positive. Mais la quantité b' n'étant pas donnée, ces formules ne feront pas connaître la diminution ou l'augmentation de l'angle de réflexion, et l'on saura seulement que l'une ou l'autre est moindre que dans le premier ou le second cas.

La question serait encore plus compliquée, si le projectile tournait autour d'un axe qui ne fût pas perpendiculaire, comme nous l'avons supposé, au plan vertical dans lequel le point G se meut avant le choc. Le frottement ferait alors sortir ce point de son plan pendant la percussion; et non seulement l'angle de réflexion différerait de l'angle d'incidence, mais encore ces deux angles ne seraient plus compris dans un plan vertical.

479. Maintenant, pour montrer, indépendamment du frottement, l'influence du choc sur le mouvement de rotation, prenons un exemple simple, dans lequel la normale au point de contact des deux mobiles, qu'on peut regarder comme la direction du choc, ne passe pas par le centre de gravité de l'un de ces deux corps.

Supposons que dans le choc l'axe instantané de rotation de M coïncide avec l'un des axes principaux qui se coupent à son centre de gravité, par exemple, avec l'axe Gz (fig 100); on aura alors $p = 0$ et $q = 0$. Supposons aussi que le point K et la normale commune aux deux surfaces en ce point, soient compris dans le plan des axes Gx et Gy; ce qui rendra nulles les deux quantités c et $\cos\gamma$. En faisant

$$p = 0,\quad q = 0,\quad c = 0,\quad \cos\gamma = 0,$$

dans les deux dernières équations (1) ou (4), on en conclut $p_{,} = 0$ et $q_{,} = 0$, ou $P = 0$ et $Q = 0$; en sorte que, dans les deux cas des corps mous et des corps élastiques, l'axe de rotation coïncidera encore, après le choc, avec l'axe Gz, et le choc changera seulement la vitesse de rotation sans changer l'axe instantané, conformément à ce que nous avons déjà vu dans le n° 437.

Prenons pour le corps M' une sphère homogène. La direction du choc passera par son centre de gravité; on aura donc, comme dans le n° 472,

$$a'\cos\mathcal{C}' = b'\cos\alpha',\quad c'\cos\alpha' = a'\cos\gamma',\quad b'\cos\gamma' = c'\cos\mathcal{C}';$$

en ayant égard aux suppositions précédentes, l'équation (3) se réduira à

$$(a\cos\mathcal{C} - b\cos\alpha)r_{,} + u_{,}\cos\alpha + v_{,}\cos\mathcal{C}$$
$$+ u_{,}'\cos\alpha' + v'_{,}\cos\mathcal{C}' + w_{,}'\cos\gamma' = 0;$$

et, en la combinant avec les équations (6), on en déduit

$$\frac{N}{M} + \frac{N}{M'} + (a\cos\mathcal{C} - b\cos\alpha)\,r_{,} + u\cos\alpha + v\cos\mathcal{C}$$
$$+ u'\cos\alpha' + v'\cos\mathcal{C}' + w'\cos\gamma' = 0.$$

Menons par le point K des parallèles aux directions des vitesses θ et θ' de G et G' avant le choc; soient δ et δ' les angles que ces parallèles font avec KH; nous aurons

$$u\cos\alpha + v\cos\mathcal{C} = \theta\cos\delta,$$
$$u'\cos\alpha' + v'\cos\mathcal{C}' + w'\cos\gamma' = -\,\theta'\cos\delta',$$

pour les composantes de θ et θ' suivant cette partie de la normale au point K; et en éliminant $r_{,}$ au moyen de la quatrième équation (1), l'équation précédente deviendra

$$\frac{N}{M} + \frac{N}{M'} + \frac{(a\cos\mathcal{C} - b\cos\alpha)^2\,N}{C} + (a\cos\mathcal{C} - b\cos\alpha)r$$
$$+ \theta\cos\delta - \theta'\cos\delta' = 0;$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{MM'C\,[(b\cos\alpha - a\cos\mathcal{C})r + \theta'\cos\delta' - \theta\cos\delta]}{(M + M')C + MM'\,(b\cos\alpha - a\cos\mathcal{C})^2}.$$

Au moyen de cette valeur de N, les trois premières équations (1) ou (4), selon que les mobiles seront mous ou élastiques, feront connaître les trois composantes $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$, ou U, V, W, de la vitesse

de G après le choc, et les trois premières équations (2) ou (5) détermineront de même celles de la vitesse finale de G'. Quant à la valeur de $r_{,}$ ou de R, elle se déduira de la quatrième équation (1) ou (4).

La quantité N doit toujours être positive, comme nous l'avons déjà remarqué; et quand sa valeur sera négative, il n'y aura pas de choc entre les deux mobiles. Le dénominateur de cette valeur est positif ainsi que le facteur MM'C de son numérateur. Les quantités θ et θ', contenues dans l'autre facteur, sont aussi positives; les quantités a, b, cos α, cos β, cos β', pourront être positives ou négatives; et leurs signes seront donnés dans chaque cas particulier. A cause de $p=0$ et $q=0$, r sera, abstraction faite du signe, la vitesse de rotation avant le choc. Pour savoir le signe qu'on devra lui donner dans la valeur de N, je considère un point situé sur l'axe Gx, à l'unité de distance du point G; la vitesse de ce point, parallèlement à l'axe Gy, sera $a+r$ avant le choc (n° 467); d'où l'on conclut que sa partie r devra être positive ou négative, selon que le mouvement de rotation primitif aura eu lieu, de l'axe Gx vers l'axe Gy, ou de l'axe Gy vers l'axe Gx, c'est-à-dire, dans le sens de la flèche s ou dans le sens opposé. Après le choc, la rotation aura aussi lieu dans le premier sens ou dans le second, selon que la valeur de $r_{,}$ ou de R sera positive ou négative.

480. Jusqu'ici nous avons supposé les deux corps M et M' entièrement libres; mais s'ils sont retenus par un point ou un axe fixe, la détermination de leurs mouvemens après le choc dépendra toujours des mêmes principes, et ne différera que par le nombre des équations qu'on aura à considérer.

Par exemple, si le mobile M est retenu par un point fixe G, les trois premières équations du n° 468 ne seront plus nécessaires pour l'équilibre de M et des quantités de mouvement perdues, pendant le choc, par tous les points de ce corps. Ce point fixe G ne sera pas toujours, comme précédemment, le centre de gravité de M, et les intégrales $\int x dm$, $\int y dm$, $\int z dm$, ne seront plus nulles; mais les six quantités u, v, w, $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$, seront zéro; et en prenant pour Gx, Gy, Gz, les trois axes principaux de M qui se coupent en ce point G, les trois dernières équations d'équilibre se réduiront encore à

$$N(a\cos\varepsilon - b\cos\alpha) + C(r - r_{,}) = 0,$$
$$N(c\cos\alpha - a\cos\gamma) + B(q - q_{,}) = 0,$$
$$N(b\cos\gamma - c\cos\varepsilon) + A(p - p_{,}) = 0,$$

comme dans le numéro cité. En y joignant les six équations (2) relatives au corps M', que je continuerai de supposer entièrement libre, et l'équation (3) dans laquelle on fera $u_{,}=0$, $v_{,}=0$, $w_{,}=0$, on aura les dix équations nécessaires pour déterminer la valeur de N, et les mouvemens des deux corps après le choc, lorsqu'on les supposera dénués d'élasticité. Quand ils seront parfaitement élastiques, on remplacera les trois équations précédentes par les trois dernières équations (4), et l'on fera usage des équations (5) au lieu des équations (2).

Si le corps M est retenu par un axe fixe Gz, qui ne sera plus un axe principal, la quatrième équation du n° 468 sera seule nécessaire pour l'équilibre de N et des quantités de mouvement perdues par M. Comme l'axe de rotation coïncide alors avec Gz, avant et après le choc, on aura $p=0$, $q=0$, $p_{,}=0$, $q_{,}=0$; et les trois composantes de la vitesse de G étant aussi nulles, cette équation se réduira encore à

$$N(a\cos\varepsilon - b\cos\alpha) + C(r - r_{,}) = 0;$$

C étant toujours le moment d'inertie par rapport à l'axe Gz. On la remplacera par

$$2N(a\cos\varepsilon - b\cos\alpha) + C(r - R) = 0,$$

lorsque les deux mobiles seront parfaitement élastiques; et en y joignant l'équation (3) et celles qui répondent au corps M', on aura toutes les équations nécessaires pour déterminer N et les mouvemens des deux mobiles après le choc.

481. Au lieu de deux corps seulement, si trois ou un plus grand nombre de mobiles se choquent simultanément, on formera les équations d'équilibre des quantités de mouvement perdues, dans le choc, par chacun de ces corps, en le considérant isolément, après avoir joint aux quantités de mouvement perdues par tous ces points, d'autres forces inconnues N, N', N'', etc., appliqués aux points de contact de ce corps avec tous les autres, et dirigées, de dehors en dedans, suivant la normale à sa surface. Pour tous les mobiles, ces forces inconnues seront en même nombre que les points de contact de ces corps; car elles représenteront des quantités de mouvement égales et contraires pour les deux mobiles qui se touchent en chaque point. Mais, à l'instant de la plus grande compression, c'est-à-dire, à la fin du choc des corps dénués d'élasticité, l'équation (3) aura lieu pour chaque point de contact; d'où il résulte qu'on aura toujours un nombre suffisant d'équations, pour déterminer, à cet instant, l'état de tous les mobiles, et les valeurs de N, N', N'', etc. Quand les mobiles seront parfaitement élastiques, on obtiendra la solution du problème, pour chacun d'eux séparément, par la considération employée dans le n° 470.

482. Pour donner un exemple simple de cette solution générale, soient M, M', μ, les masses de trois sphères homogènes, dont les centres sont G, G', C (fig. 104). Supposons que μ soit en repos avant le choc, et que cette sphère soit frapée simultanément par M et M', qui la touchent aux points K et K'. Si M et M' ont un mouvement de rotation avant le choc, il ne sera pas changé par le choc; et μ n'en prenant aucun pendant cette percussion, on aura seulement à déterminer, en grandeur et en direction, les vitesses de G, G', C, après le choc, au moyen des vitesses et des directions de G et G' auparavant.

Désignons donc, avant le choc, par a, b, c, les composantes de la vitesse de G, parallèles à trois axes fixes et rectangulaires Ox, Oy, Oz, et par a', b', c', les composantes de la vitesse de G', parallèles aux mêmes axes. Représentons par u, v, w, u', v', w', ce que deviennent ces six composantes à l'instant de la plus grande compression, et par u_1, v_1, w_1, les composantes suivant les mêmes axes, de la vitesse de C à cet instant. Soient aussi α, β, γ, les angles compris entre le rayon KC et des parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, menées par le point K, et α', β', γ', les angles que fait le rayon K'C avec des parallèles à ces axes, menées par le point K'. Appelons, à l'instant dont il s'agit, N la quantité de mouvement communiquée à μ par M suivant KC, ou à M par μ suivant KG, et N' celle qui est communiquée à μ par M' suivant K'C, ou à M' par μ suivant K'G'. Les neuf équations d'équilibre des quantités de mouvement perdues, et des forces N et N', qu'il suffira de considérer, seront

$$\left.\begin{aligned}
M(a-u) - N\cos\alpha &= 0,\\
M(b-v) - N\cos\beta &= 0,\\
M(c-w) - N\cos\gamma &= 0,\\
M'(a'-u') - N'\cos\alpha' &= 0,\\
M'(b'-v') - N'\cos\beta' &= 0,\\
M'(c'-w') - N'\cos\gamma' &= 0,\\
N\cos\alpha + N'\cos\alpha' - \mu u_1 &= 0,\\
N\cos\beta + N'\cos\beta' - \mu v_1 &= 0,\\
N\cos\gamma + N'\cos\gamma' - \mu w_1 &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

en observant que KG et K'G' sont les prolongemens de KC et K'C.

L'équation (3), appliquée aux points K et K', donnera, en même temps,

$$\left.\begin{aligned}
u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma &= u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma,\\
u_1\cos\alpha' + v_1\cos\beta' + w_1\cos\gamma' &= u'\cos\alpha' + v'\cos\beta' + w'\cos\gamma';
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

et l'on aura, de cette manière, les onze équations nécessaires et suffisantes pour déterminer les onze inconnues N, N', u, v, etc.

Si nous faisons

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos\delta,$$
$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = k,$$
$$a'\cos\alpha' + b'\cos\beta' + c'\cos\gamma' = k',$$

δ sera l'angle GCG', et k et k' représenteront les vitesses primitives de G et G' suivant GK et G'K'. En observant que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

les équations (a) donneront

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = k - \frac{N}{M},$$

$$u'\cos\alpha' + v'\cos\beta' + w'\cos\gamma' = k' - \frac{N'}{M'},$$

$$u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma = \frac{N + N'\cos\delta}{\mu},$$

$$u_1\cos\alpha' + v_1\cos\beta' + w'\cos\gamma' = \frac{N' + N\cos\delta}{\mu};$$

au moyen de quoi les équations (b) deviendront

$$M\mu k = N(M + \mu) + N'M\cos\delta,$$
$$M'\mu k' = N'(M' + \mu) + NM'\cos\delta,$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{k(M' + \mu)M\mu - k'MM'\mu\cos\delta}{(M + \mu)(M' + \mu) - MM'\cos^2\delta},$$

$$N' = \frac{k'(M + \mu)M'\mu - kMM'\mu\cos\delta}{(M + \mu)(M' + \mu) - MM'\cos^2\delta};$$

valeurs qui devront toujours être des quantités positives. Après qu'on les aura substituées dans les équations (a), on en déduira immédiatement les valeurs des neuf composantes u, v, etc., des vitesses de G, G', C, qui auront lieu à la fin du choc, lorsque les trois mobiles seront dénués d'élasticité.

S'ils sont, au contraire, parfaitement élastiques, et qu'on désigne, à la fin du choc simultané de ces trois corps, par U, V, W, les composantes de la vitesse de G, par U', V', W', celles de la vitesse de G', par U_1, V_1, W_1, celles de la vitesse de C, on aura, par la considération déjà employée dans le n° 470, ces neuf équations :

$$\begin{aligned}
M(u - U) - N\cos\alpha &= 0,\\
M(v - V) - N\cos\beta &= 0,\\
M(w - W) - N\cos\gamma &= 0,\\
M'(u' - U') - N'\cos\alpha' &= 0,\\
M'(v' - V') - N'\cos\beta' &= 0,\\
M'(w' - W') - N'\cos\gamma' &= 0,\\
N\cos\alpha + N'\cos\alpha' + \mu(u_1 - U_1) &= 0,\\
N\cos\beta + N'\cos\beta' + \mu(v_1 - V_1) &= 0,\\
N\cos\gamma + N'\cos\gamma' + \mu(w_1 - W_1) &= 0.
\end{aligned}$$

En ajoutant chacune d'elles à celle qui lui correspond parmi les équations (a), il vient

$$\begin{aligned}
M(a - U) - 2N\cos\alpha &= 0,\\
M(b - V) - 2N\cos\beta &= 0,\\
M(c - W) - 2N\cos\gamma &= 0,\\
M'(a' - U') - 2N'\cos\alpha' &= 0,\\
M'(b' - V') - 2N'\cos\beta' &= 0,\\
M'(c' - W') - 2N'\cos\gamma' &= 0,\\
2N\cos\alpha + 2N'\cos\alpha' - \mu U_1 &= 0,\\
2N\cos\beta + 2N'\cos\beta' - \mu V_1 &= 0,\\
2N\cos\gamma + 2N'\cos\gamma' - \mu W_1 &= 0;
\end{aligned}$$

et il ne restera plus qu'à substituer dans ces der-

nières équations les valeur précédentes de N et N', pour en déduire ensuite immédiatement les valeurs des neuf inconnues U, V, W, U', V', W', $U_{,}$, $V_{,}$, $W_{,}$.

Les vitesses finales des points G, G'. C, seraient encore les mêmes, si les chocs de M et de M' contre μ, au lieu d'être simultanés, se succédaient à un très petit intervalle de temps, de sorte que ces trois points ne se fussent pas sensiblement déplacés pendant ce temps très court. Les durées très courtes des deux chocs, simultanés ou successifs, peuvent aussi être inégales, et l'instant de la plus grande compression n'être pas le même aux points K et K'.

CHAPITRE VIII.

EXEMPLES DU MOUVEMENT D'UN CORPS FLEXIBLE.

§ 1er *Vibrations d'une corde flexible.*

483. Soit AMB (fig. 105) une corde parfaitement flexible, très peu extensible, homogène et partout de la même épaisseur, tendue suivant sa longueur par une force équivalente à un poids donné ϖ, et attachée par ses deux extrémités à des points fixes A et B. On néglige son poids par rapport à ϖ; et on la regarde, par conséquent, comme rectiligne dans son état d'équilibre. Cela étant, supposons qu'on l'écarte un tant soit peu de cette direction, et qu'on imprime de petites vitesses à tous ses points; cette corde oscillera de part et d'autre de la droite AMB; et il s'agit de déterminer, à un instant quelconque, sa position et les vitesses de ses différents points.

Au bout du temps quelconque t, supposons que cette corde forme la courbe AM'B, plane ou à double courbure, dans laquelle M' est la position qu'a prise le point quelconque M. Soit P la projection de M' sur la droite AMB; faisons

$$AM = x, \quad AP = x + u;$$

et représentons par y et z les deux autres coordonnées de M', perpendiculaires entre elles à l'axe AB. Les déplacemens des points de la corde étant supposés très petits, les variables u, y, z, seront aussi très petites, et la question consistera à déterminer leurs valeurs en fonctions de x et t.

Appelons ds l'élément différentiel de la courbe AM'B, qui répond au point M', et ι la densité de la corde en ce point, multipliée par l'aire de la section perpendiculaire à sa longueur en ce même point, de sorte que ιds soit l'élément de sa masse. Dans l'état d'équilibre, les élémens de cette masse sont proportionnels aux longueurs, puisque la corde est homogène et d'une épaisseur constante; la longueur de l'élément qui répond au point M est dx; sa masse sera donc $\frac{pdx}{gl}$, en appelant p et l le poids et la longueur de la corde entière, et g la gravité; et comme la masse de cet élément ne doit pas changer pendant le mouvement, on aura constamment

$$\iota ds = \frac{pdx}{gl}.$$

Si cet élément ιds était sollicité par une force motrice donnée, dont les composantes parallèles aux axes des coordonnées fussent représentées par $X\iota ds$, $Y\iota ds$, $Z\iota ds$, les composantes suivant ces axes, de la force perdue pendant l'instant dt, seraient

$$\left(X - \frac{d^2 u}{dt^2}\right)\iota ds, \quad \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)\iota ds, \quad \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right)\iota ds;$$

par conséquent, pour avoir les équations d'équilibre de ces forces, qui seront celles du mouvement de la corde, il faudrait mettre

$$X - \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2 z}{dt^2},$$

à la place de X, Y, Z, dans les équations (1) du n° 298, et y substituer pour ιds sa valeur précédente. Or, les quantités X, Y, Z, étant nulles, par hypothèse, il en résulte

$$\left.\begin{aligned} d.\frac{Td\,(x+u)}{ds} &= \frac{p}{gl}\frac{d^2 u}{dt^2}\,dx, \\ d.\,T\frac{dy}{ds} &= \frac{p}{gl}\frac{d^2 y}{dt^2}\,dx, \\ d.\,T\frac{dz}{ds} &= \frac{p}{gl}\frac{d^2 z}{dt^2}\,dx; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

T étant la tension de l'élément ιds, et en observant que $x+u$ est l'abscisse du point M' auquel ces équa-

tions répondent. Elles ne sont intégrables que quand on les a réduites à la forme linéaire, par la considération du peu d'étendue des vibrations de la corde.

484. L'élément de la longueur de la corde étant dx dans l'état d'équilibre et étant devenu ds dans l'état de mouvement, et les tensions qu'il éprouve, dans ces deux états, ayant ϖ et T pour mesures, leur différence $T - \varpi$ devra être proportionnelle au rapport de son extension $ds - dx$ à sa longueur primitive dx (n° 283); on aura donc

$$T - \varpi = \frac{q\,(ds - dx)}{dx};$$

q étant un poids constant et donné, qui dépendra de la matière et de l'épaisseur de la corde. D'ailleurs, on a

$$ds^2 = (dx + du)^2 + dy^2 + dz^2\ ;$$

de plus, si non seulement les points de la courbe AM'B, mais aussi les directions de ses tangentes, s'écartent peu de la droite AMB, les quantités $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ seront de très petites fractions; en négligeant leurs carrés, il en résultera donc

$$ds = dx + du, \quad T = \varpi + q\,\frac{du}{dx};$$

et si l'on néglige également les produits $\frac{du}{dx}\frac{dy}{dx}$ et $\frac{du}{dx}\frac{dz}{dx}$, les équations (1) deviendront

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2 z}{dx^2}, \quad (2)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{glq}{p} = a^2, \quad \frac{gl\varpi}{p} = a^2.$$

Les variables u, y, z, étant séparées dans ces équations (2), on en conclut que les vibrations de la corde, parallèles aux axes de x, y, z, seront indépendantes entre elles, et coexisteront ensemble, sans s'influencer mutuellement. On voit, de plus, que les vibrations *transversales* seront les mêmes dans le sens des y et dans le sens des z; en sorte qu'il suffira de considérer les premières, par exemple. Quant aux vibrations *longitudinales*, nous voyons aussi, en comparant la première des équations (2) à l'une des deux dernières, qu'elles suivront les mêmes lois que les autres, dont elles ne différeront que par la grandeur du coefficient a^2, qui surpassera a^2 dans le rapport de q à ϖ.

485. L'équation aux différences partielles du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2 y}{dx^2},$$

a pour intégrale complète

$$y = f\,(x + at) + F\,(x - at); \quad (3)$$

f et F désignant les deux fonctions arbitraires. En effet, quelle que soit une fonction ψ, on a

$$\frac{d\psi\,(x \pm at)}{dt} = \pm\,a\,\frac{d\psi\,(x \pm at)}{dx},$$

$$\frac{d^2\psi\,(x \pm at)}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2\psi\,(x \pm at)}{dx^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2 f\,(x + at)}{dx^2} + a^2\,\frac{d^2 F\,(x - at)}{dx^2};$$

et comme on a aussi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f\,(x + at)}{dx^2} + \frac{d^2 F\,(x - at)}{dx^2},$$

ces valeurs rendent identique l'équation donnée.

Si le temps t est compté à partir de l'origine du mouvement, et qu'on regarde a, ou $\sqrt{\frac{gl\varpi}{p}}$, comme une quantité positive, $x + at$ sera une quantité positive pendant toute la durée du mouvement, et $x - at$ une quantité négative, ou une quantité positive et moindre que l. Si donc on désigne par ξ une variable positive, il suffira, pour pouvoir faire usage de la formule (3), de connaître les valeurs de $f\xi$ et $F\,(-\xi)$, depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = \infty$, et celles de $F\xi$, depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = l$. Or, on déterminera, comme on va le voir, ces valeurs de $f\xi$ et $F\,(\pm\xi)$, par la condition de l'immobilité des points A et B pendant tout le mouvement, combinée avec l'état initial de la corde.

486. Supposons qu'on ait, à l'origine du mouvement,

$$y = \varphi x, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi' x;$$

ces deux fonctions φx et $\varphi' x$ seront nulles pour $x = 0$ et pour $x = l$, et données, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, par la figure initiale de la corde et d'après les vitesses imprimées, à cette époque, à ses différens points. En faisant $t = 0$ dans la formule (3) et dans sa différentielle par rapport à t, on aura

$$\varphi x = fx + Fx, \quad \varphi' x = a\,\frac{dfx}{dx} - a\,\frac{dFx}{dx};$$

et si l'on fait

$$\frac{1}{a}\int \varphi' x\,dx = \Phi x,$$

'on mette ζ au lieu de x, on en déduira

$$= \frac{1}{2}\varphi\zeta + \frac{1}{2}\Phi\zeta, \quad F\zeta = \frac{1}{2}\varphi\zeta - \frac{1}{2}\Phi\zeta. \quad (4)$$

action $\Phi\zeta$ contiendra une constante arbitraire; il est évident qu'elle disparaîtra dans la for- (3), qui se compose de la somme des valeurs et $F\zeta$, relatives à deux valeurs différentes de ζ. ut donc faire abstraction de cette constante, poser, pour fixer les idées, que la fonction $\Phi\zeta$ ouisse, quand $\zeta = 0$. Les équations (4) fe- lors connaître les valeurs de $f\zeta$ et $F\zeta$, mais ement depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = l$, puisque les fonctions $\varphi\zeta$ et $\Phi\zeta$ ne sont données que dans cet intervalle.

Les points A et B étant fixes, il faudra que les valeurs de y qui répondent à $x = 0$ et $x = l$, soient constamment nulles. En faisant $at = \zeta$, on aura donc, d'après l'équation (3),

$$f\zeta + F(-\zeta) = 0, \quad f(l+\zeta) + F(l-\zeta) = 0, \quad (5)$$

pour toutes les valeurs de la variable positive ζ.

En vertu de la première de ces deux équations, les valeurs de $F(-\zeta)$ seront égales et de signe contraire à celles de $f\zeta$. Si l'on met dans la seconde équation (5), $l + \zeta$ à la place de ζ, et qu'on la retranche ensuite de la première, il vient

$$f(2l + \zeta) = f\zeta;$$

ce qui fera connaître $f\zeta$, depuis $\zeta = 0$, jusqu'à $\zeta = \infty$, quand cette fonction aura été déterminée, depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = 2l$. Enfin, en supposant $\zeta < l$, et mettant $l - \zeta$ à la place de ζ, dans la seconde équation (5), on a

$$f(2l - \zeta) = -F\zeta.$$

Par conséquent, les valeurs de $f(2l - \zeta)$, depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = l$, ou, ce qui est la même chose, celle de $f\zeta$ depuis $\zeta = l$ jusqu'à $\zeta = 2l$, seront connues, d'après les valeurs de $F\zeta$, depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = l$.

Ainsi, les valeurs de $f\zeta$ et $F\zeta$ étant données par les équations (4), depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = l$, les équations (5) détermineront celles de $f(l + \zeta)$ et de $F(-\zeta)$, depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \infty$. On connaîtra donc toutes les valeurs de ces deux fonctions, d'où dépendent celles de y, pour tous les points de la corde et à un instant quelconque du mouvement. Les valeurs correspondantes de $\frac{df\zeta}{d\zeta}$ et $\frac{dF\zeta}{d\zeta}$, et, par suite, celles de $\frac{dy}{dt}$, seront aussi connues; et les valeurs de z et $\frac{dz}{dt}$ s'obtiendront de la même manière. Par conséquent, on connaîtra la figure de la corde, et les vitesses transversales de tous ses points à un instant quelconque; ce qui est la solution complète du problème, en ce qui concerne le mouvement de la corde, perpendiculairement à sa direction naturelle.

Il n'y a rien, dans la question, qui puisse servir à déterminer les valeurs $f(-\zeta)$, non plus que celles de $F\zeta$, qui répondraient à $\zeta > l$; de sorte que ces parties des deux fonctions arbitraires, dont l'usage de la formule (3) n'exige pas la connaissance, resteront tout-à-fait indéterminées.

487. Pour connaître la valeur de y qui résultera des équations (3), (4), (5), je considérerai successivement la partie de cette valeur provenant de la figure initiale de la corde, ou de la fonction φx, et celle qui provient des vitesses initiales de ses différens points, ou de la fonction $\varphi' x$.

1° A l'origine du mouvement, soit ACB (fig. 106) la projection donnée de la corde sur le plan des x et y, de sorte qu'en prenant sur AB la partie $AD = x$, l'ordonnée correspondante DC soit φx. Après avoir prolongé AB, je trace la courbe BC'A', égale à ACB, mais inversement placée, de manière que, si l'on prend $BD' = BD$, l'ordonnée D'C' soit égale et de signe contraire à DC. Sur les deux prolongemens de AA', je répète indéfiniment la courbe ACBC'A'; en sorte que A'C''B'C'''A'' soit la position que prendrait ACBC'A', si cette courbe glissait parallèlement à l'axe des x, jusqu'à ce que A vînt en A' et A' en A'', et que $AC_{,}B_{,}C_{,,}A_{,}$ soit la position de A'C'BCA, après avoir glissé de même jusqu'à ce que A' vînt en A et A en $A_{,}$; et de même au delà de A'' et de $A_{,}$. Cela fait, si l'on prend deux abscisses

$$AE = x + at, \quad AE' = x - at,$$

dont la seconde pourra être positive ou négative, et qu'on élève les ordonnées correspondantes EF et E'F', positives ou négatives, leur demi somme

$$\frac{1}{2}(EF + E'F'),$$

sera la partie de y dépendante de la figure initiale de la corde.

2° Supposons que les ordonnées de la courbe ACB, au lieu d'être les déplacemens primitifs des points de la corde, représentent maintenant leurs vitesses initiales, divisées par a; en sorte qu'en prenant $AD = x$, on ait $DC = \frac{1}{a}\varphi' x$. Traçons une autre courbe ACH (fig. 107), telle qu'à l'abscisse $AD = x$ réponde l'ordonnée $DC = \frac{1}{a}\int\varphi' x dx = \Phi x$. L'intégrale commençant avec x, et la fonction $\varphi' x$ étant aussi nulle, quand $x = 0$, cette courbe touchera l'axe des x au point A. Si l'on prend $AB = l$, et que BH soit l'ordonnée correspondante, on aura

$$BH = \frac{1}{a}\int_0^l \varphi' x dx,$$

et la tangente en H sera parallèle à l'axe des abscisses, à cause que l'on a $\varphi' x = 0$, quand $x = l$. Je

trace la courbe HC'A', égale à ACH, et placée de manière qu'en prenant BD' = BD, on ait D'C' = DC; puis je répète indéfiniment la courbe ACHC'A', sur les deux prolongemens de AA', comme dans la construction précédente; et cela fait, si l'on prend deux abscisses

$$AK = x + at, \quad AK' = x - at,$$

dont la seconde pourra être positive ou négative, et qu'on élève les ordonnées correspondantes KL et K'L', positives ou négatives, on aura

$$\frac{1}{2}(KL - K'L'),$$

pour la partie de y qui résulte des vitesses initiales des points de la corde.

La valeur complète de y sera donc

$$y = \frac{1}{2}(EF + E'F') + \frac{1}{2}(KL - K'L'); \quad (a)$$

et la même construction donnera la valeur correspondante de $\frac{dy}{dt}$. En effet, on a

$$\frac{d.EF}{dt} = a\frac{d.EF}{dx}, \quad \frac{d.E'F'}{dt} = -a\frac{d.E'F'}{dx};$$

$$\frac{d.KL}{dt} = a\frac{d.KL}{dx}, \quad \frac{d.K'L'}{dt} = -a\frac{d.K'L'}{dx};$$

on aura donc

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{2}\left(\frac{d.EF}{dx} - \frac{d.E'F'}{dx}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{d.KL}{dx} + \frac{d.K'L'}{dx}\right).$$

Or, si l'on mène par les points F, F', L, L', (fig. 106 et 107), les tangentes Ff, $F'f'$, Ll, $L'l'$, et les droites Fx, $F'x$, Lx, $L'x$, parallèles à l'axe des x et dirigées dans le sens des x positives, on aura aussi

$$\frac{d.EF}{dx} = \text{tang } xFf, \quad \frac{d.E'F'}{dx} = \text{tang } xF'f',$$

$$\frac{d.KL}{dx} = \text{tang } xLl, \quad \frac{d.K'L'}{dx} = \text{tang } xL'l';$$

il en résultera donc

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{a}{2}(\text{tang } xFf - \text{tang } xF'f'),\\ &+ \frac{a}{2}(\text{tang } xLl + \text{tang } xL'l'),\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

formule dans laquelle les angles seront toujours aigus, mais positifs ou négatifs; ce que la figure indiquera pour chacun des points F, F', L, L'.

On construira de la même manière les valeurs de s et $\frac{ds}{dt}$.

488. Il résulte de la construction des courbes représentées par les figures 106 et 107, que quand le produit at augmente de $2l$, l'ordonnée y et la vitesse $\frac{dy}{dt}$, exprimées par les formules (a) et (b), reprennent les valeurs qu'elles avaient auparavant. Il en est de même à l'égard des valeurs de s et $\frac{ds}{dt}$. Par conséquent, la corde revient au même état, pour sa forme et pour les vitesses transversales de tous ses points, au bout de chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$. Dans le vide, et en supposant les points A et B rigoureusement fixes, la corde exécuterait donc une suite indéfinie de petites oscillations dont la durée serait $\frac{2l}{a}$, pour chaque oscillation entière, l'allée et le retour compris. Mais la résistance de l'air et la communication d'une partie du mouvement de la corde à ses points extrêmes A et B, affaiblissent graduellement les amplitudes de ses oscillations, et finissent par les anéantir, sans altérer sensiblement l'isochronisme; résultat semblable à celui que nous a présenté le mouvement du pendule dans l'air (n° 190), et que je me contente d'indiquer comme une conséquence de l'analyse, confirmée par l'observation.

Si donc on désigne par T la durée d'une vibration ou oscillation entière de la corde, et par n le nombre des vibrations qui auront lieu dans l'unité de temps, on aura

$$T = \frac{2l}{a} = 2\sqrt{\frac{pl}{g\pi}}, \quad n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\pi}{pl}}.$$

Le *ton* d'une corde sonore est d'autant plus élevé qu'elle fait un plus grand nombre de vibrations en un temps donné; il est donc déterminé par le nombre n, lequel est, comme on voit, indépendant de la grandeur des amplitudes, supposées très petites. Pour une même corde, ce nombre est proportionnel à la racine carrée de la tension π; pour deux cordes d'une même matière et d'une même épaisseur, le poids p est proportionnel à la longueur l, et le nombre n, à tension égale, en raison inverse de cette longueur; enfin, pour deux cordes de même longueur et également tendues, n est en raison inverse des racines carrées de leur poids. Ces différentes lois ont été confirmées depuis longtemps par l'expérience. Toutefois il y a des cas dont nous parlerons bientôt, où la corde, à raison de son état initial, se divise en parties égales, jointes par des points qui demeurent immobiles pendant toute la durée du mouvement; ce qui élève le ton proportionnellement au nombre de ces parties aliquotes.

Si les points de la corde n'ont pas de vitesses ini-

tiales, on aura simplement

$$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{EF} + \frac{1}{2}\,\mathrm{E'F'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{a}{2}\,(\tang\, x\mathrm{F}f - \tang\, x\mathrm{F'}f').$$

En considérant avec attention la forme de la courbe représentée par la figure 106, on verra que toutes les fois que at sera un multiple quelconque de l, la vitesse $\frac{dy}{dt}$ sera nulle et la corde reprendra la même figure, mais située dans des positions alternativement inverses l'une de l'autre. ACB (fig. 108) étant sa figure, quant $t = 0$, ce sera encore sa figure et sa position, quand at sera un multiple pair de l; mais lorsque at sera un multiple impair de l, la corde prendra la position inverse AC'B, telle qu'en faisant AD' = BD, on ait D'C' = — DC. Dans ces deux positions extrêmes ACB et AC'B, les vitesses transversales de tous les points de la corde seront zéro; et la corde emploiera le temps $\frac{1}{2}$ T d'une demi-vibration, à passer de l'une à l'autre.

489. En général, les parties des lignes que représentent les figures 106 et 107 ne sont pas les prolongemens analytiques l'une de l'autre; ces lignes forment des courbes *discontinues*, c'est-à-dire, des courbes dont tous les points ne sont pas assujettis à la même équation entre l'abscisse et l'ordonnée; mais, aux points de jonction $A_{,}$, $B_{,}$, A, B, A', B', etc. (fig. 106), $A_{,}$, $H_{,}$, A, H, A', H', etc. (fig. 107), de deux portions différentes, la tangente est toujours commune aux deux parties adjacentes. La courbe relative à la forme initiale de la corde, et celle qui représente la loi des vitesses imprimées à tous ses points, peuvent aussi être des courbes discontinues, pourvu qu'en chacun des points où leur forme change, la tangente reste néanmoins la même pour les deux parties adjacentes.

Cette restriction est fondée sur ce que par leur nature, la force accélératrice d'un point matériel et la vitesse dont il est animé, sont toujours des quantités finies, existantes et mesurables; en sorte que dans les problèmes de Dynamique, les fonctions du temps qui expriment les vitesses et les forces accélératrices des différens points d'un mobile, ne doivent jamais devenir infinies. Ici, la condition relative aux vitesses est remplie; car les vitesses transversales s'expriment par la formule (b), au moyen des tangentes de certains angles, multipliées par la constante a; et par hypothèse, ces angles ne s'élèvent jamais à 90°, et sont, au contraire, toujours très petits. Quant aux forces accélératrices, elles deviendraient infinies, dans les points où deux portions de la corde se couperaient sous un angle fini, et ces forces croîtraient sans limite, près de semblables points de jonction.

En effet, soient m et m' (fig. 105) deux points de la corde, très rapprochés de M', et dont nous rendrons ensuite les distances à ce point infiniment petites. Considérons, à un instant quelconque, les forces qui agissent sur la portion $m\mathrm{M'}m'$ de la corde, c'est-à-dire, les tensions qui ont lieu à ses extrémités, et sont dirigées suivant les parties mh et $m'h'$ des tangentes en m et m'. Représentons ces tensions par H et H', et par μ la masse de $m\mathrm{M'}m'$. Pour que la force accélératrice, parallèle à AB, de cette petite masse, ne devienne pas infinie, quand μ sera infiniment petite, il faudra que la différence H—H' soit très petite et au moins proportionnelle à μ. De plus les composantes de H et H' perpendiculaires à AB et parallèles à l'axe des y, seront $\mathrm{H}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\mathrm{H'}\left[\frac{dy}{dx}\right]$, en substituant $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{dy}{ds}$, comme dans le n° 484, et désignant par $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ qui répondent à m et m'. La force motrice qui tire μ vers AB, aura alors pour valeur

$$\mathrm{H}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \mathrm{H'}\left[\frac{dy}{dx}\right].$$

Pour que la force accélératrice correspondante ne soit pas extrêmement grande et ne devienne pas infinie, quand la masse μ sera infiniment petite, il sera donc nécessaire que cette différence soit aussi très petite, et au moins proportionnelle à μ; et comme les quantités H et H' diffèrent déjà très peu l'une de l'autre, il faudra qu'il en soit de même à l'égard de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ et $\left[\frac{dy}{dx}\right]$, dont la différence devra être infiniment petite, quand les points m et m' seront infiniment rapprochés de M'. Donc, en aucun endroit de la corde et à aucun instant, les tangentes mh et $m'h'$, en deux points infiniment voisins, ne pourront se couper sous un angle fini; ce qu'il s'agissait de faire voir.

Cette conclusion aura encore lieu, lorsque la corde sera composée de deux parties de matières différentes : à leur point de jonction, l'ordonnée y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ devront avoir constamment une même valeur pour ces deux parties; ce qui fournira, comme la fixité des points extrêmes, des équations indispensables pour la détermination des fonctions arbitraires, et sans lesquelles la solution du problème serait indéterminée *.

* *Voyez*, pour cette solution, le *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIIe cahier, page 442.

490. D'Alembert a résolu le premier le problème des cordes vibrantes; la solution qu'il en a donnée est celle qu'on vient d'exposer, et qui est fondée sur l'intégration, sous forme finie, de l'équation $\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$; mais au moyen de la formule (a) du n° 323, on peut aussi résoudre cette question d'une autre manière.

Quelles que soient les fonctions données φx et $\varphi' x$, pourvu qu'elles soient nulles, quand $x = 0$ et quand $x = l$, on a, d'après la formule citée,

$$\left.\begin{aligned} \varphi x &= \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi x' dx'\right)\sin\frac{i\pi x}{l}, \\ \varphi' x &= \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi' x' dx'\right)\sin\frac{i\pi x}{l}, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

pour toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$ inclusivement, c'est-à-dire, pour toute la longueur de la corde; i étant un nombre entier et positif, et les caractéristiques Σ indiquant des sommes qui s'étendent à toutes les valeurs de i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$. D'un autre côté, toute expression telle que

$$y = (A \sin \alpha a t + B \cos \alpha a t) \sin (\alpha x + C), \quad (b)$$

satisfait, comme il est facile de le vérifier, à l'équation donnée

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (c)$$

A, B, α, C, étant des constantes arbitraires. D'après cela, si l'on prend

$$\left.\begin{aligned} y = &\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi x' dx'\right)\sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi a t}{l} \\ &+ \frac{2}{\pi a}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi' x' dx'\right)\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a t}{l}, \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

cette valeur de y satisfera à toutes les conditions du problème, et en renfermera, conséquemment, la solution.

En effet, chacun des termes des sommes Σ satisfera séparément à l'équation (c); par conséquent, ces sommes y satisferont aussi, puisque cette équation est linéaire. Si l'on fait $x = 0$ ou $x = l$ dans la formule (d), on a $y = 0$, quel que soit t; ce qui remplit la condition de la fixité des points extrêmes de la corde. Enfin, la formule (d) donne

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = &\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi x' dx'\right)\sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi a t}{l} \\ &- \frac{2\pi a}{l^2}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi x' dx'\right) i \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a t}{l}; \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

et si l'on fait $t = 0$ dans ces valeurs de y et $\frac{dy}{dt}$, elles deviennent φx et $\varphi' x$, en vertu de l'équation (a); ce qui satisfait à l'état initial de la corde, dans toute sa généralité.

Cette autre solution du problème est due à Lagrange, qui a aussi fait voir qu'elle coïncide avec celle de d'Alembert.

Avant Lagrange, D. Bernouilli avait déjà résolu le problème des cordes vibrantes, en prenant pour y une valeur composée de termes compris dans la formule (b), et assujettis à devenir nuls, quel que soit t, pour $x = 0$ et pour $x = l$, c'est-à-dire, au moyen de l'expression

$$\left.\begin{aligned} y = &\left(A \sin\frac{\pi a t}{l} + B \cos\frac{\pi a t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l} \\ &+ \left(A' \sin\frac{2\pi a t}{l} + B' \cos\frac{2\pi a t}{l}\right)\sin\frac{2\pi x}{l} \\ &+ \left(A'' \sin\frac{3\pi a t}{l} + B'' \cos\frac{3\pi a t}{l}\right)\sin\frac{3\pi x}{l}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

dans laquelle A, A', A'', etc., B, B', B'', etc., sont des constantes arbitraires. Il manquait à cette solution, pour être complète, la détermination de ces coefficiens, d'après un état initial de la corde, donné arbitrairement; ce qui était, sous le rapport de l'analyse, la difficulté principale de la question : cette formule (f) suffisait, d'ailleurs, pour faire connaître les différens modes de vibrations transversales des cordes sonores, et les lois de ces vibrations.

491. Les formules (d) et (e) mettent en évidence les lois du mouvement de la corde vibrante, que l'on a énoncées dans le n° 488; elles montrent aussi que le ton peut quelquefois s'élever, comme on l'a dit dans ce numéro, et le nombre n des vibrations dans l'unité de temps, devenir un multiple de sa valeur générale, sans que la tension de la corde ait été changée.

En effet, supposons que les valeurs de $\varphi x'$ et $\varphi' x'$ soient telles que l'on ait

$$\int_0^l \varphi x' \sin\frac{i\pi x'}{l} dx' = 0, \int_0^l \varphi' x' \sin\frac{i\pi x'}{l} dx' = 0, \quad (g)$$

pour toutes les valeurs de i qui ne sont pas des mul-

tiples d'un nombre donné m; conditions que l'on peut remplir d'une infinité de manières différentes. Les formules (d) et (e) ne renfermeront que des sinus et cosinus des multiples de $\frac{m\pi at}{l}$; par conséquent, l'état et la position de la corde redeviendront les mêmes toutes les fois que at augmentera d'un multiple de $\frac{2l}{m\pi}$; et d'après la valeur de a, celle du nombre n, d'où dépend l'élévation du ton (n° 488), sera

$$n = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{g\alpha}{pl}},$$

c'est-à-dire, qu'il se trouvera augmenté dans le rapport de m à l'unité.

Dans ce cas, la formule (d) ne contiendra que les sinus des multiples de $\frac{m\pi x}{l}$; on aura donc constamment $y = 0$ pour les points équidistans N, N', N'', etc., de la corde (fig. 109), qui répondent à $x = \frac{l}{m}, = \frac{2l}{m}, = \frac{3l}{m}$, etc.; en sorte que ces points, au nombre de $m - 1$, demeureront immobiles, comme les points extrêmes A et B, pendant toute la durée du mouvement. Pour cette raison, on appelle les points N, N', N'', etc., des *nœuds de vibrations*. A l'origine du mouvement, ils n'auront reçu aucune vitesse, et n'auront pas été écartés de la droite AB. Les parties de la corde ACN, NC'N', N'C''N'' etc., situés alternativement d'un côté et de l'autre de AB, vibreront comme des cordes isolées, dont les longueurs AN, NN', N'N'', etc., sont toutes égales à $\frac{l}{m}$, et dont les vibrations isochrones et simultanées s'effectueront dans un temps égal à $\frac{2l}{m\alpha}$.

La manière la plus simple de satisfaire aux conditions exprimées par les équations (g), est de prendre, par exemple,

$$\varphi x = h \sin\frac{m\pi x}{l}, \quad \varphi' x = 0;$$

h étant une constante donnée. Cela suppose que les points de la corde n'ont pas reçu de vitesses initiales, et qu'à l'origine du mouvement elle était formée de m parties égales et situées alternativement d'un côté et de l'autre de AB. Chacune de ces parties de courbe est ce qu'on appelle une *trochoïde*, qui a pour longueur $\frac{l}{m}$, et pour hauteur h. Dans ce cas, la formule (d) se réduit au seul terme de la première partie, qui répond à $i = m$. En effectuant l'intégration relative à x', on a simplement

$$y = h \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi at}{l};$$

la figure de la corde est donc composée, pendant toute la durée du mouvement, d'un nombre m de trochoïdes, d'une largeur constante et d'une hauteur variable; et elle coïncide avec la droite AB, toutes les fois que at est un multiple impair de $\frac{l}{2m}$. Cette solution particulière du problème des cordes vibrantes est celle que Taylor avait donnée, avant que la solution générale fût connue.

492. Tout ce que nous avons dit par rapport aux vibrations transversales s'applique immédiatement aux vibrations longitudinales. Il suffira, pour avoir à un instant quelconque l'expression de la variable u du n° 483, de mettre dans celle qu'on a trouvée pour y, la constante α du n° 484 à la place de a. On prendra alors pour φx le déplacement du point M (fig. 105) à l'origine du mouvement, suivant la longueur de la corde, c'est-à-dire, la valeur initiale de MP; et $\varphi' x$ exprimera la vitesse initiale du point M, suivant MB ou MA, selon qu'elle sera positive ou négative. Ces fonctions φx et $\varphi' x$ seront données arbitrairement, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$; et si elles changent de forme dans cet intervalle, il faudra que, pour les valeurs de x où cela arrivera, chacune de ces fonctions et son coefficient différentiel aient cependant la même valeur dans les deux parties adjacentes de la corde.

Il résulte de là que si l'on appelle T' la durée entière d'une vibration longitudinale, c'est-à-dire, l'intervalle entre deux états identiques de la corde, et n' le nombre de ces vibrations dans l'unité de temps, nous aurons (n° 488)

$$T' = \frac{2l}{\alpha} = 2\sqrt{\frac{pl}{gq}}, \quad n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gq}{pl}}.$$

Ce nombre n' et le ton de la corde qu'il détermine, ne dépendent pas de sa tension α; cependant l'observation indique que le ton longitudinal s'élève un peu quand la tension augmente; circonstance qu'on peut attribuer à ce que la longueur de la corde, comprise entre les points A et B, restant la même, son poids p diminue quand on l'étend davantage.

493. En comparant ce nombre n' à celui des vibrations transversales de la même corde; on a

$$n' = n\sqrt{\frac{q}{\alpha}};$$

en sorte que, toutes choses d'ailleurs égales, le ton provenant des vibrations longitudinales sera plus aigu que celui qui répond aux vibrations transversales, dans le rapport de $\sqrt{q}$ à $\sqrt{\alpha}$.

Le poids q est la tension qu'il faudrait employer pour doubler la longueur naturelle de la corde, en supposant que la loi de son extension fût constante. En effet, si l'on suppose que, pour une tension donnée Δ, la longueur d'une partie quelconque de la corde augmente dans le rapport de $1+\delta$ à l'unité, l'élément adjacent au point M, qui éprouve successivement les tensions ϖ et T dans l'état d'équilibre et dans l'état de mouvement, augmentera dans les rapports de $1+\frac{\delta\varpi}{\Delta}$ et de $1+\frac{\delta T}{\Delta}$ à l'unité; les longueurs dx et ds, dans ces deux états, seront donc entre elles comme $\Delta+\delta\varpi$ est à $\Delta+\delta T$; en sorte que l'on aura

$$\frac{ds}{dx}=\frac{\Delta+\delta T}{\Delta+\delta\varpi};$$

d'où l'on tire

$$\frac{ds-dx}{dx}=\frac{\delta(T-\varpi)}{\Delta},$$

en négligeant le carré de la fraction δ. D'après les valeurs de $ds-dx$ et de $T-\varpi$ du n° 484, on aura donc

$$q=\frac{\Delta}{\delta};$$

par conséquent, q sera la tension qui répondrait à $\delta=1$, ou qui doublerait la longueur de la corde, si son allongement croissait toujours uniformément.

Comme la tension ϖ d'une corde sonore est toujours très éloignée de celle qu'il faudrait employer pour en doubler la longueur, il s'ensuit que le rapport $\sqrt{\frac{q}{\varpi}}$ de n' à n est toujours très considérable. On peut le déterminer, *à priori*, d'après l'allongement de la corde produit par la tension ϖ, et mesuré directement; car si l'on appelle γ cet allongement, on aura

$$\varpi=\frac{\gamma\Delta}{N},$$

puisque N est celui qui répond à la tension Δ; et en substituant cette valeur de ϖ et celle de q dans l'expression de $\frac{n'}{n}$, il vient

$$\frac{n'}{n}=\sqrt{\frac{l}{\gamma}};$$

d'où l'on conclut, réciproquement,

$$\gamma=\left(\frac{n}{n'}\right)^2 l,$$

pour la valeur de l'allongement γ, d'après celle de $\frac{n}{n'}$.

Ce rapport très simple du nombre des vibrations longitudinales à celui des vibrations transversales d'une même corde, a été vérifié par une expérience que M. Cagniard-Latour a faite sur une corde très longue, dont les vibrations transversales étaient visibles et assez lentes pour qu'on pût les compter.

§ II. *Vibrations longitudinales d'une verge élastique.*

494. Cette verge sera homogène; et, dans son état naturel, je la supposerai prismatique ou cylindrique : la figure 110 représente alors une section faite par le filet moyen AB, c'est-à-dire, par la droite qui passe par les centres de gravité de toutes les sections de la verge perpendiculaire à sa longueur (n° 314). Si la verge est, par exemple, un cylindre à base circulaire, AB est son axe de figure; son diamètre est très petit, et dans tous les cas, les dimensions des sections normales sont très petites par rapport à la longueur de cette droite; mais elles sont, cependant, assez grandes pour que la verge résiste à la flexion, et soit ce qu'on appelle une *verge élastique* (n° 306).

Dans le mouvement longitudinal de cette verge, que nous allons d'abord considérer, tous les points appartenant à une même section normale auront, à chaque instant, la même vitesse parallèle à AB; en sorte qu'il suffira de déterminer le mouvement d'un point quelconque M de cette droite.

Prenons sur cette droite un point fixe C; et, dans l'état naturel de la verge, représentons par x la distance CM, qui sera positive ou négative, selon que M appartiendra à la partie CB ou à la partie CA de AB. Dans l'état de mouvement, soit M', au bout du temps t, la position que prendra ce point M; faisons $MM'=u$; et considérons u comme une quantité positive ou négative, selon que ce déplacement aura lieu du côté de B ou du côté de A, de sorte qu'on ait toujours $CM'=x+u$. Il s'agira de déterminer la valeur de u, en fonction de x et t.

Appelons p le poids de la verge, l sa longueur AB, et g la gravité. Dans l'état naturel de la verge, la masse de l'élément qui répond au point M, et qui a dx pour longueur, sera $\frac{pdx}{gl}$. Cette masse ne changera pas pendant le mouvement; et si l'élément est sollicité par une force accélératrice X, dirigée dans le sens M'B ou M'A, selon qu'elle sera positive ou négative, sa force perdue pendant l'instant dt sera

$$\frac{pdx}{gl}\left(X-\frac{d^2u}{dt^2}\right).$$

Désignons par T la tension du même élément qui agit à son extrémité M', et sera une quantité posi-

tive ou négative, selon qu'elle aura lieu du dedans en dehors, ou du dehors en dedans; $T + \frac{dT}{dt} dx$ exprimera la tension qui agira, en sens contraire de T, à l'autre extrémité de cet élément; il sera donc tiré, dans le sens M'B, par une force égale à $-\frac{dT}{dx} dx$; et, pour l'équilibre de cette force et de la précédente, il faudra qu'on ait

$$\frac{dT}{dx} + \frac{p}{gl}\left(X - \frac{d^2 u}{dt^2}\right) = 0;$$

ce qui s'accorde avec l'équation (a) du n° 316.

Aux deux bouts A et B, il faudra, en outre, que la valeur de T soit égale à une force particulière, qui agira suivant AB à l'extrémité A, et suivant le prolongement de AB à l'extrémité B.

495. La longueur naturelle de l'élément que nous considérons étant dx, et sa longueur devenant $dx + du$, quand il est soumis à la tension T, on aura

$$T = q\frac{du}{dx};$$

q désignant un coefficient constant, dont la valeur, donnée par l'observation sera

$$q = \frac{\Delta}{\delta},$$

si l'on représente par δ l'allongement total de la verge, lorsqu'elle est soumise à une tension constante et donnée Δ (n° 493).

Je supposerai qu'aucune force donnée n'agit sur les points de la verge; on fera alors $X = 0$ dans l'équation du mouvement; et en y mettant pour T sa valeur, il en résultera

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (1)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{glq}{p} = a^2.$$

On aura, en outre,

$$v = \frac{du}{dt}, \quad s = \frac{du}{dx}, \quad T = qs,$$

en désignant par v la vitesse du point M', et par s la dilatation de la verge en ce même point. Quand la valeur de s sera négative, cette dilatation se changera en une contraction; et la tension T agira dans le sens M'A ou dans le sens M'B, selon qu'il y aura effectivement, dilatation ou contraction.

L'état de la verge, à un instant quelconque, sera donc connu, lorsqu'on aura déterminé u en fonction de x et t; mais pour obtenir sa valeur, il faudra joindre à l'équation (1) celles qui répondent à l'état initial de la verge et à ses extrémités. Or, quand $t = 0$, je supposerai qu'on ait

$$u = \varphi x, \quad v = \varphi' x,$$

de sorte que φx et $\varphi' x$ soient des fonctions données arbitrairement, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, en prenant pour C la position initiale de A. De plus, à chaque extrémité fixe de la verge, il faudra qu'on ait $u = 0$, pendant toute la durée du mouvement; et T exprimera la pression que ce point fixe aura à supporter. A chaque extrémité libre qui ne sera sollicitée par aucune force donnée, il faudra qu'on ait de même $T = 0$, ou $\frac{du}{dx} = 0$, pour toutes les valeurs de t.

496. On résoudra ce système d'équations de la même manière que celles qui répondent aux cordes vibrantes, soit en partant de l'intégrale sous forme finie de l'équation (1), soit par des formules semblables à celles du n° 490. Voici en employant ces formules les résultats qui répondent aux différentes hypothèses qu'on peut faire sur les extrémités de la verge.

1° Si les deux points A et B sont fixes, il faudra que les fonctions données φx et $\varphi' x$ soient nulles pour $x = 0$ et pour $x = l$, et l'on aura, comme dans le numéro cité,

$$u = \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi x' dx'\right)\sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi a t}{l}$$
$$+ \frac{2}{\pi a}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{i\pi x'}{l}\varphi' x' dx'\right)\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a t}{l}.$$

Toutes les fois que at augmentera de $2l$, cette valeur de u et celles de v et s qui s'en déduisent, et par suite l'état de la verge, redeviendront les mêmes qu'auparavant; par conséquent, si l'on appelle T la durée d'une vibration entière, et n le nombre des vibrations dans l'unité de temps, on aura

$$T = \frac{2l}{a} = 2\sqrt{\frac{pl}{gq}}, \quad n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gq}{pl}};$$

en sorte que le ton sera le même que si la verge était une corde flexible vibrant longitudinalement.

2° Si le point A est fixe et le point B entièrement libre, il faudra que les fonctions φx et $\varphi' x$ soient nulles, quand $x = 0$, et que l'on ait aussi $\frac{d\varphi x}{dx} = 0$ quand $x = l$; l'expression de u sera alors

$$u = \frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\varphi x' dx'\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i-1)\pi a t}{2l}$$
$$+ \frac{4}{\pi a}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\varphi' x' dx'\right)\frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi a t}{2l};$$

les sommes Σ s'étendant toujours à toutes les valeurs du nombre entier i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$. En effet, tous les termes de cette valeur de u satisfont à l'équation (1); ils remplissent, quel que soit t, les conditions $u=0$ quand $x=0$ et $\frac{du}{dx}=0$ quand $x=l$, qui répondent à ce second cas; et, pour $t=0$, on en déduit

$$u=\varphi x=\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\varphi x'dx'\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l},$$

$$\frac{du}{dt}=\varphi' x=\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\varphi' x'dx'\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l};$$

ce qui est effectivement vrai, en vertu de l'équation (7) du n° 326.

La valeur de u et celles de v et de s qu'on en déduit, redeviendront les mêmes, toutes les fois que at augmentera d'un multiple quelconque de $4l$; par conséquent, si l'on appelle T' la durée d'une vibration entière de la verge, ou l'intervalle compris entre deux retours consécutifs de la verge au même état, on aura

$$T'=\frac{4l}{a}.$$

Cette durée sera donc double de celle qui avait lieu dans le premier cas, et le nombre des vibrations dans l'unité de temps sera seulement moitié. Donc le ton longitudinal d'une verge fixe à un bout et libre à son autre extrémité, est à une *octave* au-dessous du ton de la même verge fixe par ses deux bouts; ce qui est effectivement confirmé par l'expérience.

3° Enfin, si la verge est libre à ses deux bouts, les valeurs de $\frac{d\varphi x}{dx}$ devront être nulles pour $x=0$ et pour $x=l$, et l'on aura, dans ce cas,

$$u=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi x'dx'+\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \cos\frac{i\pi x'}{l}\varphi x'dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}$$
$$+\frac{t}{l}\int_0^l \varphi' x'dx'+\frac{2}{\pi a}\Sigma\left(\int_0^l \cos\frac{i\pi x'}{l}\varphi' x'dx'\right)\frac{1}{i}\cos\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi at}{l};$$

les sommes Σ s'étendant, comme précédemment, à toutes les valeurs du nombre entier i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$.

Cette valeur de u satisfait, effectivement, à l'équation (1), ainsi qu'à la condition $\frac{du}{dx}=0$ pour $x=0$ et pour $x=l$, qui doit avoir lieu, quel que soit t, dans ce troisième cas. Pour $t=0$, elle donne

$$u=\varphi x=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi x'dx'+\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \cos\frac{i\pi x'}{l}\varphi x'dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l},$$

$$\frac{du}{dt}=\varphi' x=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi' x'dx'+\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \cos\frac{i\pi x'}{l}\varphi' x'dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l};$$

ce qui s'accorde avec la formule (8) du n° 326.

Lorsque $\int_0^l \varphi' x'dx'$ n'est pas zéro, la verge, indépendamment de ses vibrations, a un mouvement progressif et uniforme, dont la vitesse, commune à tous ses points, est égale à cette intégrale divisée par l. Si on la suppose nulle, la verge deviendra au même état, pour les valeurs de t qui différeront entre elles, d'un multiple de $\frac{2l}{a}$; en sorte que la durée de chacune de ses vibrations, et leur nombre dans l'unité de temps, seront les mêmes que dans le premier cas. Il en résultera donc que le ton d'une verge fixe par les deux bouts, est à l'*unisson* de celui de la même verge entièrement libre; ce qui est aussi conforme à l'expérience.

Au reste, il ne s'agit, dans ce qui précède, que du ton *fondamental*, ou le plus bas, d'une verge élastique. La remarque du n° 491 sur les nœuds de vibrations et sur les élévations de ton qui leur correspondent, s'étendra sans difficulté au mouvement de cette verge, dans chacun des cas qu'on vient d'examiner.

497. Quand la verge dont nous considérons le mouvement longitudinal, s'étendra indéfiniment de part et d'autre du point C, on n'aura plus à tenir compte de ce qui arrive à ses deux bouts et les valeurs de la vitesse v et de la dilatation s, relatives à un point et un instant quelconques, se déduiront immédiatement de l'intégrale de l'équation (1) sous forme finie, dans laquelle il suffira de déterminer les deux fonctions arbitraires, d'après les valeurs initiales de v et s, qui seront données en fonctions de x.

Cette intégrale est

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at);$$

φ et ψ indiquant les deux fonctions arbitraires. On en déduit, à un instant quelconque,

$$\frac{du}{dt} = v = a\left(\frac{d\varphi(x+at)}{dx} - \frac{d\psi(x-at)}{dx}\right),$$

$$\frac{du}{dx} = s = \frac{d\varphi(x+at)}{dx} + \frac{d\psi(x-at)}{dx}.$$

Pour $t = 0$, je suppose qu'on ait

$$v = fx, \quad s = Fx.$$

Dans le cas que nous considérons, ces deux fonctions seront données pour toutes les valeurs positives ou négatives de la variable; en faisant $t = 0$ dans les formules précédentes, on aura

$$a\frac{d\varphi x}{dx} - a\frac{d\psi x}{dx} = fx, \quad \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{d\psi x}{dx} = Fx;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{1}{2}Fx + \frac{1}{2a}fx, \quad \frac{d\psi x}{dx} = \frac{1}{2}Fx - \frac{1}{2a}fx,$$

et par conséquent,

$$\frac{d\varphi(x+at)}{dx} = \frac{1}{2}F(x+at) + \frac{1}{2a}f(x+at),$$

$$\frac{d\psi(x-at)}{dx} = \frac{1}{2}F(x-at) - \frac{1}{2a}f(x-at).$$

Quels que soient t et x, on aura donc

$$\left.\begin{aligned} v &= \tfrac{1}{2}f(x+at) + \tfrac{1}{2}f(x-at) \\ &\quad + \frac{a}{2}F(x+at) - \frac{a}{2}F(x-at), \\ s &= \frac{1}{2a}f(x+at) - \frac{1}{2a}f(x-at) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}F(x+at) + \tfrac{1}{2}F(x-at); \end{aligned}\right\} (2)$$

formules qui feront connaître l'état de la verge à un instant quelconque ; ce qui est la solution complète du problème.

498. Ces équations (2) renferment les lois de la propagation des ondes sonores le long d'une verge élastique, et, généralement, dans une barre solide, homogène, d'une longueur indéfinie, et dont les sections perpendiculaires à cette longueur sont partout les mêmes et d'une petite étendue.

Le son partant du point C, la barre aura été ébranlée, à l'origine du mouvement, dans une étendue peu considérable, de part et d'autre de ce point. En désignant par 2α la longueur de l'ébranlement primitif, les fonctions fx et Fx seront nulles depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \infty$, et depuis $x = -\gamma$ jusqu'à $x = -\infty$; elles seront données arbitrairement et indépendamment l'une de l'autre, pour toutes les valeurs de x comprises entre $\pm\alpha$; et les fonctions $f(x+at)$, $f(x-at)$, $F(x+at)$, $F(x-at)$, n'auront aussi de valeurs différentes de zéro que quand la quantité $x + at$ ou $x - at$, contenue sous le signe f ou F, sera plus grande que $-\alpha$, et plus petite que α, en ayant égard aux signes et en regardant a comme une quatité positive.

D'après cela, dès que at aura surpassé 2α, on aura $v = 0$ et $s = 0$ pour tous les points compris dans l'étendue de l'ébranlement primitif; en sorte que le mouvement de cette partie de la barre ne durera que pendant un temps égal à $\frac{2\alpha}{a}$. Pour un point M situé au delà de cet ébranlement, du côté des x positives, on aura

$$x > \alpha, \quad f(x+at) = 0, \quad F(x+at) = 0;$$

et les équations (2) se réduiront à

$$v = \frac{1}{2}f(x-at) - \frac{a}{2}F(x-at),$$

$$s = -\frac{1}{2a}f(x-at) + \frac{1}{2}F(x-at);$$

d'où il résulte

$$v = -as.$$

Tant qu'on aura $x > at + \alpha$, ces valeurs de v et s seront nulles; elles le redeviendront dès qu'on aura $x < at - \alpha$; l'ébranlement parviendra donc au point M au bout d'un temps égal à $\frac{x-\alpha}{a}$; sa durée sera $\frac{2\alpha}{a}$; et la partie de la barre qui sera ébranlée à la fois, et dont M fera partie, aura 2α pour longueur. Les mêmes résultats auront lieu du côté des x négatives.

Ainsi, de part et d'autre de l'ébranlement primitif, il se produira une *onde sonore*, d'une étendue constante et égale à celle de son ébranlement, qui se propagera uniformément avec la vitesse a. Les vitesses propres que prendront successivement les points de la barre, ne varieront pas avec leurs distances au lieu de l'ébranlement primitif; en sorte que l'intensité du son, qui dépend de la grandeur de ces vitesses, sera constante, et ne s'affaiblira pas en se propageant; ce qui tient à ce que cette propagation a lieu dans une barre cylindrique ou prismatique.

Dans l'étendue d'une onde sonore, la vitesse ne sera pas, comme en tous les points de l'ébranlement primitif, indépendante de la dilatation correspondante : l'une sera proportionnelle à l'autre, en vertu de l'équation $v = -as$, qui montre que

la vitesse v du point quelconque M est une fraction de la vitesse de propagation, exprimée par la dilatation s qui répond au même point, et que le mouvement propre de M aura lieu en sens contraire ou dans le sens de la propagation, selon qu'il y aura en ce point dilatation ou contraction.

Il est important de remarquer que c'est à raison de ce rapport entre v et s, que chaque onde sonore produite ne se partage pas en deux autres, et se propage dans un seul sens. Si ce rapport existait dans toute l'étendue de l'ébranlement primitif, le mouvement ne se propagerait aussi que d'un seul côté. Ainsi, en supposant qu'on ait $fx = -aFx$, les équations (2) se réduiront à

$$v = f(x - at), \quad s = -\frac{1}{a} f(x - at);$$

pour les valeurs de x négatives et plus grandes que $-a$, abstraction faite du signe, on aura donc $v=0$ et $s=0$; en sorte que le mouvement ne se propagera pas au delà de l'ébranlement primitif du côté des x négatives. Il en serait de même du côté des x positives, si l'on supposait $fx = aFx$.

D'après ce qu'on a vu dans le n° 496, la vitesse a de la propagation du son dans une barre indéfinie, pourra se conclure de la durée des vibrations longitudinales d'une verge élastique, de la même matière et d'une longueur donnée. En supposant cette verge fixe ou libre à ses deux bouts, la valeur de a sera égale au double de sa longueur divisée par la durée de chacune de ses vibrations, laquelle durée se déduira de leur nombre dans l'unité de temps, et, par conséquent, du ton le plus bas de la verge : on doublerait le résultat de cette division, si la verge était fixe à une seule extrémité.

499. Au lieu de s'étendre indéfiniment dans le sens des x positives, si la barre est terminée en un point B, situé en dehors de l'ébranlement primitif, le son, après être parvenu en B, sera réfléchi vers le point C; et il se formera un *écho* en ce point B, soit qu'on le suppose fixe, ou qu'il soit entièrement libre.

Je représente par c la distance CB, qui sera plus grande que a. Dans le cas où B est un point fixe, il faudra qu'on ait constamment $v=0$ pour $x=c$. Or, on remplira cette condition en remplaçant les formules (2) par celles-ci :

$$v = \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2} f(2c - x - at)$$
$$+ \frac{a}{2} F(x + at) - \frac{a}{2} F(x - at) + \frac{a}{2} F(2c - x - at),$$
$$s = \frac{1}{2a} f(x + at) - \frac{1}{2a} f(x - at) - \frac{1}{2a} f(2c - x - at)$$
$$+ \frac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2} F(x - at) + \frac{1}{2} F(2c - x - at),$$

sans que ces expressions cessent de représenter l'état initial de la barre, et sans que la valeur de u, qui s'en déduit d'après les équations

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{du}{dx} = s,$$

cesse de satisfaire à l'équation (1).

En effet, la variable x n'étant plus grande que c pour aucun point de la barre, et c surpassant a, on a $2c - x > a$, et, conséquemment, $f(2c - x) = 0$ et $F(2c - x) = 0$; d'où il résulte $v = fx$ et $s = Fx$, quand $t = 0$. A cause de $c > a$, on a aussi $f(c + at) = 0$ et $F(c + at) = 0$; ce qui donne $v = 0$, pour $x = c$ et quel que soit t. Enfin, on a identiquement $\frac{dv}{dx} = \frac{ds}{dt}$; et la valeur de u, dont la différentielle complète est $vdt + sdx$, sera la somme d'une fonction de $x - at$ et d'une fonction de $x + at$, qui satisfera, par conséquent, à l'équation (1).

Cela posé, pour un point M tel que l'on ait $x > a$, les quantités $f(x + at)$ et $F(x + at)$ seront nulles, et les valeurs précédentes de v et s se réduiront à

$$v = v' + v_{,}, \quad s = -\frac{v'}{a} + \frac{v_{,}}{a},$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{2} f(x - at) - \frac{a}{2} F(x - at) = v',$$

$$\frac{a}{2} F(2c - x - at) - \frac{1}{2} f(2c - x - at) = v_{,}.$$

La quantité v' cessera d'être nulle quand on aura $at > x - a$; elle le redeviendra pour $at = x + a$; le temps continuant de croître, $v_{,}$ cessera d'être zéro pour $at = 2c - x - a$, et le redeviendra pour $at = 2c - x + a$; d'où l'on conclut que le point M éprouvera deux ébranlemens séparés l'un de l'autre par un intervalle de temps égal à $\frac{2(c - x + a)}{a}$.

Le premier sera le son direct, et le second le son réfléchi; ils auront l'un et l'autre la même inten-

sité, et se propageront avec la même vitesse a, et comme, d'après le sens de la propagation, l'un répondra à v' et l'autre à $-v_{\prime\prime}$, on voit qu'il y aura, pour tous les deux, le même rapport entre la vitesse propre du point M et la dilatation positive ou négative dont elle sera accompagnée. On trouvera les mêmes résultats en supposant que le point B soit entièrement libre, auquel cas on devra avoir constamment $s = 0$ pour $x = c$.

Ces lois de la propagation et de la réflexion du son dans une barre solide, ont également lieu dans le cas de l'air contenu dans un canal cylindrique ou prismatique, très étroit; celles des vibrations longitudinales d'une verge élastique, qu'on a exposées dans le n° 496, conviennent aussi aux vibrations de l'air renfermé dans un tuyau d'une longueur donnée, ouvert ou fermé à ses extrémités, c'est-à-dire, aux sons des *flûtes*, en faisant abstraction, toutefois, des modifications qui sont dues à l'embouchure *.

§ III. *Choc longitudinal des verges élastiques.*

500. Les formules du n° 496 s'appliquent au choc de deux ou plusieurs verges élastiques, formées d'une même matière, ayant la même section normale, et dont les filets moyens se meuvent sur une même ligne droite. Pour cela, pendant toute la durée du contact de ces corps, on les considérera comme une seule verge élastique, cylindrique ou prismatique, dont l'état, variable d'un instant à l'autre, sera déterminé par ces formules dans toute sa longueur, excepté dans une étendue de grandeur insensible, de part et d'autre des points de jonction.

En effet, considérons seulement deux verges élastiques dont AE et FB (fig. 111) soient les filets moyens. Lorsqu'en se rapprochant à raison de la différence de leurs vitesses, la distance EF de leurs extrémités E et F sera devenue insensible, et ne surpassera plus le rayon d'activité des forces moléculaires, les molécules extrêmes de l'une des deux verges commenceront à agir sur celles de l'autre, et réciproquement; cette action mutuelle subsistera, en variant d'intensité, tant que la distance EF sera moindre que le rayon d'activité; la force totale pourra être répulsive ou attractive; et c'est réellement dans cette action à distance insensible, des points extrêmes des deux corps, que consiste le phénomène du choc. Or, la loi de l'action moléculaire en fonction de la distance nous étant inconnue, on ne pourra pas déterminer la valeur de EF en fonction du temps, non plus que les variations de vitesse que les points extrêmes des deux verges éprouveront en vertu de cette force; en sorte que si e et f sont des points de AE et FB, situés à des distances de E et F, insensibles et moindres que le rayon d'activité moléculaire, les vitesses des points matériels appartenant aux tranches qui ont eE et Ff pour épaisseurs, seront inconnues pendant toute la durée du choc. Mais au delà de e et f, et dans toute l'étendue de Ae et fB, l'équation (1) du n° 495 aura lieu, et l'état de ces deux parties de la verge totale se déterminera, à un instant quelconque, au moyen de l'intégrale de cette équation, suivant l'hypothèse que l'on fera sur les deux bouts A et B, fixes ou mobiles, c'est-à-dire, au moyen des différentes formules du n° 496, dans lesquelles on n'aura plus qu'à mettre des valeurs convenables pour les fonctions arbitraires ϕx et $\phi' x$.

501. Les forces moléculaires variant très rapidement avec la distance, il s'ensuit que les vitesses inconnues des points extrêmes des deux verges varieront de même; de sorte qu'à un instant quelconque les vitesses des points E et F pourront différer beaucoup de celles des points e et f, quoique les distances eE et fF soient insensibles. Il en sera de même à l'égard des vitesses des points e et f, comparées l'une à l'autre, que nous déterminerons d'après leurs valeurs initiales et qui seront inégales et pourront même avoir des signes différens; mais on démontrera, comme dans le n° 489, que la tension T, positive ou négative, devra être sensiblement la même en ces points e et f, sans quoi la force accélératrice de la masse de grandeur insensible, comprise entre les sections normales en ces mêmes points, deviendrait extrêmement grande et comme infinie.

Avant le choc, nous supposerons que chacune des deux verges a la même vitesse dans toute son étendue; dans cet état, la tension T sera nulle pour tous les points des deux mobiles : au commencement du choc, c'est-à-dire, lorsque la distance EF atteindra le rayon d'activité moléculaire, on aura donc $T = 0$ aux points e et f, comme dans tous les autres. La tension, toujours égale pour ces deux points extrêmes, cessera ensuite d'être nulle : nous en déterminerons la valeur; et l'on verra qu'elle redeviendra zéro après un certain intervalle de temps. Or, si à cette époque les vitesses des points e et f permettent que les deux verges se séparent, c'est-à-dire, si ces vitesses sont dirigées en sens contraires, ou bien, si elles sont dirigées dans le même sens, et que la vitesse du point qui va devant soit la plus grande, les deux verges se sépareront effectivement, et le choc sera terminé. Mais si, à l'époque dont il s'agit, les vitesses de e et f ne remplissent pas l'une de ces deux conditions, le choc recommencera, pour ainsi dire; la tension, égale aux points e et f, reparaîtra; puis elle redeviendra nulle au bout d'un nouvel intervalle de temps; et ainsi de suite, de manière que les deux verges ne se sépareront pas, et vibreront comme une verge unique, dont la longueur est AB.

* *Voyez*, sur ce point, mon Mémoire sur le *Mouvement des fluides élastiques dans les tuyaux cylindriques* et sur la *Théorie des instrumens à vent*, qui fait partie du tome II des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que le choc se termine, et que l'une des deux verges se détache de l'autre, est le concours de ces deux circonstances : 1° il est nécessaire que la tension soit nulle aux points e et f, afin que les deux verges ne s'appuient pas l'une contre l'autre; 2° il faut, en même temps, que les vitesses de ces deux points soient dirigées en sens contraire, ou bien, qu'elles soient dirigées dans le même sens, et que celle du point qui va devant soit la plus grande.

Quant aux deux bouts A et B, nous supposerons successivement qu'ils sont libres tous les deux, et qu'un seul est libre et l'autre fixe.

502. Désignons par c et c' les longueurs AE et FB des deux verges, et par l la distance totale AB; de sorte qu'en négligeant la distance insensible EF, on ait $c + c' = l$ pendant toute la durée du choc. Soit M un point quelconque appartenant à AE ou FB; immédiatement avant le choc, appelons x la distance du point M à un point fixe, pris sur la droite AB, et qui sera la position du point A à cet instant. Au bout du temps t, compté de cette époque, soit $x + u$ la distance du même point M à ce point fixe; nous aurons

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}; \qquad (1)$$

a étant une constante qui représentera la vitesse de la propagation du son dans la matière dont les deux verges sont formées (n° 498).

On aura, en même temps,

$$v = \frac{du}{dt}, \qquad T = q\frac{du}{dx},$$

pour la vitesse v du point M, et pour la tension T, positive ou négative, qui aura lieu en ce même point; q désignant une constante donnée. La dilatation qui accompagne la vitesse v se déduira de T, et aura $\frac{1}{q}$ T pour valeur.

Ces trois équations auront lieu pour toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, excepté celles qui répondraient à des points situés entre e et f, et qui différeraient, conséquemment, de c d'une quantité insensible en plus ou en moins.

503. Pour $t = 0$, on aura $u = 0$ dans toute la longueur de AB; ainsi, il faudra supprimer le terme dépendant de φx, dans les formules du n° 496. Examinons d'abord le cas où les deux bouts A et B sont entièrement libres.

Soit h la vitesse commune à tous les points de AE, à l'instant où le choc commence, laquelle vitesse sera supposée positive, ou dirigée de A vers B. Soit aussi h' la vitesse des points de FB, au même instant, qui sera positive ou négative, selon que les deux verges iront à la suite ou à la rencontre l'une de l'autre. Ces constantes h et h' seront données, et leur différence $h - h'$ devra être une quantité positive, afin que le choc ait lieu. Dans l'expression de u relative au troisième cas du n° 496, il faudra prendre pour $\varphi' x$ une fonction qui soit égale à h, depuis $x = 0$ jusqu'à une valeur de x un tant soit peu moindre que c, et égale à h', depuis une valeur de x un tant soit peu plus grande que c, jusqu'à $x = l$, ou, sensiblement, $x = c + c'$. On aura alors, sans erreur appréciable,

$$\int_0^l \varphi' x' dx' = hc + h'c',$$

$$\int_0^l \varphi' x' \cos\frac{i\pi x'}{l} dx' = \frac{l}{i\pi}(h - h') \sin\frac{i\pi c}{l};$$

et, à cause de $\varphi x' = 0$, l'expression de u deviendra

$$u = (hc + h'c')\frac{t}{l} + \frac{2l}{\pi^2 a}(h - h')\,\Sigma\,\frac{1}{i^2}\sin\frac{i\pi c}{l}\cos\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a t}{l};$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier et positif i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$.

On aura donc, dans ce premier cas,

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{1}{l}(hc + h'c') + \frac{2}{\pi}(h - h')\,\Sigma\,\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi c}{l}\cos\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi a t}{l}, \\ T &= -\frac{2q}{\pi a}(h - h')\,\Sigma\,\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi c}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{i\pi a t}{l}; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

et si l'on appelle m et m' les masses des deux verges proportionnelles à leurs longueurs c et c', le premier terme de cette valeur de v est la vitesse $\frac{mh + m'h'}{m + m'}$ de leur centre de gravité. Si les deux vitesses h et h' sont égales et de même signe, on aura constamment $v = h$ et $T = 0$; et, en effet, les deux verges vont alors à la suite l'une de l'autre, avec une vitesse commune, et sans se comprimer.

Les séries périodiques et convergentes que ces formules renferment sont comprises parmi celles dont on sait déterminer les sommes exactement. Pour toutes les valeurs données de x et t, ces sommes se déduiront, sans difficulté, de la formule connue

$$= \sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \text{etc.}, \qquad (3)$$

dans laquelle θ est une variable renfermée entre les limites $\pm\pi$ exclusivement. On pourra donc calculer les valeurs exactes de la vitesse v et de la tension T, à chaque instant et en un point quelconque de Ae et fB; ce qui est la solution complète du problème.

Il y a plusieurs manières de parvenir à la formule (3). On l'obtient, par exemple, en différentiant par rapport à x, l'équation (8) du n° 326, après y avoir mis x^2 pour φx; ce qui donne

$$x = -\frac{1}{l}\Sigma\left(\int_0^l x'^2 \cos\frac{i\pi x'}{l}\cdot\frac{i\pi dx'}{l}\right)\sin\frac{i\pi x}{l};$$

équation qui a lieu pour les valeurs de x moindres que l, et dans laquelle la somme Σ s'étend à toutes les valeurs du nombre entier i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$. En effectuant l'intégration par les règles ordinaires, on a

$$\int_0^l x'^2 \cos\frac{i\pi x'}{l}\cdot\frac{i\pi dx'}{l} = \frac{2l^2}{i\pi}\cos i\pi;$$

on aura donc

$$\frac{\pi x}{2l} = -\Sigma\frac{\cos i\pi}{i}\sin\frac{i\pi x}{l};$$

résultat qui coïncide avec l'équation (3), en faisant $\frac{\pi x}{l}=\theta$.

504. En vertu de la seconde équation (2), la valeur de T est nulle; non seulement quand $t=0$, mais aussi quand t est un multiple quelconque de $\frac{l}{a}$; elle l'est aussi, quel que soit t, aux deux bouts A et B, qui répondent à $x=0$ et $x=l$.

Si t est zéro ou un multiple pair de $\frac{l}{a}$, la première équation (2) donne

$$v = \frac{1}{l}(hc + h'c') + \frac{1}{i}(h-h')\left[\Sigma\frac{1}{\pi}\sin\frac{i\pi(c-x)}{l} + \Sigma\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi(c+x)}{l}\right],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left.\begin{aligned} v = \frac{1}{l}(hc + h'c') \\ -\frac{1}{\pi}(h-h')\left[\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi(c'+x)}{l} + \Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi(c-x)}{l}\right],\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

à cause de $c+c'=l$ et $\cos i\pi = (-1)^i$. Or, on peut prendre $\frac{\pi(c'-x)}{l}$ pour θ dans la formule (3); et il en résulte

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi(c'-x)}{l} = -\frac{\pi(c'-x)}{2l}.$$

Si l'on a $x<c$, c'est-à-dire, si le point M appartient à Ae, on pourra aussi prendre pour θ la quantité $\frac{\pi(c'+x)}{l}$, qui sera moindre que π; on aura donc

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi(c'+x)}{l} = -\frac{\pi(c'+x)}{2l};$$

et ces valeurs réduiront l'équation (4) à $v=h$. Si, au contraire, le point M appartient à fB, on aura $x>c$ et $2l-c'-x<l$; on pourra donc prendre

$$\theta = \frac{\pi(2l-c'-x)}{l};$$

à cause de

$$\sin\frac{i\pi(c'+x)}{l} = -\sin\frac{i\pi(2l-c'-x)}{2l};$$

la formule (3) donnera

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi(c'+x)}{l} = \frac{\pi(2l-c'-x)}{l}.$$

et, au moyen de cette valeur et de celle de $\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi(c'-x)}{l}$, l'équation (4) se réduira à $v=h'$.

Les vitesses initiales h et h' des deux parties Ae et fB de la verge totale, sont donc ainsi vérifiées. On voit, de plus, qu'elles ont lieu non seulement quand $t=0$, mais aussi toutes les fois que t est un multiple pair de $\frac{l}{a}$; et comme à ces époques T est zéro pour la verge entière, il s'ensuit que, pour toutes ces valeurs de t, les deux parties de la verge se trouveront dans le même état qu'au commencement du choc.

On peut remarquer que la première équation (2) serait en défaut, si on l'appliquait à la vitesse initiale du point E; car si l'on y fait $t=0$, et qu'on ait exactement $x=c$, il en résultera

$$v = \frac{1}{l}(hc + h'c') + \frac{2}{\pi}(h-h')\Sigma\frac{(-1)^i}{i}\sin\frac{i\pi c}{l}$$

Or, d'après l'équation (3), on a

$$\Sigma \frac{(-1)^i}{i} \sin \frac{i\pi c}{l} = -\frac{\pi c}{2l};$$

on aurait donc $v = h'$; ce qui ne serait vrai que dans le cas de $h' = h$, où l'état de la partie correspondante à eE ne peut différer de celui du reste de la verge. Mais nous avons dit que, dans le cas général, cette partie et celle qui répond à Ff ne sont pas comprises dans les équations du mouvement.

Si t est un multiple impair de $\frac{l}{a}$, la première équation (3) donne immédiatement

$$v = \frac{1}{l}(hc + h'c')$$
$$+ \frac{1}{\pi}(h - h')\left[\Sigma \frac{(-1)}{i} \sin \frac{i\pi(c - x)}{l} + \Sigma \frac{(-1)^i}{i} \sin \frac{i\pi(c + x)}{l}\right].$$

Or, en comparant cette valeur de v à la formule (4), on voit qu'elles se déduisent l'une de l'autre par l'échange des lettres h et h', c et c'; d'où l'on conclut, sans nouveau calcul, que quant t est un multiple impair de $\frac{l}{a}$, les points qui répondent à une valeur de x moindre que c', auront la vitesse h', et ceux qui répondent à $x > c$, la vitesse h; c'est-à-dire, que si G est un point tel que l'on ait $AG = c'$ et $GB = c$, et qu'on prenne g et g' à des distances insensibles de part et d'autre de G, la vitesse h' aura lieu dans la partie Ag, et la vitesse h dans la partie $g'B$.

505. Il résulte de cette discussion que si l'on a $c = c'$, la partie Ae aura la vitesse h' au bout du temps $t = \frac{l}{a}$, et la partie fB, la vitesse h au bout du même temps; et comme à cet instant la tension T est partout égale à zéro, et que, par hypothèse, on a $h > h'$, il s'ensuit que les deux verges se sépareront l'une de l'autre (n° 501); en sorte que, dans ce cas, la durée du choc aura été $\frac{l}{a}$, et les deux mobiles, parfaitement élastiques et égaux en masse, auront fait, après le choc, échange de leurs vitesses avant le choc.

Réciproquement, si les longueurs c et c' sont différentes, le choc ne finira pas, et les deux verges élastiques ne pourront pas se séparer; car les époques où la tension est nulle coïncideront toujours avec celles d'une vitesse commune et égale, soit à h, soit à h', pour les deux extrémités E et F, ou, plus exactement, pour les deux points e et f.

Mais si l'on a $c' > c$, auquel cas le point G appartiendra à fB, et si l'on suppose que la verge élastique soit coupée en ce point, de sorte que la partie FB soit elle-même formée de deux parties FG et GB, qui avaient une même vitesse h' avant le choc, la partie GB se séparera au bout du temps $t = \frac{l}{a}$. En effet, à cet instant, la tension T sera nulle, et les vitesses h' et h des points g et g' permettront la disjonction des parties AG et GB. Après le choc, dont la durée aura été $\frac{l}{a}$, comme dans le cas de $c' = c$, la partie GB se mouvra avec la vitesse h, et les parties AE et FG, avec la vitesse commune h'. La même chose aurait encore lieu si les trois parties AE, FG, GB, étaient elles-mêmes coupées et divisées en d'autres portions égales ou inégales, pourvu qu'avant le choc toutes les portions de AE eussent une même vitesse h, et toutes les portions de FG et GB une vitesse commune h'.

Ainsi, supposons, par exemple, qu'une verge homogène, prismatique ou cylindrique, soit coupée en un nombre $n + n'$ de parties égales; et imprimons une vitesse h aux n premières parties, avec laquelle elles viendront choquer la série des n' autres parties, qui seront en repos avant cette percussion. Si n surpasse n', aucune partie ne se séparera, et elles seront toutes transportées dans le sens du choc, en oscillant suivant cette direction, et faisant entendre le ton correspondant à la longueur entière de la verge, libre par ses deux bouts; mais si l'on a $n' > n$, les parties antérieures, au nombre de n, se détacheront des autres, pour se mouvoir avec une vitesse commune et égale à h, et les n' autres parties demeureront en repos et juxtaposées. Ce résultat, étendu par analogie à une série de sphères, comprend le phénomène dont il a été question dans le n° 363.

506. Considérons maintenant le cas où le point A est fixe. Avant le choc, supposons que la partie AE soit en repos, et que tous les points de la partie FB aient une vitesse commune et négative, que nous représenterons par $-h$. Il faudra alors faire usage de l'expression θu relative au second cas du n° 496, dans laquelle on fera $\varphi' x = 0$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = c$, et $\varphi' x = -h$ depuis $x = c$ jusqu'à $x = c + c' = l$. A cause de $\varphi x = 0$, pour toutes les valeurs de x, il en résultera

$$u = -\frac{8lk}{\pi^2 a} \Sigma \frac{1}{(2i-1)^2} \cos \frac{(2i-1)\pi c}{2l} \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2i-1)\pi a t}{2l};$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} v &= -\frac{4k}{\pi}\,\Sigma\frac{1}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi c}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2i-1)\pi at}{2l},\\ T &= -\frac{4qk}{\pi a}\,\Sigma\frac{1}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi c}{2}\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2i-1)\pi at}{2l};\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

formules dans lesquelles les séries sont du genre de celles dont on sait déterminer les sommes, et qui feront connaître exactement la vitesse et la tension, à chaque instant, en un point donné de Ac ou de fB.

On emploiera, à cet effet, la formule connue

$$\frac{\pi}{4}=\cos\theta-\frac{1}{3}\cos 3\theta+\frac{1}{5}\cos 5\theta+\text{etc.},\quad(6)$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de θ comprises entre $\pm\frac{1}{2}\pi$ exclusivement, et qui se déduit, par exemple, de la formule (7) du n° 326, en la différentiant après y avoir mis x au lieu de φx, et en y faisant ensuite $\frac{\pi x}{2l}=\theta$.

507. En vertu de la seconde équation (5), la tension T est nulle en tous les points des deux verges, lorsque t est zéro ou un multiple quelconque de $\frac{2l}{a}$.

Si t est zéro ou un multiple pair de $\frac{2l}{a}$, la première équation (5) donne

$$v=-\frac{2k}{\pi}\left[\Sigma\frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi(x+c)}{2l}+\sin\frac{(2i-1)\pi(x-c)}{2l}\right],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left.\begin{aligned} v=\frac{2k}{\pi}\Bigg[&\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi(x-c')}{2l}\\ &-\Sigma\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi(x+c')}{2l}\Bigg],\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

à cause de $c+c'=l$ et $\sin\frac{(2i-1)\pi}{2}=-(-1)^i$.

Or, d'après l'état initial des deux verges, cette formule, en tant qu'elle se rapporte à $t=0$, doit se réduire à $v=0$ pour $x<c$, et à $v=-k$ pour $x>c$; et c'est d'abord ce qu'il s'agit de vérifier.

En prenant $\frac{\pi(x-c')}{2l}$ pour θ dans l'équation (6), il en résulte

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi(x+c')}{2l}=-\frac{\pi}{4}.$$

Quand on a $x<c$, on peut aussi prendre $\frac{\pi(x+c')}{2l}$ pour θ; ce qui donne

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi(x+c')}{2l}=-\frac{\pi}{4};$$

et ces formules réduisent, effectivement, l'équation (7) à $v=0$. Quand on a $x>c$, on aura aussi $2l-x-c'<l$; en prenant donc

$$\theta=\frac{\pi(2l-x-c')}{2l},$$

et observant que

$$\cos\frac{(2i-1)\pi(x+c')}{2l}=-\cos\frac{(2i-1)\pi(2l-x-c')}{2l},$$

la formule (6) donnera

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi(x+c')}{2l}=\frac{\pi}{4};$$

au moyen de quoi et de la valeur précédente de $\Sigma\frac{(-1)^i}{2i-1}\cos\frac{(2i-1)\pi(x-c')}{2l}$, l'équation (7) se réduira à $v=-k$, comme cela doit être.

Lorsque t est un multiple impair de $\frac{2l}{a}$, la valeur de v, donnée par la première équation (5), est égale et de signe contraire à celle qui a lieu quand t est zéro ou un multiple pair de $\frac{2l}{a}$; il s'ensuit donc qu'au bout d'un temps égal à $\frac{2l}{a}$, tous les points de Ac ont des vitesses nulles, et tous ceux de fB, des vitesses positives et égales à k; et comme à cet instant la tension T est partout égale à zéro, il en résulte que la verge fB se détachera de la

verge AE, et sera réfléchie avec une vitesse égale et contraire à celle qu'elle avait avant le choc.

Ainsi le choc de la verge FB contre la verge AB, qui s'appuie en A contre un obstacle fixe, durera pendant un temps égal à $\frac{2l}{a}$, et sera conforme à ce qui a été dit, dans le n° 362, sur la réflexion d'un corps parfaitement élastique. On peut aussi remarquer qu'au milieu du choc, c'est-à-dire, au bout d'un temps égal à $\frac{l}{a}$, on aura $v = 0$, d'après la première équation (5), pour toutes les valeurs de x; en sorte qu'à cet instant la verge choquante FB aura perdu toute sa vitesse, et la verge AE n'aura aussi aucun mouvement. Au même instant, on aura, en vertu de la seconde équation (5),

$$T = \frac{2qk}{\pi a}\left[\Sigma \frac{(-1)}{2i-1} \cos \frac{(2i-1)\pi(x-c)}{2l} + \Sigma \frac{(-1)^i}{2i-1} \cos \frac{(2i-1)\pi(x+c)}{2l}\right];$$

d'où l'on conclura, par le même calcul que pour l'équation (7), $T = -\frac{qk}{a}$ ou $T = 0$; selon qu'on aura $x < c$ ou $x > c$. Au milieu du choc, la tension est donc nulle pour toute l'étendue de la verge choquante; mais la verge choquée est condensée uniformément; et c'est la pression qu'elle exerce dans le sens AE, ou de dedans en dehors, qui fait rebondir la verge choquante.

§ IV. *Digression sur les intégrales des équations aux différences partielles.*

508. Si l'on excepte un petit nombre d'équations aux différences partielles, celles d'un ordre supérieur au premier ne sont point intégrables sous forme finie, lors même qu'il s'agit d'équations linéaires. Pour résoudre les problèmes qui conduisent à ces équations, on est donc obligé, le plus souvent, de recourir à leurs intégrales en séries; et il faut alors qu'on soit certain, dans chaque cas, que la série dont on fait usage a toute la généralité que comporte l'équation donnée aux différences partielles, et qu'elle renferme des fonctions arbitraires en nombre suffisant pour exprimer l'intégrale complète de cette équation. Or, il n'y a pas de règle générale à ce sujet : ce nombre peut être moindre que celui qui marque l'ordre de l'équation donnée, ou des différences partielles les plus élevées qu'elle renferme; il change avec la quantité suivant les puissances de laquelle la série est ordonnée; et il peut même arriver que toutes les fonctions arbitraires disparaissent, et que la série ne contienne plus qu'un nombre infini de constantes arbitraires, sans qu'elle, cesse néanmoins, d'exprimer l'intégrale complète. Ce sont ces diverses circonstances que nous allons examiner, d'abord en général, et ensuite plus particulièrement, en ce qui concerne les équations linéaires auxquelles on est conduit dans la plupart des problèmes de Mécanique et de Physique.

509. Soit u une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes t, x, y, z, etc. Supposons que cette fonction doive satisfaire à une équation donnée aux différences partielles, que nous représenterons par $L = 0$. Quelle que soit la valeur de u, on peut toujours la concevoir développée en série ordonnée suivant les puissances de l'une des variables t, x, y, z, etc., ou, plus généralement, d'une autre quantité θ dépendante d'une ou plusieurs de ces variables. Soit donc

$$u = P\theta^{\alpha} + Q\theta^{\beta} + R\theta^{\gamma} + \text{etc.}; \quad (a)$$

α, β, γ, etc., P, Q, R, etc., étant des exposans et des coefficiens indéterminés. Si je substitue cette valeur de u dans l'équation $L = 0$, que je développe ensuite L suivant les puissances de θ, et que j'égale séparément à zéro les coefficiens de tous les termes de ce développement, j'aurai une série d'équations, dont chacune renfermera une variable indépendante de moins que $L = 0$; et si je parviens à obtenir les valeurs les plus générales de α, β, γ, etc., P, Q, R, etc., qui satisfassent à cette suite d'équations, la série (a) sera aussi la valeur la plus générale de u qui satisfera à l'équation $L = 0$. Selon la quantité θ qu'on choisira, on aura ainsi différentes expressions de u en série, qui seront toutes, sous des formes équivalentes, l'intégrale complète de $L = 0$; en sorte que si cette intégrale peut aussi s'exprimer sous forme finie, chacune de ces séries en sera un développement différent, et pourra toujours s'en déduire. Toutefois, lorsqu'on sera parvenu, d'après les autres conditions du problème qui aura conduit à l'équation $L = 0$, à déterminer toutes les quantités arbitraires que contiendra la série (a), il faudra qu'elle soit convergente pour qu'on en puisse faire usage; et si elle devient divergente pour des valeurs de θ, on devra changer cette quantité, et remplacer la série (a) par une autre, ordonnée suivant les puissances d'une variable différente.

Cela posé, en prenant pour $L = 0$, des équations linéaires de différens ordres, on verra que les coefficiens P, Q, R, etc., déterminés de la manière la plus générale, peuvent néanmoins renfermer des nombres inégaux de fonctions arbitraires, selon que la série (a) sera ordonnée suivant les puissances de telle ou telle variable θ; et l'on verra

même, comme nous l'avons dit plus haut, qu'il pourra arriver que toutes les fonctions arbitraires disparaissent de cette série, qui ne renfermera plus alors que des constantes arbitraires en nombre infini, et qui n'en sera pas moins l'intégrale complète de l'équation $L = 0$. Le caractère distinctif de cette forme singulière de l'intégrale complète, sans aucune fonction arbitraire, d'une équation linéaire aux différences partielles, consiste en ce que tous les termes de la série qui la représente se déterminent indépendamment les uns des autres, et satisfont séparément à l'équation donnée, de manière que la valeur générale de u est la somme d'un nombre infini de valeurs particulières de cette fonction.

510. Soit, pour exemple, l'équation très simple, linéaire et aux différences partielles du second ordre,

$$\frac{du}{dt} = a\,\frac{d^2 u}{dx^2} \qquad (b)$$

dans laquelle a est une constante donnée. Si l'on développe la valeur de u suivant les puissances de t, on trouve pour la série la plus générale qui satisfasse à cette équation

$$u = \varphi x + at\,\frac{d^2 \varphi x}{dx^2} + \frac{a^2 t^2}{1.2}\,\frac{d^4 \varphi x}{dx^4} + \frac{a^3 t^3}{1.2.3}\,\frac{d^6 \varphi x}{dx^6} + \text{etc.}; \qquad (c)$$

φx étant une fonction arbitraire. Sous cette forme, l'intégrale complète de l'équation (b) ne comporte donc qu'une seule fonction arbitraire, laquelle représente la valeur de u qui répond à $t = 0$. Mais si l'on développe la valeur générale de u suivant les puissances de x, on trouve

$$\left.\begin{aligned} u = \psi t &+ \frac{x^2}{1.2}\,\frac{d\psi t}{a\,dt} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\,\frac{d^2 \psi t}{a^2\,dt^2} + \text{etc.} \\ &+ x\Psi t + \frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{d\Psi t}{a\,dt} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\,\frac{d^2 \Psi t}{a^2\,dt^2} + \text{etc}; \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

ψt et Ψt étant deux fonctions arbitraires, qui expriment les valeurs de u et $\frac{du}{dx}$, relatives à $x = 0$. Par conséquent, sous cette autre forme, l'intégrale complète de l'équation (b) renferme deux fonctions arbitraires.

Ces deux séries s'obtiennent par la méthode des coefficiens et des exposans indéterminés, en faisant successivement $\theta = t$ et $\theta = x$ dans la série (a). On les déduit aussi du théorème de Taylor; car on a, d'après ce théorème,

$$u = U + (t - \alpha)\,U' + \frac{(t-\alpha)^2}{1.2}\,U'' + \frac{(t-\alpha)^3}{1.2.3}\,U''' + \text{etc.},$$

en désignant par α une valeur particulière de t, et supposant

$$u = U,\ \frac{du}{dt} = U',\ \frac{d^2 u}{dt^2} = U'',\ \frac{d^3 u}{dt^3} = U''',\ \text{etc.},$$

pour cette valeur $t = \alpha$. Or, l'équation (b) et ses différentielles successives par rapport à t donnent

$$U' = a\,\frac{d^2 U}{dx^2},$$

$$U'' = a\,\frac{d^2 U'}{dx^2} = a^2\,\frac{d^4 U}{dx^4},$$

$$U''' = a\,\frac{d^2 U''}{dx^2} = a^3\,\frac{d^6 U}{dx^6},$$

etc.

La quantité U restera donc seule arbitraire, et l'on aura

$$u = U + a\,(t - \alpha)\,\frac{du}{dx} + \frac{a^2\,(t-\alpha)^2}{1.2}\,\frac{d^2 U}{dx^2} + \text{etc.};$$

ce qui coïncide avec la série (c), quand on prend zéro pour la constante α, c'est-à-dire, quand on développe suivant les puissances de t, et que l'on fait $U = \varphi x$. On obtiendra semblablement la série (d).

Ces deux séries (c) et (d) peuvent, au reste, se transformer l'une dans l'autre. En effet, développons φx suivant les puissances de x, et soit

$$\varphi x = A + Bx + \frac{Cx^2}{1.2} + \frac{Dx^3}{1.2.3} + \frac{Ex^4}{1.2.3.4} + \frac{Fx^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.},$$

où l'on désigne par A, B, C, D, E, F, etc., des constantes arbitraires; nous aurons

$$\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = C + Dx + \frac{Ex^2}{1.2} + \frac{Fx^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^4\varphi x}{dx^4} = E + Fx + \text{etc.}$$

etc.;

au moyen de quoi la série (*c*) deviendra

$$\begin{aligned} u = {} & A + Cat + \frac{Ea^2t^2}{1.2} + \text{etc.} \\ & + \left(B + Dat + \frac{Fa^2t^2}{1.2} + \text{etc.}\right)x \\ & + \left(C + Eat + \text{etc.}\right)\cdot\frac{x^2}{1.2} \\ & + \left(D + Fat + \text{etc.}\right)\frac{x^3}{1.2.3}, \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, si l'on fait

$$A + Cat + \frac{Ea^2t^2}{1.2} + \text{etc.} = \psi t,$$

$$B + Dat + \frac{Fa^2t^2}{1.2} + \text{etc.} = \Psi t,$$

ψt et Ψt seront deux fonctions arbitraires et indépendantes l'une de l'autre; on en déduira

$$C + Eat + \text{etc.} = \frac{d\psi t}{adt};$$

$$D + Fat + \text{etc.} = \frac{d\Psi t}{adt},$$

etc.;

et la valeur précédente de u coïncidera avec la série (*d*). On transformera semblablement cette série (*d*) dans la série (*c*).

511. Maintenant, désignons, à l'ordinaire, par e la base des logarithmes népériens, et prenons $\theta = e_x$. La série (*a*) deviendra

$$u = Pe^{\alpha x} + Qe^{\zeta x} + Re^{\gamma x} + \text{etc.};$$

les coefficiens P, Q, R, etc., seront des fonctions de t, et les exposans α, ζ, γ, etc. des quantités constantes. On aura donc

$$\frac{du}{dt} = \frac{dP}{dt}e^{\alpha x} + \frac{dQ}{dt}e^{\zeta x} + \frac{dR}{dt}e^{\gamma x} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \alpha^2 Pe^{\alpha x} + \zeta^2 Qe^{\zeta x} + \gamma^2 Re^{\gamma x} + \text{etc.}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (*b*), et égalant ensuite les coefficiens des termes semblables dans les deux membres, on en conclut

$$\frac{dP}{dt} = a\alpha^2 P,\quad \frac{dQ}{dt} = a\zeta^2 Q,\quad \frac{dR}{dt} = a\gamma^2 R,\quad \text{etc.};$$

par conséquent, les exposans α, ζ, γ, etc., resteront arbitraires, et l'on aura

$$P = Ae^{a\alpha^2 t},\quad Q = Be^{a\zeta^2 t},\quad R = Ce^{a\gamma^2 t},\quad \text{etc.},$$

en désignant aussi par A, B, C, etc., des constantes arbitraires. Donc il en résultera

$$u = Ae^{a\alpha^2 t}e^{\alpha x} + Be^{a\zeta^2 t}e^{\zeta x} + Ce^{a\gamma^2 t}e^{\gamma x} + \text{etc.},\qquad (e)$$

pour l'intégrale complète de l'équation (*b*), ordonnée suivant les puissances de l'exponentielle e^x; série qui est aussi le développement de cette intégrale, ordonnée suivant les puissances de e^t. Or, on voit que cette série (*e*) ne contient explicitement aucune fonction arbitraire; qu'elle renferme seulement deux séries infinies A, B, C, etc., α, ζ, γ, etc., de constantes arbitraires; et que chacun de ses termes satisfait isolément à l'équation (*b*).

En développant cette expression de u suivant les puissances de t, on a

$$\begin{aligned} u = {} & Ae^{\alpha x} + Be^{\zeta x} + Ce^{\gamma x} + \text{etc.} \\ & + (A\alpha^2 e^{\alpha x} + B\zeta^2 e^{\zeta x} + C\gamma^2 e^{\gamma x} + \text{etc.})at \\ & + (A\alpha^4 e^{\alpha x} + B\zeta^4 e^{\zeta x} + C\gamma^4 e^{\gamma x} + \text{etc.})\frac{a^2t^2}{1.2} \\ & + \text{etc.}; \end{aligned}$$

et si l'on fait

$$Ae^{\alpha x} + Be^{\zeta x} + Ce^{\gamma x} + \text{etc.} = \varphi x,$$

φx sera une fonction arbitraire, on aura

$$A\alpha^2 e^{\alpha x} + B\zeta^2 e^{\zeta x} + C\gamma^2 e^{\gamma x} + \text{etc.} = \frac{d^2\varphi x}{dx^2},$$

$$A\alpha^4 e^{\alpha x} + B\zeta^4 e^{\zeta x} + C\gamma^4 e^{\gamma x} + \text{etc.} = \frac{d^4\varphi x}{dx^4},$$

etc..

et la série (*e*) coïncidera avec la série (*c*). On fera de même coïncider la série (*e*) avec la série (*d*), en développant la première suivant les puissances de x, pour la rendre comparable à la seconde.

512. Chacune des deux séries (*c*) et (*e*) peut être exprimée sous forme finie, au moyen d'une même intégrale définie.

D'abord, en désignant par n un nombre entier

positif, on a évidemment

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,\omega^{2n-1}\,d\omega = 0.$$

Soit aussi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,d\omega = k;$$

en désignant par g une constante positive, et mettant $\omega\sqrt{g}$ et $\sqrt{g}\,d\omega$ à la place de ω et $d\omega$, les limites de cette intégrale ne seront pas changées, et l'on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-g\omega^2}\,d\omega = \frac{k}{\sqrt{g}}$$

d'où l'on tire

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,\omega^{2n}\,d\omega = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2^n}\,k,$$

en différentiant n fois de suite par rapport à g, et faisant ensuite $g=1$. Au moyen de ces valeurs, la formule (c) pourra s'écrire ainsi :

$$u = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi x + 2\omega\sqrt{at}\,\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{4\omega^2\,at}{1.2}\,\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\right.$$

$$\left. + \frac{8\omega^3\,at\sqrt{at}}{1.2.3}\,\frac{d^3\varphi x}{dx^3} + \frac{16\omega^4\,a^2t^2}{1.2.3.4}\,\frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \text{etc.}\right)e^{-\omega^2}\,d\omega;$$

et, d'après le théorème de Taylor, elle se réduira à

$$u = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,\varphi\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)d\omega. \quad (f)$$

Quelle que soit la constante a, on ne changera pas non plus les limites de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega}\,d\omega$, en y mettant $\omega - a\sqrt{at}$ au lieu de ω; on aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 + 2\omega a\sqrt{at} - a^2 at}\,d\omega = k;$$

d'où l'on tire

$$e^{a^2 at} = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,e^{2\omega a\sqrt{at}}\,d\omega,$$

On exprimera de même les autres exponentielles qui entrent dans la série (e), laquelle deviendra, de cette manière,

$$u = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\left[Ae^{\alpha\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)} + Be^{\beta\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)}\right.$$

$$\left. + Ce^{\gamma\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)} + \text{etc.}\right]e^{-\omega^2}\,d\omega.$$

Or, si nous faisons, comme plus haut,

$$Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + \text{etc.} = \varphi x,$$

nous aurons en même temps,

$$Ae^{\alpha\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)} + Be^{\beta\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)}$$

$$+ e^{\gamma\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)} + \text{etc.} = \varphi\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right);$$

ce qui fait coïncider la valeur précédente de u avec la formule (f).

Cette équation (f) est, sous forme finie, l'intégrale complète de l'équation (b); elle ne renferme, comme on voit, qu'une seule fonction arbitraire, qui se déterminera immédiatement d'après la valeur de u relative à $t=0$. Toutefois, cette forme de l'intégrale complète suppose que cette valeur de u, qui sera celle de φx, croisse avec la variable dans un moindre rapport que e^{x^2}, et que le produit $e^{-x^2}\varphi x$ s'évanouisse pour $x = \pm\infty$, sans quoi la quantité comprise sous le signe $\int$ croîtrait indéfiniment avec ω, pour toutes les valeurs de t différentes de zéro, et l'intégrale définie, dont les limites sont $\omega = \pm\infty$, aurait généralement une valeur infinie, ce qui est inadmissible

Si nous faisons, pour un moment,

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \varphi' x, \quad \frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \varphi'' x,$$

nous déduirons de l'équation (f),

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,\varphi'\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)\frac{\omega\,d\omega}{\sqrt{at}},$$

$$a\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{a}{k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,\varphi''\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)d\omega,$$

en intégrant par partie, et supposant que le produit de $e^{-\omega^2}$ et $\varphi'\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)$ s'évanouisse aux deux limites, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,\varphi'\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)\frac{\omega\,d\omega}{\sqrt{at}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,\varphi''\left(x + 2\omega\sqrt{at}\right)d\omega;$$

ce qui fait coïncider la valeur de $\frac{du}{dt}$ avec celle de $a\frac{d^2u}{dx^2}$, et satisfait, par conséquent, à l'équation (b).

En partant de la série (d), on parviendrait à une intégrale sous forme finie de cette équation, moins simple que la formule (f), et qui contiendrait deux fonctions arbitraires.

513. La valeur connue de la quantité k, renfermée dans les formules précédentes, est $\sqrt{\pi}$. On l'obtient, par exemple, en employant successivement deux variables différentes sous le signe $\int$, de manière qu'on ait

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \quad k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy;$$

d'où l'on conclut

$$k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

à cause que les deux variables x et y sont indépendantes l'une de l'autre. Si donc on fait

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad e^{-x^2-y^2} = z,$$

d'où il résultera

$$k^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z\,dx\,dy,$$

et si l'on regarde x, y, z, comme les coordonnées courantes d'une surface, k^2 sera le volume terminé par cette surface de révolution, et prolongé indéfiniment autour de son axe de figure, qui sera l'axe des z. Or, on obtiendra la valeur de ce volume en le décomposant en un nombre infini de tranches cylindriques, dont cette droite sera l'axe commun. Le volume de l'une de ces tranches infiniment minces, dont les surfaces intérieure et extérieure auront r et $r + dr$ pour rayons, sera égal au produit de sa base $2\pi r dr$, multiplié par sa hauteur z ou e^{-r^2}; le volume entier s'en déduira, évidemment, en intégrant depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \infty$; par conséquent, on aura

$$k^2 = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r dr = \pi,$$

et $k = \sqrt{\pi}$; ce qu'il s'agissait de trouver.

Je ferai remarquer qu'en prenant $\varphi x = \cos x$, et mettant a^2 au lieu de at dans l'équation (e), on aura

$$u = \left(1 - a^2 + \frac{a^4}{1.2} - \frac{a^6}{1.2.3} + \text{etc.}\right)\cos x,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$u = e^{-a^2}\cos x.$$

L'équation (f) devient, en même temps,

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\cos(x + 2a\omega)\,d\omega;$$

mais on a évidemment

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\cos 2a\omega d\omega = 2\int_0^{\infty} e^{-\omega^2}\cos 2a\omega d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\sin 2a\omega d\omega = 0;$$

d'où l'on conclut

$$u = \frac{2\cos x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\omega^2}\cos 2a\omega d\omega;$$

et en égalant cette valeur de u à l'une des précédentes, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^2}\cos 2a\omega d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

On peut donner une valeur imaginaire à la constante a dans cette équation; et si l'on y met $\sqrt{-1}$ au lieu de a, on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^2}\left(e^{2a\omega} + e^{-2a\omega}\right)d\omega = \sqrt{\pi}\,e^{a^2}.$$

On a souvent occasion d'employer ces formules, qui se présentaient ici naturellement, et que l'on obtient aussi par d'autres moyens.

514. Les équations aux différences partielles auxquelles on est conduit, dans la plupart des problèmes de Mécanique ou de Physique, sont linéaires à l'égard d'une inconnue u, du premier ou du second ordre par rapport au temps, et généralement à quatre variables indépendantes, dont u est fonction, savoir, le temps, que nous représenterons par t, et les trois coordonnées d'un point quelconque du système dont on s'occupe, que nous désignerons par x, y, z. Si l'on excepte leur dernier terme, indépendant de u et qu'on peut toujours faire disparaître, elles ne contiennent pas cette variable t explicitement, c'est-à-dire, que dans ces équations les coefficiens ne sont fonctions que de x, y, z. Or, $L = 0$ étant une de ces équations sans dernier terme, si l'on prend $\theta = e^t$, la série (a) deviendra

$$u = Pe^{\alpha t} + Qe^{\beta t} + Re^{\gamma t} + \text{etc.}; \quad (g)$$

et si l'on substitue, dans L, cette série (g) au lieu de u, il est aisé de voir qu'il en résultera

$$L = (M\alpha^2 + N\alpha + O)e^{\alpha t} + (M'\beta^2 + N'\beta + O')e^{\beta t}$$
$$+ (M''\gamma^2 + N''\gamma + O'')e^{\gamma t} + \text{etc.};$$

M, N, O, étant des quantités qui ne contiennent que l'inconnue P, d'où se déduiront M', N', O', en y mettant Q au lieu de P, puis M'', N'', O'', par la substitution de R à la place de Q, et ainsi de suite. Toutes les quantités M, M', M'', etc., seront nulles, lorsque l'équation $L = 0$ ne sera que du premier ordre, par rapport à t. Dans tous les cas, cette équation donnée $L=0$ se décomposera en celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l} M\alpha^2 + N\alpha + O = 0, \\ M'\beta^2 + N'\beta + O' = 0, \\ M''\gamma^2 + N''\gamma + O'' = 0, \\ \text{etc.} \end{array}\right\} (h)$$

Par conséquent, les exposans α, β, γ, etc., seront des constantes arbitraires; les coefficiens P, Q, R, etc., se détermineront indépendamment l'un de l'autre, au moyen de ces équations (h), qui sont toutes semblables; et tous les termes de la série (g), c'est-à-dire, de l'intégrale complète de l'équation $L = 0$, ordonnée suivant les puissances de l'exponentielle e^t, seront des intégrales particulières de cette même équation.

Les équations (h) seront linéaires, comme $L=0$, par rapport à l'inconnue que chacune d'elles renfermera. Si L ne contient qu'une seule des trois coordonnées x, y, z, elles seront simplement des équations différentielles; et alors la série (g) ne renfermera que des constantes arbitraires, savoir, α, β, γ, etc., et les constantes qui seront introduites par l'intégration des équations (h). Quand elles seront aux différences partielles, on pourra souvent les traiter comme l'équation $L = 0$, et exprimer leurs intégrales complètes en série d'intégrales particulières.

515. On peut donner une autre forme à la série (g), en y changeant les exponentielles en sinus et cosinus. Soient, en effet, λ, μ, ν, etc., d'autres constantes arbitraires, et p, q, r, etc., p', q', r', etc., d'autres inconnues. Si l'on met dans cette série $\pm\lambda\sqrt{-1}$, $\pm\mu\sqrt{-1}$, $\pm\nu\sqrt{-1}$, etc., au lieu de α, β, γ, etc.; qu'on y remplace P, Q, R, etc., par $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p'\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}q \pm \frac{1}{2}q'\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}r \pm \frac{1}{2}r'\sqrt{-1}$, etc.; et que l'on prenne ensuite la somme des valeurs de u qui répondront aux deux signes de $\sqrt{-1}$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} u = p\cos\lambda t + q\cos\mu t + r\cos\nu t + \text{etc.} \\ \quad + p'\sin\lambda t + q'\sin\mu t + r'\sin\nu t + \text{etc.} \end{array}\right\} (i)$$

Pour la généralité de l'intégrale de $L=0$, exprimée indifféremment par cette dernière formule ou par la série (g), il faudra que les constantes λ, μ, ν, etc., aussi bien que α, β, γ, etc., soient réelles ou imaginaires; mais il y a des problèmes dans lesquels les valeurs déterminées de λ, μ, ν, etc., seront toutes réelles, et d'autres dans lesquels aucune des valeurs de α, β, γ, etc., ne sera imaginaire. Dans le premier cas, il conviendra d'employer la formule (i), et dans le second la formule (g); et lors même que l'équation $L = 0$ sera intégrable sous forme finie, il arrivera souvent, dans des problèmes de Mécanique ou de Physique, que l'expression de son intégrale, au moyen de l'une ou l'autre de ces deux séries sera plus propre que l'intégrale sous forme finie, à faire découvrir toutes les circonstances du phénomène dont on s'occupera. Les questions relatives aux petites oscillations des points d'un corps élastique ou d'un fluide, qu'on a un peu écartés de leur état d'équilibre, sont celles où il conviendra d'employer les expressions des inconnues sous la forme de la série (i).

Lorsque les valeurs générales de P, Q, R, etc., et, par suite, celles de p, q, r, etc., p', q', r', etc., ne renfermeront que des constantes arbitraires, la formule (i) s'écrira plus brièvement de cette manière :

$$u = \Sigma p \cos\lambda t + \Sigma p' \sin\lambda t;$$

les caractéristiques Σ indiquant des sommes qui s'étendent à toutes les valeurs possibles réelles ou imaginaires de λ et des autres constantes arbitraires, contenues dans p et p'. On pourra, si l'on veut, faire croître ces valeurs par degrés infiniment petits, et remplacer les sommes Σ par des intégrales; mais cette autre forme équivalente de l'expression de u n'a aucun avantage; et il vaut mieux conserver la précédente.

516. Indépendamment des équations aux différences partielles qui conviennent à tous les points du système, il y a toujours, dans les divers problèmes de Physique ou de Mécanique, d'autres équations qui n'ont lieu que pour les points extrêmes; telles sont, par exemple, dans le problème des vibrations longitudinales d'une verge élastique, les équations relatives à la fixité ou à l'entière liberté des deux bouts de cette verge. Ces équations particulières serviront, dans chaque cas, à déterminer les valeurs d'une partie des quantités arbitraires que renfermera la série (g) ou la série (i); quant à celles de ces quantités qui resteront encore indéterminées après qu'on aura eu égard à toutes les équations de ce genre, elles dépendront de l'état initial du système. Pour en obtenir les valeurs, j'ai suivi, dans un grand nombre de problèmes différens, un procédé uniforme, que je crois applicable à tous les cas, soit que la question ne présente qu'une seule inconnue u, et ne conduise qu'à une seule équation $L = 0$, soit qu'il y ait à déterminer plusieurs inconnues dépendantes d'un égal nombre d'équations aux différences partielles, linéaires et simultanées. Ce procédé général a aussi l'avantage de fournir, dans chaque exemple, la démonstration de la réalité des constantes α, β, γ, etc., ou des constantes λ, μ, ν, etc., qui dépendent d'équations transcendantes quelquefois très compliquées, et dont il serait souvent difficile de déterminer autrement la nature des racines.

L'exemple que nous donnerons de l'application de cette méthode, dans le paragraphe suivant, suf-

fira pour l'expliquer, et pour qu'on puisse l'employer dans d'autres problèmes. Au moyen de cette méthode, on déterminera, sans aucune difficulté, les vibrations longitudinales des verges élastiques, dans les trois cas du nº 496, et l'on sera conduit, d'une manière plus directe, aux mêmes formules que dans ce numéro. Pour exemple d'une question dépendante de plusieurs équations aux différences partielles, j'indiquerai le choc longitudinal de deux ou plusieurs verges élastiques, formées de matières différentes; question qui a été résolue dans le paragraphe précédent, pour le cas particulier de l'homogénéité, et dont je supprime ici la solution générale, à cause de la longueur des formules qui s'y rapportent.

517. Supposons que le temps t soit compté à partir de l'origine du mouvement; et soient

$$u = f(x, y, z), \quad \frac{du}{dt} = F(x, y, z),$$

les valeurs de l'inconnue u et de son coefficient différentiel par rapport à t, qui répondent à $t = 0$; de sorte que $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$ soient des fonctions données arbitrairement pour toutes les valeurs des coordonnées x, y, z, qui répondent aux points d'un système dont on considère les vibrations. Après qu'on aura déterminé toutes les quantités arbitraires que renferme la série (i), d'après l'état initial de ce système, et en ayant égard aux équations particulières qui peuvent avoir lieu à ses extrémités, il faudra que cette série et son coefficient différentiel coïncident, pour $t = 0$, avec les fonctions $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$, dans les limites du système. Ainsi, il faudra qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= p + q + r + \text{etc.}, \\ F(x, y, z) &= \lambda p' + \mu q' + \nu r' + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

ce qui fournira un développement, ou une transformation d'un genre particulier, pour chacune des fonctions quelconques $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$; transformation qui ne sera pas identique, et n'aura lieu que pour des valeurs limitées des variables x, y, z.

Quoique le plus souvent on ne puisse pas démontrer directement l'exactitude de ces équations (k), cependant il ne peut rester aucun doute à cet égard. En effet, d'après les considérations précédentes, la série (i) représente certainement l'intégrale complète de l'équation $L = 0$, c'est-à-dire, la valeur la plus générale de u qui puisse satisfaire à cette équation. Par hypothèse, on a déterminé les quantités arbitraires que cette série renferme, au moyen des autres conditions du problème qui a conduit à cette équation $L = 0$; si ces conditions ne sont pas incompatibles, et que le problème soit susceptible d'une solution, il faut donc qu'après cette détermination, la série (i) exprime la valeur de u à un instant quelconque et en un point quelconque du système; par conséquent, en faisant $t = 0$ dans cette série et dans celle qu'on en déduit par la différentiation relative à t, elles devront représenter les valeurs initiales de u et $\frac{du}{dt}$, c'est-à-dire, les fonctions $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$, quelles qu'elles soient, mais seulement pour les valeurs de x, y, z, comprises dans les limites du système que l'on considère.

Dans l'exemple du mouvement longitudinal d'une verge élastique, les séries (k) représenteront, pour toute la longueur de cette verge, et dans les différentes hypothèses relatives à ses extrémités, les deux fonctions arbitraires qu'on a désignées par φx et $\varphi' x$ dans le nº 496; et ces séries coïncideront avec les expressions de φx et $\varphi' x$, dont on a fait usage dans ce numéro, et qu'on avait démontrées auparavant.

518. La conclusion de tout ce qui précède est que, pour exprimer dans un problème relatif aux petites vibrations des corps, et dans d'autres questions de Physique, chaque inconnue, au moyen de la série (g) ou (i), il est nécessaire d'avoir démontré, préalablement, que cette série représente la valeur la plus générale de l'inconnue qui puisse satisfaire à l'équation aux différences partielles dont elle dépend, et, ensuite, de déterminer toutes les quantités arbitraires que cette série renferme, au moyen des données particulières du problème, qui répondent aux extrémités du système et à son état initial; ou bien, il faut connaître, *à priori*, comme dans le nº 496, des expressions en série de la valeur initiale et arbitraire de chaque inconnue, dont tous les termes, multipliés par des sinus ou cosinus d'arcs proportionnels au temps, ou par des exponentielles, satisfassent isolément à l'équation donnée aux différences partielles et aux autres équations relatives aux points extrêmes du système. On doit regarder comme incomplète une solution dans laquelle on n'a pas démontré, *à priori*, la généralité de la série (g) ou (i) dont on fait usage, ou dans laquelle on ne vérifie pas, *à posteriori*, que cette série peut représenter la valeur initiale de chaque inconnue, quelle que soit cette valeur, dans toute l'étendue du système, y compris les points extrêmes. D'après ce qui précède, la première méthode sera toujours applicable; la seconde ne le serait que dans un très petit nombre de cas particuliers.

§ V. *Vibrations transversales d'une verge élastique.*

519. Les verges élastiques sont susceptibles de quatre sortes de vibrations, auxquelles répondent des tons différens, et qui peuvent coexister dans une même verge, droite ou courbe dans son état naturel. Ces vibrations sont longitudinales, transversales, normales, tournantes ou produites par la torsion. Les vibrations normales consistent en des dilatations et condensations alternatives des sections de la verge, perpendiculaires à sa longueur;

elles n'ont pas encore été déterminées par la théorie. Les trois autres espèces de vibrations l'ont été; et l'analyse m'a fait connaître, entre les tons qui leur correspondent, des rapports que l'expérience a confirmés, ou que les physiciens avaient déjà remarqués. Telle est, par exemple, l'observation curieuse que l'on doit à Chladni, et suivant laquelle une verge encastrée par un bout et libre par l'autre, rend un ton plus grave d'une *quinte*, lorsqu'on la fait vibrer par torsion, que quand elle vibre longitudinalement; cela revient à dire que le ton qu'elle rend dans le premier cas est le même que celui qu'elle ferait entendre dans le second, si sa longueur était augmentée dans le rapport de 3 à 2; or, j'ai trouvé que ce rapport devrait être celui de $\sqrt{10}$ à 2; ce qui diffère à peine d'un vingtième du résultat que Chladni a énoncé en nombre rond.

Je renverrai, pour les développemens de cette partie importante de la Physique mathématique, au mémoire sur l'*Équilibre et le mouvement des corps élastiques*, que j'ai déjà cité (nº 306), et où je me suis aussi occupé des vibrations des membranes flexibles et des plaques élastiques. Il suffira, dans ce Traité, d'avoir considéré les cas les moins compliqués de ce genre de questions, qui sont ceux des cordes vibrantes et des vibrations longitudinales des verges élastiques, auxquels nous allons encore ajouter le cas des vibrations transversales.

520. Nous supposerons, comme dans le cas des vibrations longitudinales (nº 494), qu'il s'agisse d'une verge homogène, et, dans son état naturel, prismatique ou cylindrique; nous supposerons, de plus, qu'elle n'éprouve aucune torsion sur elle-même; en sorte que tous les points de chaque filet longitudinal ne sortent pas d'un même plan pendant toute la durée du mouvement.

Soient AMB (fig. 112) la direction rectiligne du filet moyen dans l'état naturel de la verge, l sa longueur, et x la distance AM du point quelconque M à l'extrémité A. Au bout du temps t, supposons que M soit transporté en M'; abaissons de M' la perpendiculaire M'P sur AB; et faisons

$$MP = u, \quad M'P = y.$$

Si ces deux variables u et y sont supposées constamment très petites, et qu'on néglige, en conséquence, leurs carrés et leurs produits, leurs valeurs en fonctions de t et x dépendront, comme dans le cas des cordes vibrantes (nº 484), d'équations linéaires dans lesquelles ces inconnues seront séparées; les mouvemens très petits, dans le sens longitudinal et dans le sens transversal, coexisteront donc sans s'influencer mutuellement; et comme nous avons déterminé, d'une manière complète, le mouvement longitudinal, nous pourrons maintenant en faire abstraction. Je ferai donc $u = 0$, de sorte que tous les points du filet moyen oscilleront sur des droites perpendiculaires à sa direction naturelle, et que x et y seront, à un instant quelconque, les coordonnées courantes de la courbe plane A'M'B', formée par ce filet. Je ferai aussi abstraction des petits mouvemens de dilatation ou de condensation qui pourront avoir lieu dans chaque section de la verge, perpendiculaire à sa longueur; le mouvement qu'il s'agira de déterminer sera alors le même pour tous les points d'une même section; et il suffira de considérer celui du point qui appartient au filet moyen.

L'équation de ce mouvement transversal se déduira de l'équation (f) du nº 320, en y mettant $Y - \frac{d^2 y}{dt^2}$, ou simplement $-\frac{d^2 y}{dt^2}$, au lieu de Y, si l'on suppose qu'aucune force donnée n'est appliquée aux différens points de la verge. Cette équation sera donc

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0; \quad (1)$$

b^2 étant une constante positive, qui dépendra de la matière de la verge, de l'étendue et de la figure de la section normale.

Outre cette équation (1), commune à tous les points du filet moyen, il y aura des équations relatives à ses extrémités, qui seront les mêmes que dans le problème de l'équilibre. A cet égard, il pourra se présenter six cas différens, selon qu'à chacun des deux bouts la verge sera encastrée, ou seulement appuyée, ou entièrement libre. Mais comme ces six cas se traiteraient de la même manière, nous nous bornerons à en considérer un seul en détail, et nous supposerons que la verge soit entièrement libre à ses deux bouts A et B, auxquels ne sera d'ailleurs appliquée aucune force particulière.

Cela étant, pour toutes les valeurs de t, nous aurons (nº 320)

$$x = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \quad (2)$$

à l'extrémité A', et

$$x = l, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \quad (3)$$

à l'extrémité B'.

A l'origine du mouvement, la courbe du filet moyen et les vitesses imprimées à tous ses points seront connues; si donc on compte le temps t à partir de cette origine, et qu'on représente par φx $\varphi' x$ des fonctions données depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, on aura, à la fois,

$$t = 0, \quad y = \varphi x, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi' x. \quad (4)$$

Ces fonctions arbitraires φx et $\varphi' x$ devront, toutefois, remplir les conditions relatives à $x = 0$ et $x = l$, qui seront exprimées par les équations (2) et (3) pour la fonction φx, et par leurs différentielles relatives à t pour la fonction $\varphi' x$.

Ainsi, la question que nous aurons à résoudre consistera à trouver la valeur de y, en fonction de t et x, qui satisfait aux équations (1), (2), (3), (4), dont la première est la seule qui ait lieu pour toutes les valeurs de ces deux variables. Mais, auparavant, il est bon de comparer, pour une même verge élastique, le coefficient b qui entre dans l'équation de son mouvement transversal, et le coefficient a contenu dans l'équation de son mouvement longitudinal.

521. En désignant par g la gravité, par p le poids de la verge, et par q la tension qu'il faudrait employer pour doubler sa longueur l, on a (n° 495)

$$a^2 = \frac{glq}{p}.$$

Le produit de la densité de la verge et de l'aire de sa section normale sera égal à $\frac{p}{gl}$; et d'après l'équation (f) du n° 320, d'où l'on a déduit l'équation (1) du mouvement transversal, on aura

$$b^2 = \frac{gla}{p}\int_{-k'}^{k} vu^2\,du; \quad (5)$$

u, v, k, k', ayant la même signification que dans le n° 314, et la constante a du même numéro étant la valeur de q, rapportée à l'unité de surface, de sorte qu'on a

$$q = a\omega,$$

en appelant ω l'aire de la section normale de la verge. Faisons aussi

$$\int_{-k'}^{k} vu^2\,du = \omega h^2;$$

h sera une ligne dont la valeur dépendra de l'étendue et de la forme de son contour; et il en résultera

$$b = \frac{glqh^2}{p},$$

d'où l'on conclut

$$b^2 = ah.$$

Si la section normale de la verge est un rectangle dont la base soit perpendiculaire au plan de la courbe A'M'B', et la hauteur égale à 2ε, on aura

$$\omega = 2v\varepsilon,\ k' = k = \varepsilon,\ \omega h^2 = v\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^2\,du = \frac{2}{3}v\varepsilon^3;$$

et il en résultera

$$b = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

Dans le cas d'une verge cylindrique, dont le rayon sera représenté par ε, on aura

$$\omega = \pi\varepsilon^2,\quad k' = k = \varepsilon,\quad v = 2\sqrt{\varepsilon^2 - u^2};$$

d'où l'on déduira d'abord

$$\omega h^2 = \frac{1}{4}\pi\varepsilon^4,$$

et, ensuite,

$$b = \frac{1}{2}a\varepsilon.$$

Supposons encore que la section normale de la verge soit un triangle isocèle, qui ait sa base perpendiculaire au plan de la courbe A'M'B'; et, pour fixer les idées, supposons aussi que ce plan soit vertical, et que la base du triangle réponde à la face supérieure de la verge. Appelons λ cette base, et 2ε la hauteur; nous aurons toujours

$$\omega = \lambda\varepsilon;$$

mais la valeur de h sera différente, selon que la face supérieure de la verge tournera sa convexité par en haut ou par en bas (n° 315). Dans le premier cas, on aura

$$k = \frac{2\varepsilon}{3},\quad k' = \frac{4\varepsilon}{3},\quad v = \frac{\lambda}{2\varepsilon}\left(\frac{4\varepsilon}{3} + u\right);$$

d'où il résultera

$$\omega h^2 = \frac{2\lambda\varepsilon^3}{9},$$

et, par conséquent,

$$b = \frac{a\varepsilon\sqrt{2}}{3}.$$

Dans le second cas, on aura

$$k = \frac{4\varepsilon}{3},\quad k' = \frac{2\varepsilon}{3},\quad v = \frac{\lambda}{2\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon}{3} + u\right);$$

on en déduira

$$\omega h^2 = \frac{2\lambda\varepsilon^3}{3},$$

et, ensuite,

$$b = a\varepsilon\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ces résultats nous serviront, plus loin, à comparer entre eux les tons d'une même verge élastique, lorsqu'elle exécute des vibrations longitudinales, ou des vibrations transversales.

522. Maintenant, soient p et q des fonctions de x, et m une constante par rapport à t et à x. Pour satisfaire à l'équation (1), prenons

$$y = p\sin m^2 bt + q\cos m^2 bt;$$

cette équation devant subsister pour toutes les valeurs de t, il faudra qu'on ait

$$\frac{d^4 p}{dx^4} = m^4 p,\quad \frac{d^4 q}{dx^4} = m^4 q;$$

et, en intégrant ces deux équations différentielles

du quatrième ordre, il vient

$$p = A \sin mx + A' \cos mx + \tfrac{1}{2} B (e^{mx} - e^{-mx}) + \tfrac{1}{2} B' (e^{mx} + e^{-mx}),$$

$$q = C \sin mx + C' \cos mx + \tfrac{1}{2} D (e^{mx} - e^{-mx}) + \tfrac{1}{2} D' (e^{mx} + e^{-mx});$$

A, A', B, B', C, C', D, D', étant les huit constantes arbitraires, et e désignant la base des logarithmes népériens.

A cause de la forme linéaire de l'équation (1), on y satisfera encore en prenant

$$y = \Sigma p \sin m^2 bt + \Sigma q \cos m^2 bt,$$

et étendant les sommes Σ à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de m et des huit autres constantes A, A', etc. De plus, cette valeur de y sera l'intégrale complète de l'équation (1), d'après les considérations qu'on a exposées dans le paragraphe précédent.

Si on la substitue dans les équations (2) et (3), qui ont lieu pour toutes les valeurs de t, et, par conséquent, pour tous les termes des sommes Σ pris séparément, on aura

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 p}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^2 q}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 q}{dx^3} = 0,$$

pour $x = 0$ et pour $x = l$. En mettant pour p et q leurs valeurs précédentes, il en résulte d'abord

$$B' = A', \quad B = A, \quad D' = C', \quad D = C,$$

et, en outre,

$$\begin{aligned}
A\,(2 \sin ml - e^{ml} + e^{-ml}) &= A'\,(e^{ml} + e^{-ml} - 2 \cos ml),\\
A'\,(2 \sin ml + e^{ml} - e^{-ml}) &= A\,(2 \cos ml - e^{ml} - e^{-ml}),\\
C\,(2 \sin ml - e^{ml} + e^{-ml}) &= C'\,(e^{ml} + e^{-ml} - 2 \cos ml),\\
C'\,(2 \sin ml + e^{ml} - e^{-ml}) &= C\,(2 \cos ml - e^{ml} - e^{-ml}),
\end{aligned}$$

Or, en multipliant membre à membre les deux premières ou les deux dernières de ces quatre équations, et supprimant, dans les produits, le facteur commun AA' ou CC', on a

$$4 \sin^2 ml - (e^{ml} - e^{-ml})^2 + (2 \cos ml - e^{ml} - e^{-ml})^2 = 0,$$

ou bien, en réduisant,

$$(e^{ml} + e^{-ml}) \cos ml - 2 = 0; \qquad (a)$$

équation qui servira à déterminer les valeurs de m. Les valeurs de A, A', etc., qu'on tirera des équations précédentes, seront d'ailleurs

$$\begin{aligned}
B = A &= E\,(e^{ml} + e^{-ml} - 2 \cos ml),\\
B' = A' &= E\,(2 \sin 2ml - e^{ml} + e^{-ml}),\\
D = C &= E'\,(e^{ml} + e^{-ml} - 2 \cos ml),\\
D' = C' &= E'\,(2 \sin 2ml - e^{ml} + e^{-ml}),
\end{aligned}$$

E et E' étant deux nouvelles constantes qui resteront indéterminées,

En faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
X = {} & (e^{ml} + e^{-ml} - 2 \cos ml)\,(\sin mx + \tfrac{1}{2} e^{mx} - \tfrac{1}{2} e^{-mx})\\
& + (2 \sin ml - e^{ml} + e^{-ml})\,(\cos mx + \tfrac{1}{2} e^{mx} + \tfrac{1}{2} e^{-mx}),
\end{aligned}$$

la valeur précédente de y deviendra

$$y = \Sigma X\,(E \sin m^2 bt + E' \cos m^2 bt); \qquad (b)$$

la somme Σ s'étendant toujours à toutes les valeurs possibles de E et E', mais seulement à toutes valeurs de m données par l'équation (a). Pour toutes ces valeurs, on aura

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = 0, \qquad (c)$$

pour $x = 0$ et pour $x = l$; et, quelles que soient les quantités m et x, on aura identiquement

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = m^4 X. \qquad (d)$$

523. Il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs des coefficiens E et E', relatives à chaque valeur de m, d'après l'état initial de la verge; ce qu'on va faire, en suivant le procédé général dont il a été parlé dans le n° 516.

Remarquons d'abord que si m est une racine de l'équation (a), il en sera de même à l'égard de $-m$, $m\sqrt{-1}$, $-m\sqrt{-1}$; de plus, les valeurs correspondantes de X ne différeront entre elles que par le signe, ou par un facteur $\sqrt{-1}$; d'où il résulte qu'on pourra réunir en un seul terme, dans la formule (b), les termes qui répondent à ces quatre racines, et n'étendre ensuite la somme Σ qu'à des valeurs réelles et positives de m, ou bien, à des valeurs composées d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, s'il en existait, dont la partie réelle serait positive. De cette manière, si m et m' sont deux racines de l'équation (a) dont on fera usage, m' et m'^2 différeront de $\pm m$ et $\pm m^2$.

Cela étant convenu, je multiplie l'équation (1) par $X dx$, puis j'intègre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$; ce qui donne

$$\int_0^l \frac{d^2 . Xy}{dt^2}\, dx + b^2 \int_0^l X \frac{d^4 y}{dx^4}\, dx = 0.$$

En intégrant par partie, on aura

$$\int_0^l X\frac{d^4 y}{dx^4}\,dx = \left(X\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{dX}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 X}{dx^2}\frac{dy}{dx} - \frac{d^3 X}{dx^3}\,y\right)$$

$$-\left[X\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{dX}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 X}{dx^2}\frac{dy}{dx} - \frac{d^3 X}{dx^3}\,y\right] + \int_0^l \frac{d^4 X}{dx^4}\,y\,dx.$$

Les termes compris entre les parenthèses répondent à $x = l$, et ceux qui sont renfermés entre des crochets, à $x = 0$; ils se détruisent les uns et les autres, en vertu des équations (2), (3), (4), relatives à ces limites; et, d'après l'équation (d), qui a lieu pour toutes les valeurs de x, si l'on met $m^4 X$ à la place de $\frac{d^4 X}{dx^4}$ sous le signe $\int$, on aura

$$\int_0^l X\frac{d^4 y}{dx^4}\,dx = m^4\int_0^l Xy\,dx.$$

Donc, à cause de

$$\int_0^l \frac{d^2 . Xy}{dt^2}\,dx = \frac{d^2 . \int_0^l Xy\,dx}{dt^2}$$

nous aurons

$$\frac{d^2 . \int Xy\,dx}{dt^2} + b^2 m^4 \int Xy\,dx = 0.$$

L'intégrale complète de cette équation différentielle du second ordre est

$$\int_0^l Xy\,dx = H\cos m^2 bt + H'\sin m^2 bt;$$

H et H' désignant les deux constantes arbitraires. Pour les déterminer, je fais $t = 0$ dans cette formule et dans sa différentielle par rapport à t; et, en ayant égard aux équations (4), il en résulte

$$H = \int_0^l X\varphi x\,dx, \quad H' = \frac{1}{bm^2}\int_0^l X\varphi' x\,dx.$$

Quel que soit t, on aura donc

$$\left.\begin{aligned}\int_0^l Xy\,dx = &\int_0^l X\varphi x\,dx\,.\cos m^2 bt\\ &+ \frac{1}{bm^2}\int_0^l X\varphi' x\,dx.\sin m^2 bt.\end{aligned}\right\}\ (e)$$

Je substitue la formule (b) à la place de y dans le premier membre de cette équation (e); son second membre ne contenant que $\cos m^2 bt$ et $\sin m^2 bt$, si m' est une racine de l'équation (a), telle que m' et m'^2 diffèrent de $\pm m$ et $\pm m^2$, comme on l'a supposé tout à l'heure, il faudra que le terme correspondant à m' disparaisse du premier membre; ce qui exige qu'on ait

$$\int_0^l XX'\,dx = 0; \qquad (f)$$

X' désignant ce que X devient quand on y change m en m'. Mais pour le cas de $m' = m$, on conclura de cette même équation (e),

$$E\int_0^l X^2\,dx = \frac{1}{bm^2}\int_0^l X\varphi' x\,dx,$$

$$E'\int_0^l X^2\,dx = \int_0^l X\varphi x\,dx;$$

ce qui fera connaître les valeurs de E et E' en fonctions de m, au moyen desquelles la formule (b) deviendra

$$y = \Sigma X\left[\frac{\int_0^l X\varphi x\,dx}{\int_0^l X^2\,dx}\cos m^2 bt + \frac{\int_0^l X\varphi' x\,dx}{bm^2\int_0^l X^2 dx}\sin m^2 bt\right] \quad (g)$$

Cette expression de y et la valeur de $\frac{dy}{dt}$ qui s'en déduit, ne renfermant plus rien d'inconnu, elles feront connaître, à chaque instant, l'ordonnée et la vitesse d'un point quelconque M' de la courbe A'M'B'; ce qui est la solution complète du problème. L'intégrale $\int_0^l X^2\,dx$ s'obtiendra, sous forme finie, par les règles ordinaires; les valeurs des intégrales $\int_0^l X\varphi x\,dx$, et $\int_0^l X\varphi' x\,dx$, ne pourront, généralement, se calculer que par la méthode des quadratures.

524. Si l'on fait $t = 0$ dans les expressions de y et $\frac{dy}{dt}$, on aura, d'après les équations (4) et (g),

$$\left.\begin{aligned}\varphi x &= \Sigma\left(\frac{\int_0^l X\varphi x\,dx}{\int_0^l X^2\,\varphi x\,dx}\right)X,\\ \varphi' x &= \Sigma\left(\frac{\int_0^l X\varphi' x\,dx}{\int_0^l X^2\,dx}\right)X.\end{aligned}\right\}\ (h)$$

Ces deux formules semblables auront lieu pour

des fonctions quelconques φx et $\varphi' x$ continues ou discontinues, mais seulement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, et en observant qu'elles ne conviendront aux valeurs extrêmes de x que quand celles de ces fonctions rempliront la condition énoncée précédemment (n° 520). Quoique nous ne puissions pas démontrer ces formules directement, elles n'en sont pas moins certaines, ainsi qu'on l'a expliqué dans le n° 517.

Dans le cas particulier où tous les points de la verge ont reçu primitivement une vitesse commune et une vitesse proportionnelle à leurs distances à son milieu, il est évident qu'elle doit prendre un mouvement de translation et un mouvement de rotation, sans aucune courbure ni vibrations. C'est aussi ce qu'on peut conclure de ces équations (h) et de la formule (g).

En désignant par c et γ deux quantités constantes, on a alors

$$\varphi x = 0, \quad \varphi' x = c + \gamma\left(x - \tfrac{1}{2} l\right);$$

et si l'on différentie la seconde équation (h), et qu'on ait égard à l'équation (d), on en conclut

$$\Sigma\left(\frac{\int_0^l X\varphi' x\, dx}{\int_0^l X^2\, dx}\right) X m^{4i} = 0;$$

i étant un nombre entier et positif. Par conséquent, le développement suivant les puissances de t, de la partie

$$\Sigma\left(\frac{\int_0^l X\varphi' x\, dx}{\int_0^l X^2\, dx}\right)\frac{X \sin m^2 bt}{m^2 b},$$

de la formule (g), se réduira à son premier terme

$$t\Sigma\left(\frac{\int_0^l X\varphi' x\, dx}{\int_0^l X^2\, dx}\right),$$

lequel aura pour valeur $t\varphi' x$, en vertu de la seconde équation (h). Donc, à cause de $\varphi x = 0$ et de la valeur de $\varphi' x$, la formule (g) sera simplement

$$y = \left[c + \gamma\left(x - \tfrac{1}{2} l\right)\right] t,$$

comme cela doit être.

525. Au moyen de l'équation (f), on peut prouver que l'équation (a) n'admet aucune racine composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

En effet, supposons qu'il existe une racine telle que $f + g\sqrt{-1}$; il y en aura une autre qui ne différera de celle-là que par le signe de $\sqrt{-1}$, et sera $f - g\sqrt{-1}$; on pourra donc prendre, dans l'équation (f),

$$m = f + g\sqrt{-1}, \quad m' = f - g\sqrt{-1};$$

f et g désignant des quantités réelles dont aucune n'est zéro. On aura, en même temps,

$$X = F + G\sqrt{-1}, \quad X' = F - G\sqrt{-1};$$

F et G étant aussi des quantités réelles. Par conséquent, l'équation (f) deviendra

$$\int_0^l (F^2 + G^2)\, dx = 0;$$

équation impossible, puisqu'il faudrait, pour qu'elle eût lieu, qu'une intégrale dont tous les élémens sont positifs, et qui en exprime la somme (n° 13), fût égale à zéro. Donc aussi la supposition d'une racine $f + g\sqrt{-1}$ est inadmissible.

Cette dernière équation serait encore inadmissible si f ou g était zéro; mais alors on ne pourrait plus prendre $f + g\sqrt{-1}$ et $f - g\sqrt{-1}$ pour m et m'; car l'équation (f) suppose que m' et m'^2 diffèrent de $\pm m$ et $\pm m^2$; ce qui n'aurait pas lieu dans le cas où l'une des deux quantités f et g serait nulle.

526. Pour la racine $m = 0$ de l'équation (a), le terme correspondant de la formule (g) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; on obtiendra sa véritable valeur en supposant que m soit seulement une quantité infiniment petite. On aura alors

$$X = 4m^3 l^3\left(x - \tfrac{1}{3} l\right), \quad \cos m^2 bt = 1, \quad \sin m^2 bt = m^2 bt;$$

et le terme dont il s'agit sera

$$\left[\int_0^l (3x - l)\,\varphi x dx + t\int_0^l (3x - l)\,\varphi' x dx\right]\frac{(3x - l)}{l^3}.$$

Il répond à des mouvemens de translation et de rotation communs à tous les points de la verge; nous en ferons abstraction; et en n'ayant point égard à la racine $m = 0$, tous les termes de la série (g) seront périodiques.

Mais si l'on fait attention que les différentes valeurs de m sont incommensurables, on voit qu'il n'arrivera pas, en général, que tous les points de la verge reviennent, en même temps, à leur état primitif, ou, autrement dit, une verge élastique n'exécutera pas dans tous les cas, comme une corde étendue, des vibrations transversales isochrones. Pour que l'isochronisme ait lieu, et pour que la verge fasse entendre un son unique et appréciable, il faudra que, d'après sa courbure et les vitesses de ses points à l'origine du mouvement, tous les ter-

mes de la formule (g) disparaissent, excepté un seul, et qu'elle se réduise à la forme

$$y = X\,(E \sin m^2 bt + E' \cos m^2 bt), \quad (s)$$

où l'on a remis, pour abréger, les constantes E et E' à la place de leurs valeurs trouvées plus haut. Lorsque la formule (g) se réduira à un petit nombre de termes, la verge fera entendre à la fois plusieurs sons distincts, dont les tons ne pourront pas être comparés entre eux exactement.

527. Désignons par λ une valeur numérique de ml tirée de l'équation (a), de sorte qu'on ait $m = \frac{\lambda}{l}$. Soit T la durée d'une vibration entière de la verge, correspondante à cette racine m, et n le nombre de vibrations dans l'unité de temps. D'après l'équation (s), on aura

$$T = \frac{2\pi l^2}{\lambda^2 b}, \qquad n = \frac{\lambda^2 b}{2\pi l^2};$$

en sorte que les différens tons que peut faire entendre une verge pliée dans le même sens, vibrant transversalement et libre par ses deux bouts, dépendront des valeurs de λ, et le plus grave, ou le ton fondamental, répondra à la plus petite de ces valeurs.

Il est évident que la quantité b^2, donnée par la formule (5), ne dépend pas de la longueur l de la verge; s'il s'agit d'une verge cylindrique ou circulaire, on voit aussi que cette quantité est proportionnelle au carré du diamètre. Pour deux verges cylindriques et formées de la même matière, et pour le même ordre de vibrations, c'est-à-dire, pour la même valeur de λ, le nombre n sera donc en raison directe de l'épaisseur et inverse du carré de la longueur.

S'il s'agit d'une verge prismatique, elle fera entendre, en général, deux sons différens, selon qu'elle vibrera transversalement dans un sens ou dans un autre. Ainsi, en supposant, par exemple, que la section normale soit un rectangle, et qu'on fasse vibrer successivement la verge, de manière que la base ou la hauteur du rectangle soit perpendiculaire au plan de la courbe A'E'B', les valeurs successives de n seront entre elles comme cette hauteur et cette base, pour le même ordre de vibrations. Lorsque la section normale sera triangulaire, comme dans le troisième exemple du n° 521, la valeur de b^2 ne sera pas la même pendant deux demi-vibrations successives; leurs durées seront donc inégales; ce qui n'empêchera pas les vibrations entières d'être isochrones, en supposant toujours que la formule (g) se réduise à un seul terme.

En égalant à zéro le facteur X de la formule (s), on déterminera les valeurs de x qui répondent aux *nœuds* de vibrations, c'est-à-dire, aux points immobiles sur la droite AB, pour chaque valeur de m, ou pour chaque ton que la verge peut faire entendre.

528. Lorsque la verge élastique que nous considérons sera encastrée à son extrémité A et libre à son autre bout, le filet moyen demeurera tangent en A, à la droite AB, pendant toute la durée du mouvement; de sorte que les équations (2) du problème précédent devront être remplacées par

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

On modifiera, en conséquence et sans aucune difficulté, l'analyse précédente; et l'on trouvera que la valeur générale de y sera encore exprimée par la formule (g); mais les valeurs de m, qu'on y devra employer, devront être tirées de l'équation

$$(e^{ml} + e^{-ml}) \cos ml + 2 = 0, \quad (a')$$

qui ne diffère de l'équation (a) que par le signe du dernier terme : la valeur qu'on prendra pour X sera en même temps,

$$X = (e^{ml} + e^{-ml} + 2 \cos ml)\left(\sin mx - \tfrac{1}{2} e^{mx} + \tfrac{1}{2} e^{-mx}\right)$$
$$+ (2 \sin ml + e^{ml} - e^{-ml})\left(\cos mx - \tfrac{1}{2} e^{mx} - \tfrac{1}{2} e^{-mx}\right).$$

Pour que la verge, vibrant ainsi transversalement, ne fasse entendre qu'un seul son, il faudra que, d'après son état initial, la formule (g) se réduise à un seul terme ou à la formule (s), comme dans le cas précédent. Si l'on désigne par λ' une valeur positive de ml, tirée de l'équation (a'); par T' la durée d'une vibration correspondante à $m = \frac{\lambda'}{l}$, et par n' le nombre de vibrations dans l'unité de temps, on aura

$$T' = \frac{2\pi l^2}{\lambda'^2 b}, \qquad n' = \frac{\lambda'^2 b}{2\pi l^2};$$

et tout ce que l'on a dit, dans le numéro précédent, sur la comparaison des tons des verges libres à leurs deux bouts, s'appliquera également au cas des verges encastrées à l'une de leurs extrémités : on déterminera aussi les nœuds de vibrations qui accompagneront chaque ton rendu par une même verge, en égalant à zéro la valeur précédente de X.

529. Pour résoudre, par approximation, les équations (a) et (a'), je désigne par i un nombre entier positif ou zéro, et je fais

$$ml = \lambda = \tfrac{1}{2}(2i + 1)\pi \mp \delta,$$

dans l'équation (a), et

$$ml = \lambda' = \tfrac{1}{2}(2i + 1)\pi \pm \delta',$$

dans l'équation (a'); δ et δ' étant des quantités positives et qui ne peuvent pas surpasser $\frac{1}{2}\pi$. Je prends les signes supérieurs ou inférieurs devant ces nouvelles inconnues, selon que i est pair ou impair; et, de cette manière, les équations (a) et (a') deviennent

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta &= \frac{2}{e^{\frac{1}{2}(2i+1)\pi \mp \delta} + e^{-\frac{1}{2}(2i+1)\pi \pm \delta}}, \\ \sin\delta' &= \frac{2}{e^{\frac{1}{2}(2i+1)\pi \pm \delta'} + e^{-\frac{1}{2}(2i+1)\pi \mp \delta'}}, \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

D'après les limites de δ et δ', il est aisé de voir que chacune de ces inconnues n'aura qu'une seule valeur pour chaque valeur de i; celle de δ, pour $i=0$, sera $\delta=\frac{1}{2}\pi$; et comme elle répond à $n=0$, il en faudra faire abstraction. Pour $i=1$, on a $\delta=0{,}01797$, en négligeant δ dans le second membre de la première équation (k); et si l'on y substitue cette première valeur approchée de δ, on aura, plus exactement,

$$\delta = 0{,}01765.$$

Les valeurs de δ relatives à $i=2$, $i=3$, etc., seront encore plus petites que celle-ci; les valeurs de λ différeront donc très peu des multiples impairs de $\frac{1}{2}\pi$; et, d'après l'expression du nombre n, les tons de la verge libre par les deux bouts formeront, à très peu près, une série croissante comme les carrés des nombres 3, 5, 7, etc. La plus petite valeur de λ, correspondante au son le plus grave, est

$$\lambda = \frac{3\pi}{2} + \delta = 4{,}74503.$$

Dans le cas de $i=0$, après quelques essais, on trouve, à un degré suffisant d'approximation,

$$\delta' = 0{,}30431.$$

La plus petite valeur de λ' sera donc

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}\pi + \delta' = 1{,}87011.$$

En comparant donc son carré à celui de la valeur précédente de λ, et observant que ces carrés sont entre eux comme les nombres n' et n des vibrations, on aura

$$\frac{n'}{n} = 0{,}15715,$$

pour le rapport du ton le plus grave de la verge encastrée par un de ses bouts, à celui de la même verge libre à ses deux extrémités. Les autres valeurs de δ' sont très petites; les valeurs correspondantes de λ' seront donc, à très peu près, les multiples 3, 5, 7, etc., de $\frac{1}{2}\pi$; et les tons de la verge encastrée, le ton le plus grave excepté, formeront une série croissante comme les carrés de ces nombres impairs.

L'expérience a confirmé depuis long-temps tout ce que la théorie a fait connaître relativement aux séries de tons que font entendre les verges élastiques, libres ou gênées par leurs extrémités, à la position des nœuds qui accompagnent ces différens modes de vibrations, et aux rapports des tons, suivant les longueurs et les épaisseurs. Nous allons maintenant comparer entre eux les tons, ou les nombres de vibrations transversales et longitudinales d'une même verge élastique. L'observation a aussi confirmé, sur ce point, les résultats du calcul.

530. Je supposerai, pour fixer les idées, que la verge soit libre à ses deux bouts dans ces deux sortes de vibrations, et je me bornerai à considérer le ton le plus grave pour les unes et pour les autres.

En employant la plus petite valeur de λ trouvée dans le numéro précédent, on aura

$$n = \frac{(4{,}74503)^2\, b}{2\pi l^2} = (3{,}56082)\,\frac{b}{l^2},$$

pour le nombre de vibrations transversales dans l'unité de temps. Si l'on désigne par $n_{,}$ le nombre de vibrations longitudinales dans le même temps, on aura, d'après le troisième cas du n° 496,

$$n_{,} = \frac{a}{2l};$$

et comme on a $b = ah$ (n° 521), il en résultera

$$n = (7{,}12164)\,\frac{hn_{,}}{l},$$

formule indépendante de la matière de la verge, au moyen de laquelle on conclura le ton transversal du ton longitudinal, ou réciproquement.

La grandeur de la ligne h qu'elle renferme dépendra de la figure de la section normale, et sera proportionnelle, toutes choses d'ailleurs égales, à l'épaisseur. Cette dimension étant très petite relativement à la longueur l, il s'ensuit que le ton des vibrations transversales sera très grave par rapport à l'autre; ce qui est conforme aux observations qu'on fait le plus communément. D'après le n° 521, si la verge est un cylindre dont le rayon soit ε, on a $h = \frac{1}{2}\varepsilon$; et si elle est un parallélipipède, et

que ϵ soit aussi la demi-épaisseur, on a $k = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$; on aura donc, dans ces deux cas,

$$n = (7,12164)\frac{\epsilon n_{,}}{2l}, \quad n = (7,12164)\frac{\epsilon n_{,}}{l\sqrt{3}}.$$

Comme le nombre $n_{,}$ est indépendant de la figure et des dimensions de la section normale, il s'ensuit que pour les mêmes grandeurs de ϵ et de l, le nombre de vibrations transversales est plus petit dans le premier cas que dans le second, dans le rapport de $\sqrt{3}$ à 2 *.

* Pour la comparaison de ces formules à l'observation, voyez les *Annales de Chimie et de Physique*, tome XXXVI, page 86.

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS.

§ Ier *Équations générales de ce mouvement.*

531. Puisque les forces perdues par tous les points du système pendant la durée de chaque instant doivent se faire continuellement équilibre (n° 350), si l'on applique à ces forces le principe des vitesses virtuelles, on obtiendra une formule générale, de laquelle on pourra déduire, dans chaque cas, toutes les équations du mouvement, de même que l'on déduit toutes celles de l'équilibre, de l'équation générale des vitesses virtuelles. Quelque naturelle que paraisse cette combinaison du principe général de la Dynamique avec celui de l'équilibre, on ne l'a pas faite cependant à l'époque où le premier de ces deux principes a été connu, et quoique le second eût été donné auparavant dans toute sa généralité. Ce rapprochement des deux principes est dû à Lagrange, qui a réduit, par là à un procédé uniforme les solutions de tous les problèmes de Mécanique, ou du moins la formation des équations différentielles dont ils dépendent. C'est ce procédé général que nous allons maintenant exposer, en observant, toutefois, que l'ordre qui a été suivi dans ce Traité, où l'on a résolu directement les problèmes relatifs aux corps solides et aux corps flexibles, en allant du plus simple au plus composé, a paru plus propre à une étude approfondie de la Mécanique et à l'enseignement de cette science, que l'on ne doit pas considérer seulement sous un point de vue abstrait et indépendant des circonstances physiques.

532. Soient m, m', m'', etc., les masses des points du système dont nous allons nous occuper. Au bout du temps t, compté depuis l'origine du mouvement, désignons par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de m, et par X, Y, Z, les composantes de la force accélératrice appliquée à ce point matériel, dirigées suivant les prolongemens de x, y, z, dans le sens positif. Convenons aussi de représenter par les mêmes lettres, avec des accens, les quantités homologues qui répondent aux autres points m', m'', etc. Les composantes suivant les directions de X, Y, Z, de la force perdue par ce point quelconque m pendant l'instant dt, seront

$$m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right),\ m\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right),\ m\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

par conséquent, l'équilibre aura lieu dans le système, en supposant le point m sollicité par ces forces, et chacun des autres points m', m'', etc., par des forces semblables. Or, on formera l'équation générale de cet équilibre, en mettant dans l'équation (e) du n° 341, les trois composantes précédentes à la place de X, Y, Z; ce qui donne

$$\Sigma m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \Sigma m\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \Sigma m\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0; \quad (1)$$

les sommes Σ s'étendant à tous les points m, m', m'', etc., du système, et se composant, par conséquent, d'un nombre de parties égal au nombre de ces points.

Nous supposerons, comme dans le numéro cité, que les liaisons de ces points matériels sont exprimées par les équations

$$L = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0, \quad \text{etc.}, \quad (2)$$

dans lesquelles L, L', L'', etc., sont des fonctions données des variables x, y, z, x', etc., ou d'une partie d'entre elles, qui peuvent aussi renfermer le temps t explicitement. Si, par exemple, le point m est assujetti à demeurer sur une surface qui change de forme graduellement, ou qui soit en mouvement dans l'espace, et que $L = 0$ représente l'équation de cette surface, L sera alors une fonction donnée de x, y, z, t.

Quoique les forces dont l'équation (1) exprime l'équilibre répondent à des quantités de mouvement perdues pendant la durée du temps dt, et que pendant cet instant les positions des points m, m', m'', etc., changent infiniment peu, on peut, néanmoins, supposer que cet équilibre a lieu dans les positions que ces points occupent au bout du temps t, c'est-à-dire, que l'on peut faire abstraction de leur changement de position pendant l'instant dt, qui ne saurait altérer les quantités de mouvement perdues pendant qu'il s'effectue, que d'un infiniment petit du second ordre, et les forces motrices correspondantes, que d'un infiniment petit du premier ordre. Les déplacemens infiniment petits que suppose le principe des vitesses virtuelles, et qui sont exprimés, suivant les directions des coordonnées, par δx, δy, δz, pour le point m, par $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, pour le point m', etc., doivent donc satisfaire aux conditions du système, telles qu'elles sont à la fin du temps t; par conséquent, il faudra que les équations (2) aient encore lieu quand on y mettra $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $x' + \delta x'$, etc., à la place de x, y, z, x' etc., sans faire varier le temps t qu'elles pourraient contenir explicitement; d'où l'on conclut, comme dans le n° 341,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \text{etc.} = 0,\\
&\frac{dL'}{dx}\delta x + \frac{dL'}{dy}\delta y + \frac{dL'}{dz}\delta z + \frac{dL'}{dx'}\delta x' + \text{etc.} = 0,\\
&\frac{dL''}{dx}\delta x + \frac{dL''}{dy}\delta y + \frac{dL''}{dz}\delta z + \frac{dL''}{dx'}\delta x' + \text{etc.} = 0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} (3)$$

Au moyen de ces équations, on éliminera dans le premier membre de l'équation (1) une partie des quantités δx, δy, etc., puis on égalera à zéro les coefficiens de chacune des quantités restantes. En employant, comme dans le n° 342, la méthode des facteurs indéterminés, on sera conduit, de cette manière, aux équations

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{d^2x}{dt^2} = mX + \lambda\frac{dL}{dx} + \lambda'\frac{dL'}{dx} + \lambda''\frac{dL''}{dx} + \text{etc.},\\
&m\frac{d^2y}{dt^2} = mY + \lambda\frac{dL}{dy} + \lambda'\frac{dL'}{dy} + \lambda''\frac{dL''}{dy} + \text{etc.},\\
&m\frac{d^2z}{dt^2} = mZ + \lambda\frac{dL}{dz} + \lambda'\frac{dL'}{dz} + \lambda''\frac{dL''}{dz} + \text{etc.},\\
&m'\frac{d^2x'}{dt^2} = m'X' + \lambda\frac{dL}{dx'} + \lambda'\frac{dL'}{dx'} + \lambda''\frac{dL''}{dx'} + \text{etc.},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}\right\} (4)$$

dans lesquelles λ, λ', λ'', etc., sont des facteurs dont les valeurs feront connaître les forces provenant de la liaison des points du système, et de la résistance des surfaces ou des courbes sur lesquelles ils peuvent être astreints à se mouvoir (n° 343).

Les équations (2) et (4) seront toujours en même nombre que toutes les inconnues du problème, savoir : les quantités λ, λ', λ'', etc., en nombre égal à celui des équations (2), et les coordonnées des points m, m', m'', etc., en nombre triple de celui de ces mobiles, et égal au nombre de ces équations (4); elles suffiront donc pour déterminer, dans tous les cas, les valeurs de toutes ces inconnues en fonctions du temps.

533. Supposons que les forces données qui agissent sur tous les points du système se partagent en deux groupes, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
&X = P + U, \quad Y = Q + V, \quad Z = R + W,\\
&X = P' + U', \quad Y' = Q' + V', \quad Z' = R' + W',\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

supposons aussi qu'on soit parvenu à intégrer les équations différentielles du problème, en ayant seulement égard aux forces P, Q, R, P', Q', R', etc.; et soient a, b, c, etc., les constantes arbitraires que renfermeront ces intégrales. On étendra cette solution aux forces complètes X, Y, Z, X', Y', Z', etc., au moyen de la méthode fondée sur la variation des constantes arbitraires, dont le principe a été exposé dans le n° 229. Les différentielles des quantités a, b, c, etc., devenues variables, seront linéaires par rapport à U, V, W, U', V', W', etc., et de la forme :

$$\begin{aligned}
da &= AU + BV + CW + A'U' + \text{etc.},\\
db &= A_1U + B_1V + C_1W + A'_1U' + \text{etc.},\\
dc &= A_2U + B_2V + C_2W + A'_2U' + \text{etc.},\\
&\text{etc};
\end{aligned}$$

A, B, etc., étant des fonctions des mêmes inconnues a, b, c, etc. Par là, les équations différentielles secondes du problème se trouveront changées en un nombre double d'équations différentielles du premier ordre; mais cette transformation sera principalement utile, lorsque les forces secondai-

res U, V, W, U', etc., seront très petites par rapport aux forces primitives P, Q, R, P', etc.; ce qui permettra, dans une première approximation, de considérer comme constantes les quantités a, b, c, etc., que renferment les coefficiens A, B, etc., et, conséquemment, de déduire des formules précédentes, par l'intégration immédiate ou par la méthode des quadratures, les parties variables de ces inconnues.

C'est Lagrange qui a ainsi étendu à tous les problèmes de la Mécanique la méthode de la variation des constantes arbitraires, à laquelle il avait ramené, autrefois, la théorie des solutions particulières des équations différentielles, et dont il avait aussi fait d'autres applications moins générales. Mais il s'était borné à donner les expressions générales des quantités U, V, W, U', V', W', etc., en fonctions linéaires des différentielles da, db, dc, etc.; et il restait à trouver les formules inverses qui donnent directement, dans le cas général, les différentielles des inconnues a, b, c, etc., en fonctions linéaires des forces U, V, W, etc., et à démontrer, d'une manière directe et générale, les propriétés importantes dont jouissent leurs coefficiens A, B, C, etc. C'est ce qui a été fait dans les mémoires que j'ai insérés, sur ce sujet, dans le 15e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et dans le tome 1er des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, et auxquels je me contente de renvoyer le lecteur, curieux de connaître cette théorie dans tous ses détails et les conséquences qu'on en a déduites. En appliquant successivement les expressions générales de da, db, dc, etc., au problème du mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe suivant une fonction quelconque, et au problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, on obtient les mêmes expressions pour les différentielles des constantes homologues dans ces deux problèmes, si différens l'un de l'autre; et par là les deux questions principales de l'Astronomie, savoir, la détermination du mouvement des corps célestes, considérés comme des points matériels isolés, et la détermination du mouvement de ces corps autour de leurs centres de gravité respectifs, se trouvent ramenées aux mêmes formules et dépendre de la même analyse.

534. Il est évident que si l'une des équations (2) est une suite des autres, l'une des quantités λ, λ', λ'', etc., devra rester indéterminée, puisque alors on pourra supprimer ou conserver arbitrairement cette équation superflue. Si a et b sont des constantes données, et qu'on ait, par exemple,

$$L'' = aL + bL',$$

chacune des trois premières équations (2) n'ajoutera rien aux conditions exprimées par les deux autres, et, conséquemment, l'une des trois inconnues λ, λ', λ'', devra rester indéterminée. C'est effectivement ce qui aura lieu; car si l'on fait

$$\lambda + a\lambda'' = \mu, \quad \lambda' + b\lambda'' = \mu',$$

ces trois inconnues se réduiront, dans les équations (4), aux deux quantités μ et μ', qui pourront seules être déterminées au moyen de ces équations, et dont on pourra seulement déduire les valeurs de deux des trois quantités λ, λ', λ''.

Si le point matériel m est assujetti à rester à des distances constantes et données de trois points fixes A, A', A'' (fig. 113), sa position sera complètement déterminée; ses coordonnées auront donc des valeurs constantes; et les trois premières équations (4) se réduiront à des équations d'équilibre, qui détermineront les tensions des fils Am, A'm, A''m, par lesquels le mobile m sera attaché aux trois points fixes. Si ce point matériel est assujetti à demeurer à une distance constante d'un quatrième point fixe A''', l'une des quatre distances Am, A'm, A''m, A'''m, sera déterminée d'après les trois autres; l'une des quatre conditions données étant ainsi une suite de trois d'entre elles, la tension de l'un des quatre fils Am, A'm, A''m, A'''m, demeurera indéterminée, d'après ce qu'on vient de dire, et conformément à ce qu'on avait dit déjà dans le n° 292. Appelons, en effet, l, l', l'', l''', les quatre distances données; désignons par a, b, c, les trois coordonnées de A, par a', b', c', celles de A', etc.; nous aurons

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} - l = 0,\\
L' &= \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2} - l' = 0,\\
L'' &= \sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2} - l'' = 0,\\
L''' &= \sqrt{(x-a''')^2 + (y-b''')^2 + (z-c''')^2} - l''' = 0,
\end{aligned}$$

pour les équations (2); et si l'on représente par α, β, γ, des valeurs constantes de x, y, z, qui satisfont à ces quatre équations, on aura

$$mX + \frac{\lambda(\alpha - a)}{l} + \frac{\lambda'(\alpha - a')}{l'} + \frac{\lambda''(\alpha - a'')}{l''} + \frac{\lambda'''(\alpha - a''')}{l'''} = 0,$$

$$mY + \frac{\lambda(\beta - b)}{l} + \frac{\lambda'(\beta - b')}{l'} + \frac{\lambda''(\beta - b'')}{l''} + \frac{\lambda'''(\beta - b''')}{l'''} = 0,$$

$$mZ + \frac{\lambda(\gamma - c)}{l} + \frac{\lambda'(\gamma - c')}{l'} + \frac{\lambda''(\gamma - c'')}{l''} + \frac{\lambda'''(\gamma - c''')}{l'''} = 0,$$

pour les équations (4), qui laisseront indéterminée l'une des quatre quantités λ, λ', λ'', λ''', lesquelles sont, comme on l'a dit dans le n° 345, les tensions des fils Am, $A'm$, $A''m$, $A'''m$. Mais, quelque peu extensibles que soient ces fils, si l'on a égard à cette circonstance physique, le point matériel m fera de petites vibrations, qui seront complètement déterminées, ainsi que les tensions des quatre fils, à chaque instant.

535. Pour le faire voir, supposons, pour fixer les idées, que la force qui agit sur le point m soit la pesanteur, que nous représenterons par g. En prenant l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de cette force, ses trois composantes seront $X=0$, $Y=0$, $Z=g$. Appelons ε, ε', ε'', ε''', les extensions que les quatre fils l, l', l'' l''', éprouveraient si le poids mg était suspendu verticalement à leur extrémité inférieure; soient ζ, ζ', ζ'', ζ''', les extensions de ces mêmes fils au bout du temps t, pendant le mouvement; leurs tensions au même instant auront pour valeurs (n° 288)

$$\frac{gm\zeta}{\varepsilon},\quad \frac{gm\zeta'}{\varepsilon'},\quad \frac{gm\zeta''}{\varepsilon''},\quad \frac{gm\zeta'''}{\varepsilon'''}.$$

Le mobile m n'étant plus assujetti à demeurer à des distances constantes de A, A', A'', A''', on devra supprimer les termes des équations (4), qui ont λ, λ', λ'', λ''', pour facteurs, et qui provenaient de ces conditions; mais, d'un autre côté, il faudra joindre au poids de ce point matériel les quatre forces précédentes, dirigées de m vers A, de m vers A', de m vers A'', de m vers A'''; ce qui revient à substituer, dans les équations (4), les valeurs précédentes de L, L', L'', L''', en y faisant, en même temps,

$$\lambda=\frac{-gm\zeta}{\varepsilon},\quad \lambda'=\frac{-gm\zeta'}{\varepsilon'},\quad \lambda''=\frac{-gm\zeta''}{\varepsilon''},\quad \lambda'''=\frac{-gm\zeta'''}{\varepsilon'''}.$$

Au bout du temps t, soient aussi

$$x=\alpha+u,\quad y=\beta+v,\quad z=\gamma+w;$$

α, β, γ, étant les mêmes constantes que précédemment, et u, v, w, des variables très petites, dont nous négligerons les carrés et les produits; il en résultera

$$\zeta=\frac{1}{l}\left[(\alpha-a)\,u+(\beta-b)\,v+(\gamma-c)w\right],$$

$$\zeta'=\frac{1}{l'}\left[(\alpha-a')\,u+(\beta-b')\,v+(\gamma-c')w\right],$$

$$\zeta''=\frac{1}{l''}\left[(\alpha-a'')\,u+(\beta-b'')\,v+(\gamma-c'')w\right],$$

$$\zeta'''=\frac{1}{l'''}\left[(\alpha-a''')\,u+(\beta-b''')\,v+(\gamma-c''')w\right];$$

et, relativement à ces inconnues u, v, w, les équations (4) seront linéaires, et se réduiront à

$$\frac{d^2u}{dt^2}\quad\left[\frac{(\alpha-a)\,\zeta}{l\varepsilon}+\frac{(\alpha-a')\,\zeta'}{l'\varepsilon'}+\frac{(\alpha-a'')\,\zeta''}{l''\varepsilon''}+\frac{(\alpha-a''')\,\zeta'''}{l'''\varepsilon'''}\right]=0,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+g\left[\frac{(\beta-b)\,\zeta}{l\varepsilon}+\frac{(\beta-b')\,\zeta'}{l'\varepsilon'}+\frac{(\beta-b'')\,\zeta''}{l''\varepsilon''}+\frac{(\beta-b''')\,\zeta'''}{l'''\varepsilon'''}\right]=0,$$

$$\frac{d^2w}{dt^2}+g\left[\frac{(\gamma-c)\,\zeta}{l\varepsilon}+\frac{(\gamma-c')\,\zeta'}{l'\varepsilon'}+\frac{(c-\gamma'')\,\zeta''}{l''\varepsilon''}+\frac{(\gamma-c''')\,\zeta'''}{l'''\varepsilon'''}\right]=0.$$

Leurs intégrales s'obtiendront par les règles ordinaires; elles renfermeront six constantes arbitraires, que l'on déterminera de manière qu'à l'origine du mouvement les fils Am, $A'm$, $A''m$, $A'''m$, aient leurs longueurs naturelles l, l', l'', l''', et que la vitesse initiale de m soit zéro, c'est-à-dire, de manière que les six quantités u, v, w, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, soient nulles quand $t=0$. Cela fait, ces intégrales feront connaître, à un instant quelconque, les valeurs de u, v, w, ou la position du point m; et les extensions ζ, ζ', ζ'', ζ''', des quatre fils, ainsi que leurs tensions au même instant, seront aussi déterminées. La même analyse peut facilement s'étendre au cas où le point m serait retenu par cinq ou un plus grand nombre de fils attachés à des points fixes.

Si l'on suppose nulles les quantités u, v, w, et qu'on supprime, en conséquence, les premiers

termes des trois dernières des sept équations précédentes, les valeurs de u, v, w, ξ, ξ', ξ'', ξ''', qu'on déduira de ces sept équations, répondront à l'état d'équilibre du poids de m et des quatre fils de suspension.

536. Nous avons expliqué, dans le n° 353, comment le principe de D'Alembert a aussi lieu dans le cas d'un changement brusque de vitesse, résultant de ce que des forces qu'on nomme *impulsions* ou *percussions*, agissent sur les mobiles avec de grandes intensités, pendant des intervalles de temps extrêmement petits, et leur impriment des vitesses qui peuvent être très grandes, sans que les points de ces corps soient déplacés sensiblement. L'équation fournie par la combinaison de ce principe avec celui des vitesses virtuelles, s'appliquera donc également à ces sortes de cas. Ainsi, supposons que des forces de ce genre soient appliquées simultanément aux points matériels m, m', m'', etc., du système que nous considérons. Désignons par A, B, C, les vitesses données et parallèles aux axes des coordonnées, que ces forces imprimeraient au point m s'il était libre, et par a, b, c, les vitesses inconnues qu'il prendra réellement, suivant ces mêmes directions. Appelons A', B', C', a', b', c', les quantités homologues relativement au point m'; A'', B'', C'', a'', b'', c'', celles qui répondent au point m''; etc., Les quantités de mouvement perdues suivant les directions des coordonnées seront

$$m(A-a),\quad m(B-b),\quad m(C-c),$$

pour le point m, et de même pour tous les autres; par conséquent, si l'on applique à ce système de forces l'équation (e) du n° 341, on aura

$$\Sigma m\left[(A-a)\delta x+(B-b)\delta y+(C-c)\delta z\right]=0;\ (5)$$

la somme Σ s'étendant à tous les points du système, et δx, δy, δz, étant les accroissemens qu'on attribue aux coordonnées du point quelconque m.

Si les liaisons des points du système sont toujours exprimées par les équations (2), il faudra que δx, δy, δz, et les accroissemens $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, etc., des coordonnées des autres points m', m'', etc., satisfassent aux équations (3); au moyen de ces équations, on éliminera donc de la formule (5) une partie des quantités δx, δy, etc.; puis on égalera à zéro les coefficiens des quantités restantes. En employant, comme plus haut, la méthode des facteurs indéterminés, leurs valeurs feront connaître les percussions qu'éprouveront les liens matériels des points du système, par l'effet d'un changement brusque de vitesse, et les percussions normales aux surfaces ou aux courbes sur lesquelles ces points sont astreints à se mouvoir.

537. Lorsqu'on voudra appliquer l'équation (5) à un changement brusque de vitesse produit par le choc des corps du système entre eux, ou contre des obstacles fixes, il y aura plusieurs observations importantes à faire.

Soient M et M' (fig. 114) deux de ces corps solides, K leur point de contact, HKH' la normale commune à leurs surfaces en ce point. Les déplacemens des différens points de ces mobiles pendant toute la durée du choc, étant regardés comme insensibles, l'équilibre des quantités de mouvement perdues peut se rapporter à tel instant qu'on voudra de cette durée (n° 353); en sorte qu'ayant pris pour A, B, C, les composantes de la vitesse d'un point quelconque au commencement du choc, on peut prendre, en même temps, pour a, b, c, les composantes de sa vitesse à un instant quelconque de ce phénomène; et les vitesses de tous les points du système, qui varient très rapidement pendant cette durée, devront toujours satisfaire aux conditions de cet équilibre. Mais pour que ces conditions soient exprimées par l'équation des vitesses virtuelles, il faut que les déplacemens infiniment petits qu'on attribue aux points du système, soient compatibles avec sa nature et avec la disposition relative de ses parties à l'instant que l'on considère; et, de plus, il est nécessaire que la même chose ait lieu à l'égard des déplacemens directement contraires (n° 331). Ainsi, par exemple, si un point matériel en équilibre est posé sur la surface d'un corps solide, contre lequel il s'appuie, ce point peut se mouvoir en tous sens sur le plan tangent à cette surface, et dans un sens seulement sur la normale. Cela étant, l'équation des vitesses virtuelles a lieu pour tous les déplacemens tangentiels, parce que les déplacemens opposés sont également possibles; mais elle ne subsiste pas pour le déplacement normal, à cause de l'impossibilité du déplacement contraire.

Il résulte de cette observation que si l'on veut appliquer l'équation (5) à une époque déterminée de la durée du choc, et que μ et μ' soient, à cet instant, les points matériels de M et M' qui répondent au point de contact K, on pourra attribuer à μ et μ' des déplacemens infiniment petits, tout-à-fait arbitraires et indépendans l'un de l'autre, suivant le plan tangent en K; mais les déplacemens de μ et μ' suivant la normale, devront être égaux et dirigés suivant la même partie KH ou KH' de cette droite; car s'ils étaient inégaux, ou qu'ils n'eussent pas lieu dans un même sens, ces déplacemens ou les déplacemens contraires des points μ et μ', seraient impossibles, et l'équation (5) ne leur serait point applicable. C'est faute d'avoir fait attention à cette condition essentielle, que quelques auteurs ont mal interprété l'équation dont il s'agit.

Si un troisième corps solide M'' touche M' au point K', où la normale commune à leurs surfaces est la droite LK'L', et que m' et m'' soient les points matériels de M' et M'' qui répondront à K', à l'instant que l'on considère pendant la durée du choc, il faudra aussi que les déplacemens infiniment petits, attribués à m' et m'' suivant cette normale, soient égaux et de même sens dans l'équation (5);

et de même pour tous les points de contact des corps du système, lorsque plusieurs d'entre eux viennent se choquer simultanément. Dans le cas du choc d'un de ces corps contre un obstacle fixe, le déplacement normal du point de contact devra être supposé nul, puisqu'il ne serait pas possible dans le sens opposé.

538. Quand les deux mobiles M et M' glisseront l'un sur l'autre pendant la durée du choc, il faudra avoir égard, dans l'équation (5), au frottement qui en résultera, et qui pourra être très considérable, comme on l'a dit dans le n° 353.

La quantité de mouvement infiniment petite que cette force enlèvera, pendant chaque instant, aux deux mobiles M et M', en sens contraire des vitesses des points matériels μ et μ' qui répondent au point de contact K, sera proportionnelle à celle que M aura communiquée à M' suivant KH', ou M' à M suivant KH, pendant le même instant. Donc, en supposant que le frottement conserve la même direction, pour chaque mobile, pendant toute la durée du choc, et qu'on représente par U la quantité finie de mouvement communiquée par un mobile à l'autre, suivant les parties KH ou KH' de la normale, pendant cette même durée, le frottement total pourra être représenté par fU; f étant un coefficient qui ne dépendra que de la nature des deux corps près de leur point de contact. Cette force devra être appliquée à M en sens contraire du glissement de μ, et à M' en sens contraire du glissement de μ'. En supposant donc que ces mouvemens aient lieu suivant les deux parties KF et KF' d'une tangente FKF' aux deux mobiles, et qu'on représente par p et p' les projections sur cette droite, des déplacemens infiniment petits attribués, dans l'équation (5), aux points μ et μ', on aura

$$-fU(p+p'),$$

pour le terme qu'il faudra ajouter au premier membre de cette équation, à raison du frottement que nous considérons : la quantité p est positive ou négative, selon que cette projection tombera sur la direction KF du mouvement de μ ou sur son prolongement KF', et de même la projection p' sera positive ou négative, suivant qu'elle tombera sur KF' ou sur KF.

On introduira de semblables termes dans l'équation (5), pour tous les points dans lesquels deux des corps du système viendront se choquer. La considération de ces termes est nécessaire dans la pratique ; l'exemple du n° 478 suffit pour montrer l'influence que ces termes, ou les frottemens dont ils proviennent, peuvent avoir sur les percussions ; mais on en fait abstraction lorsqu'il s'agit des théorèmes généraux sur le choc des corps ; et, dans la suite, nous les supposerons nuls ou insensibles.

On néglige aussi les quantités de mouvement produites par le poids des mobiles pendant la durée du choc, attendu que ces quantités sont proportionnelles à cette durée, et, conséquemment, insensibles. Quant aux quantités de mouvement produites par les attractions moléculaires qui se développent pendant le choc, soit d'un corps à un autre, quand la distance de leur surface est devenue insensible, soit dans l'intérieur de chaque corps, à raison des compressions ou dilatations qu'il éprouve, on en a déjà tenu compte dans l'équation (5), et leurs composantes totales sont précisément les quantités qui ont été représentées par mA, mB, mC, pour le point quelconque m.

539. Lorsqu'un système de points matériels est entièrement libre dans l'espace, de sorte que les équations (2) qui expriment leur liaison, ne contiennent que les distances mutuelles de ces points, dont aucun n'est supposé fixe, ou assujetti à demeurer sur une surface ou sur une courbe donnée, on peut décomposer le mouvement d'un tel système dans l'espace, comme nous l'avons fait précédemment pour un corps solide entièrement libre (n° 433), en deux mouvemens plus simples : l'un de translation, commun à tous les points du système, et qui sera celui de son centre de gravité ; l'autre de rotation autour de ce centre. Nous allons déduire successivement de la formule (1) les équations différentielles de ces deux mouvemens.

D'après la nature du système, il est évident qu'on peut déplacer à la fois tous ses points d'une même quantité, suivant une même direction quelconque. Supposons que α, β, γ, expriment les projections de ce déplacement commun sur les trois axes des coordonnées ; on aura alors

$$\alpha = \delta x = \delta x' = \delta x'', \quad \text{etc.},$$
$$\beta = \delta y = \delta y' = \delta y'', \quad \text{etc.},$$
$$\gamma = \delta z = \delta z' = \delta z'', \quad \text{etc.};$$

l'équation (1) deviendra donc

$$\alpha\Sigma m\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \beta\Sigma m\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \gamma\Sigma m\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0,$$

et comme les trois quantités α, β, γ, sont indépendantes entre elles, cette équation se décomposera en celles-ci :

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma mX, \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma mY, \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma mZ. \quad (6)$$

Or, si l'on appelle x_1, y_1, z_1, les trois coordonnées du centre de gravité du système, on aura

$$x_1\Sigma m = \Sigma mx, \quad y_1\Sigma m = \Sigma my, \quad z_1\Sigma m = \Sigma mz;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2};$$

par conséquent, on aura

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m X, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m Y, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m Z, \quad (7)$$

pour les équations différentielles du mouvement du centre de gravité, qui sera le mouvement de translation du système. Elles montrent que le centre de gravité de tout système entièrement libre, est le même que si les masses de tous les mobiles y étaient réunies, et que leurs forces motrices y fussent transportées parallèlement à leurs directions, comme dans le cas d'un seul corps solide (n° 438).

Si, parmi les points m, m', m'', etc., il y en avait qui fussent assujettis à se mouvoir sur des surfaces données, les équations (6) et (7) pourraient encore subsister, en joignant aux forces données, d'autres forces inconnues en grandeur, perpendiculaires à ces surfaces, et qui exprimeraient leurs résistances; ce qui permettrait ensuite de faire abstraction des surfaces données, et de considérer les points m, m', m'', etc., comme appartenant à un système entièrement libre.

540. La nature d'un tel système permet aussi de faire tourner à la fois tous ses points autour d'un même axe, et d'une même quantité angulaire, de manière que leurs distances mutuelles ne varient pas. Supposons que cette droite passe par l'origine des coordonnées. Soient λ, μ, ν, les angles que fait sa direction arbitraire avec les axes des x, y, z; si nous faisons pour un moment

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = h^2,$$

les cosinus des angles que fait la direction du déplacement de m, avec des parallèles aux trois axes, menées par ce point, seront $\frac{\delta x}{h}, \frac{\delta y}{h}, \frac{\delta z}{h}$; et comme cette direction est comprise dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, il faudra qu'on ait

$$\frac{\delta x}{h}\cos\lambda + \frac{\delta y}{h}\cos\mu + \frac{\delta z}{h}\cos\nu = 0.$$

De plus, l'axe de rotation passant par l'origine des coordonnées, la quantité $x^2 + y^2 + z^2$ ne variera pas pendant le déplacement de m; on aura donc aussi

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0;$$

et l'on tire sans difficulté, de ces deux dernières équations,

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= (y\cos\lambda - z\cos\mu)\,\epsilon, \\ \delta y &= (z\cos\nu - x\cos\lambda)\,\epsilon, \\ \delta z &= (x\cos\mu - y\cos\nu)\,\epsilon; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ϵ étant un facteur indéterminé. On aura de même

$$\delta x' = (y'\cos\lambda - z'\cos\mu)\,\epsilon',$$
$$\delta y' = (z'\cos\nu - x'\cos\lambda)\,\epsilon',$$
$$\delta z' = (x'\cos\mu - y'\cos\nu)\,\epsilon'$$

ϵ' étant aussi un facteur indéterminé qui devra être égal à ϵ, pour que le mouvement de rotation soit le même pour m et pour m', et que la distance de ces deux points ne varie pas. En effet, le carré de cette distance étant $(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$, et les formules précédentes rendant déjà constantes les deux parties $x^2 + y^2 + z^2$ et $x'^2 + y'^2 + z'^2$ de cette quantité, il faut que la variation de $xx' + yy' + zz'$ soit aussi nulle; d'où il résulte

$$x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z + x\delta x' + y\delta y' + z\delta z' = 0;$$

ou bien, en mettant pour δx, $\delta x'$, etc., leurs valeurs,

$$[(x'y - y'x)\cos\nu + (z'x - x'z)\cos\mu$$
$$+ (y'z - z'y)\cos\lambda]\,(\epsilon - \epsilon') = 0;$$

équation qui ne peut subsister pour tous les points du système, qu'autant qu'on aura $\epsilon' = \epsilon$.

Je substitue les formules (8) à la place de δx, δy, δz, dans l'équation (1). En observant que ϵ, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, sont des quantités communes à

tous les points du système, il vient

$$\epsilon \cos \nu \Sigma m \left[x \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y \right) - y \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X \right) \right]$$

$$+ \epsilon \cos \mu \Sigma m \left[z \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X \right) - x \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z \right) \right]$$

$$+ \epsilon \cos \lambda \Sigma m \left[y \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Z \right) - z \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y \right) \right] = 0;$$

et à cause que les coefficiens des sommes Σ sont trois quantités indépendantes entre elles, cette équation se décomposera en trois autres, savoir :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \left(z \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma m (zY - yX), \\ \Sigma m \left(x \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma m (xX - zZ), \\ \Sigma m \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma m (yZ - xY), \end{aligned}\right\} (9)$$

lesquelles équations seront celles du mouvement de rotation d'un système entièrement libre, autour d'un point fixe qu'on peut prendre arbitrairement, et où l'on placera l'origine des coordonnées. Ces équations subsisteront encore, lorsque tous les points m, m', m'', etc., ou une partie d'entre eux, seront assujettis à rester à des distances données de cette origine, puisque les valeurs de δx, $\delta x'$, etc., dont on a fait usage, satisfont à cette condition.

Si le système se réduit à un seul point, le mouvement de rotation ne se distinguera pas du mouvement de translation; les équations (9) ne seront effectivement qu'une combinaison des équations (6); et l'on voit, de plus, que chacune d'elles sera une suite des deux autres; car en supposant que le système se réduise au point m, et ajoutant les équations (9) après les avoir multipliées par z, y, x, il en résultera une équation identique.

Au lieu de faire tourner le système autour d'un axe quelconque, pour obtenir à la fois les trois équations (9), on obtiendrait plus simplement chacune d'elles, en faisant coïncider cette droite, comme dans le n° 340, avec l'un des axes des coordonnées; mais le calcul précédent a l'avantage de montrer que la considération d'un mouvement autour d'un axe quelconque ne peut donner que les trois équations (9), de même que la considération d'un mouvement parallèle à un axe quelconque ne peut donner que les trois équations (6).

S'il y a, dans le système, un axe fixe, et qu'on le prenne pour celui des z, par exemple, la première équation (9) subsistera seule, et sera celle du mouvement de rotation autour d'un axe fixe, comme dans le cas d'un corps solide (n° 391).

541. Dans le cas d'un système entièrement libre, où les équations (6) et (9) ont lieu simultanément, transportons l'origine des coordonnées au point du système dont les coordonnées variables seront représentées par x_1, y_1, z_1, relativement à la première origine; et faisons, pour cela,

$$x = x_1 + x_l, \quad y = y_1 + y_l, \quad z = z_1 + z_l,$$
$$x' = x_1 + x_l', \quad y' = y_1 + y_l', \quad z' = z_1 + z_l',$$
etc.;

en sorte que x_l, y_l, z_l, x_l', y_l', z_l', etc., soient les coordonnées de m, m', etc., rapportées à la nouvelle origine. La première équation (9) pourra d'abord s'écrire ainsi :

$$x_1 \Sigma m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y \right) - y_1 \Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X \right)$$
$$+ \Sigma m \left(x_l \frac{d^2 y}{dt^2} - y_l \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma m (x_l Y - y_l X);$$

les termes multipliés par x_1 et y_1 se détruisent, en vertu des deux premières équations (6); et en achevant la substitution des valeurs précédentes de x, x', etc., dans la partie restante du premier membre, on aura

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} \Sigma m x_l - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \Sigma m y_l + \Sigma m \left(x_l \frac{d^2 y_l}{dt^2} - y_l \frac{d^2 x_l}{dt^2} \right)$$
$$= \Sigma m (x_l Y - y_l X),$$

quelle que soit l'origine mobile des coordonnées. Mais si ce point est le centre de gravité du système, les sommes $\Sigma m x_l$ et $\Sigma m y_l$ seront nulles; par conséquent, les termes multipliés par $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ et $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$,

disparaîtront encore comme ceux qui avaient x_1 et y_1 pour facteurs; ce qui simplifiera l'équation précédente. En faisant des réductions semblables sur les deux autres équations (9), nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)&=\Sigma m\,(x_1Y-y_1X),\\ \Sigma m\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)&=\Sigma m\,(z_1X-x_1Z),\\ \Sigma m\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)&=\Sigma m\,(y_1Z-z_1Y),\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

pour les trois équations du mouvement de rotation du système autour de son centre de gravité. En les comparant aux équations (9), on voit que ce mouvement sera le même que si le centre de gravité était un point fixe, et que les forces données, qui agissent sur tous les points du système, ne fussent pas changées; propriété qui n'appartient qu'au centre de gravité, et que nous avions déjà trouvée (n° 438) dans le cas d'un corps solide entièrement libre.

542. Si l'on donne aux quantités δx, δy, etc., que renferme l'équation (5), les mêmes valeurs que dans le n° 539, on en déduira

$$\Sigma ma=\Sigma mA,\quad \Sigma mb=\Sigma mB,\quad \Sigma mc=\Sigma mC;\quad(11)$$

ce qui montre que dans les changemens brusques de vitesse, la somme des quantités de mouvement de tous les points d'un système entièrement libre demeure la même, parallèlement à chaque axe des coordonnées, et, par conséquent, suivant une direction quelconque. Il en résulte aussi que la grandeur et la direction de la vitesse du centre de gravité ne changent pas non plus; car les composantes de cette vitesse, avant et après le changement brusque, sont les deux membres de chacune des équations (11), divisés par la masse totale Σm. Ainsi, dans le choc de deux ou d'un plus grand nombre de corps, de nature et de forme quelconques, la vitesse de leur centre de gravité et la quantité totale de mouvement suivant chaque direction, n'éprouvent jamais aucun changement, comme nous l'avons déjà vu dans un cas particulier (n° 364).

Si a, b, c, a', b', c', etc., sont les composantes des vitesses initiales de m, m', etc., et A, B, C, A', B', C', etc., les composantes des vitesses qui leur seraient imprimées d'une manière quelconque à l'origine du mouvement, si ces points matériels étaient isolés, on aura

$$\frac{dx_1}{dt}\Sigma m=\Sigma ma,\quad \frac{dy_1}{dt}\Sigma m=\Sigma mb,\quad \frac{dz_1}{dt}\Sigma m=\Sigma mc,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx_1}{dt}\Sigma m=\Sigma mA,\quad \frac{dy_1}{dt}\Sigma m=\Sigma mB,\quad \frac{dz_1}{dt}\Sigma m=\Sigma mC,$$

pour $t=0$; équations qui feront connaître les composantes de la vitesse initiale du centre de gravité, d'après les vitesses données A, A', etc., ou seulement d'après la somme totale des quantités de mouvement communiquées au système parallèlement aux trois axes des coordonnées.

Je mets encore dans l'équation (5) les formules (8) à la place de δx, δy, δz, et j'en conclus

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\,(zb-ya)&=\Sigma m\,(zB-yA),\\ \Sigma m\,(za-xc)&=\Sigma m\,(zA-xC),\\ \Sigma m\,(yc-zb)&=\Sigma m\,(yC-zB);\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

ce qui fait voir que, dans les changemens brusques de vitesse, les momens des quantités de mouvement de tous les points d'un système entièrement libre restent les mêmes, par rapport à un axe quelconque; théorème qui subsiste encore, lorsque le système renferme un ou plusieurs points fixes, pourvu que ces points appartiennent à l'axe des momens.

En supposant que ces équations (12) répondent à l'origine du mouvement, de sorte qu'on ait

$$\frac{dx}{dt}=a,\quad \frac{dy}{dt}=b,\quad \frac{dz}{dt}=c,$$

pour $t=0$, et en transportant, comme dans le numéro précédent, l'origine des coordonnées au centre de gravité du système, qu'on suppose entièrement libre, on changera ces équations en celle-ci :

$$\Sigma m\left(z_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dz_1}{dt}\right)=\Sigma m\,(z_1B-y_1A),$$

$$\Sigma m\left(x_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dx_1}{dt}\right)=\Sigma m\,(x_1A-z_1C),$$

$$\Sigma m\left(y_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dy_1}{dt}\right)=\Sigma m\,(y_1C-x_1B),$$

dans lesquelles x_1, y_1, z_1, sont les coordonnées du point quelconque m, relativement à la nouvelle origine. Ces équations seront celles du mouvement initial du système autour de son centre de gravité; et comme elles ne renferment pas les composantes de la vitesse de ce point, il s'ensuit que ce mouvement de rotation sera le même que si le centre de gravité était un point fixe, et que les vitesses données A, A', etc., qui sont comprises dans les seconds membres, ne fussent pas changées; résultat conforme à celui que nous avons déjà trouvé, d'une autre manière, pour le cas d'un corps solide (n° 436).

543. Nous ferons remarquer que les équations (11) et (12) peuvent se déduire des équations (6) et (9), en supposant, dans celles-ci, que mX, mY, mZ, $m'X'$, $m'Y'$, $m'Z'$, etc., soient les composantes de forces motrices agissant sur les points m, m', etc., avec une grande intensité, et susceptibles de produire pendant un très court intervalle de temps, que

nous représenterons par θ, des quantités de mouvement données mA, mB, mC, $m'A'$, $m'B'$, $m'C'$, etc.

En effet, d'après cela, on aura

$$\int_0^\theta X dt = A, \quad \int_0^\theta Y dt = B, \quad \int_0^\theta Z dt = C;$$

et si les points du système sont en repos au commencement du temps θ, et que a, b, c, a', b', c', etc., soient les composantes de leurs vitesses à la fin de cet intervalle de temps, on aura aussi

$$\int_0^\theta \frac{d^2 x}{dt^2} dt = a, \int_0^\theta \frac{d^2 y}{dt^2} dt = b, \int_0^\theta \frac{d^2 z}{dt^2} dt = c,$$

pour le point quelconque m.

Or, en multipliant la première équation (6) par dt, et intégrant ensuite ses deux membres depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$, on a

$$\Sigma m \int_0^\theta \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma m \int_0^\theta X dt;$$

ce qui coïncide, d'après ce qui précède, avec la première équation (11); et de même pour les deux autres équations (6) et (11).

De plus si l'on fait abstraction des déplacemens des points m, m', m'', etc., pendant le temps θ, et que l'on considère, en conséquence, leurs coordonnées comme constantes pendant l'action des forces données, on déduira de la première équation (9)

$$\Sigma m \left(x . \int_0^\theta \frac{d^2 y}{dt^2} dt - y . \int_0^\theta \frac{d^2 x}{dt^2} dt \right)$$
$$= \Sigma m \left(x . \int_0^\theta Y dt - y . \int_0^\theta X dt \right);$$

ce qui n'est autre chose que la première équation (12), en vertu des suppositions précédentes; et l'on conclura de même les deux autres équations (12) des deux dernières équations (9).

544. Les accroissemens des coordonnées dont on a fait usage dans le n° 540, supposent que les distances des points du système entre eux et à l'origine des coordonnées, sont invariables; leurs expressions, divisées par dt, doivent donc coïncider avec les composantes de la vitesse, relatives aux élemens d'un corps solide, tournant autour d'un point fixe; ce qu'il ne sera pas inutile de vérifier.

Pour cela, soient Ox, Oy, Oz (fig 115), les axes des coordonnées, et OI l'axe qui répond aux angles λ, μ, ν, du n° 540, autour duquel on fait tourner le système d'une quantité infiniment petite. Dans ce mouvement, les points du système décrivent des arcs de cercle semblables, et ont tous la même vitesse angulaire; pour la connaître, il suffira de déterminer celle d'un point K, qui se trouvait, par exemple, sur l'axe Oz au commencement de l'instant dt. Or, pour ce point, on a $x = 0$ et $y = 0$; ce qui réduit les formules (8) à

$$\delta x = z\iota \cos \mu, \quad \delta y = - z\iota \cos \lambda, \quad \delta z = 0;$$

la vitesse absolue du point K sera donc

$$\sqrt{\frac{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}{dt^2}} = \frac{z\iota \sin \nu}{dt},$$

à cause de $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$. Sa distance à l'axe OI est $z \sin \nu$; par conséquent, on aura $\frac{\iota}{dt}$ pour sa vitesse angulaire, qui sera celle de tout le système.

En la représentant par ω, on aura donc $\iota = \omega dt$; et si l'on fait

$$\omega \cos \lambda = p, \quad \omega \cos \mu = q, \quad \omega \cos \nu = r,$$

les formules (8) deviendront

$$\frac{\delta x}{dt} = (yp - zq), \frac{\delta y}{dt} = (zr - xp), \frac{\delta z}{dt} = (xq - yr);$$

résultats qui coïncident avec ceux du n° 408, en prenant dans ceux-ci, les directions des axes mobiles $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, à l'instant que l'on considère, pour celles des axes fixes et arbitraires Ox, Oy, Oz.

On peut remarquer que si le plan mOx décrit d'abord un angle rdt autour de l'axe Oz, et que le mouvement ait lieu de Ox vers Oy, ou dans le sens indiqué par la flèche s, on aura les accroissemens des coordonnées x, y, z, du point m, en faisant $p = 0$ et $q = 0$ dans les valeurs de δx, δy, δz; par conséquent, ses trois coordonnées deviendront

$$x - yrdt, \quad y + xrdt, \quad z.$$

Après ce premier mouvement, si le plan mOy décrit un angle qdt autour de l'axe Oy, et en allant de l'axe Oz vers l'axe Ox, les accroissemens des coordonnées de m s'obtiendront en faisant $p = 0$ et $r = 0$ dans les valeurs de δx, δy, δz, et y mettant ensuite les trois coordonnées précédentes à la place de x, y, z; d'où il résulte qu'après ce second mouvement les coordonnées du point m seront

$$x - yrdt + zqdt, \quad y + xrdt, \quad z - (x - yrdt)\, qdt;$$

et la troisième se réduira à $z - xqdt$, en négligeant l'infiniment petit du second ordre. Enfin, après le second mouvement, si le plan mOx décrit un angle pdt autour de l'axe Ox, et en allant de l'axe Oy vers l'axe Oz, on trouvera, en négligeant les infinimens petits du second ordre,

$$x + (zq - yr)dt, \; y + (xr - zp)dt, \; z + (yp - xq)dt,$$

pour les trois coordonnées du point m, à la fin du troisième mouvement, qui étaient primitivement x, y, z.

On conclut de là que si un point m tourne successivement autour de trois axes rectangulaires, avec des vitesses angulaires p, q, r, et pendant des instans égaux, son déplacement final sera le même que s'il eût tourné pendant un de ces instans avec une vitesse angulaire ω, autour d'un seul axe, fai-

sant avec les trois premiers des angles dont les cosinus sont $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$. Cette remarque, relative aux trois vitesses de rotation p, q, r, qu'on appelle les *composantes* de la vitesse ω (n° 407), s'applique également aux composantes d'une vitesse de translation.

La composition des vitesses de rotation suit les mêmes lois, et est comprise dans les mêmes formules que celle des vitesses de translation; en partant de cette analogie de ces deux sortes de mouvement, on en peut déduire l'identité de la composition des momens et de la composition des forces, que nous avons conclue (n° 281) d'une semblable analogie entre les projections des lignes droites et les projections des surfaces.

§ II. *Lois générales des petites oscillations.*

545. Indépendamment des mouvemens de translation et de rotation communs à tous les points d'un système quelconque, et dans lesquels leurs distances ne varient pas, il y a d'autres mouvemens où les mobiles s'éloignent et se rapprochent les uns des autres. Or, si leurs déplacemens sont constamment très petits, on peut réduire le problème à des équations linéaires, et déterminer, par approximation, les coordonnées des mobiles en fonctions du temps. Des phénomènes très nombreux et très variés dépendent de ces petits mouvemens oscillatoires, dont nous allons maintenant faire connaître les lois générales.

Soient i le nombre des mobiles m, m', m'', etc., et r le nombre des équations (2) du n° 532, qui expriment les conditions du système. Le nombre des coordonnées de ces points matériels sera $3i$, et si l'on fait $3i - r = n$, les équations (2) détermineront un nombre r de coordonnées en fonctions des n autres, ou, plus généralement, toutes les coordonnées pouront être déterminées au moyen de ces équations, en fonctions de n variables indépendantes. Je représenterai par α, β, γ, etc., les valeurs initiales de ces n variables, et par $\alpha + u$, $\beta + v$, $\gamma + w$, etc., leurs valeurs au bout du temps t; et je supposerai que les inconnues u, v, w, etc., soient de très petites quantités pendant toute la durée du mouvement. Chacune des coordonnées des mobiles sera une fonction donnée de $\alpha + u$, $\beta + v$, $\gamma + w$, etc., qui pourrait, en outre, renfermer le temps t, si cette variable entrait explicitement dans les équations (2). Ces fonctions pourront se développer en séries très convergentes, ordonnées suivant les puissances et les produits de u, v, w, etc. Je représenterai ces développemens par

$$\begin{aligned}
x &= p + au + bv + cw + \text{etc.}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}eu^2 + \tfrac{1}{2}fv^2 + \tfrac{1}{2}gw^2 + huv + huw + lvw + \text{etc.},\\
y &= p_1 + a_1 u + b_1 v + c_1 w + \text{etc.}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}e_1 u^2 + \tfrac{1}{2}f_1 v^2 + \tfrac{1}{2}g_1 w^2 + h_1 uv + k_1 uw + l_1 vw + \text{etc.},\\
z &= p_2 + a_2 u + b_2 v + c_2 w + \text{etc.}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}e^2 u^2 + \tfrac{1}{2}f_2 v^2 + \tfrac{1}{2}g_2 w^2 + h_2 uv + k_2 uw + l_2 vw + \text{etc.},
\end{aligned}$$

et de même pour les autres coordonnées x', y', z', x'', etc., on posera

$$\begin{aligned}
x' &= p' + a'u + b'v + c'w + \text{etc.}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}e'u^2 + \tfrac{1}{2}f'v^2 + \tfrac{1}{2}g'w^2 + h'uv + k'uw + l'vw + \text{etc.},\\
y' &= p'_1 + a'_1 u + b'_1 v + c'_1 w + \text{etc.}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}e'_1 u^2 + \tfrac{1}{2}f'_1 v^2 + \tfrac{1}{2}g'_1 w^2 + h'_1 uv + k'_1 uw + l'_1 vw + \text{etc.},\\
z' &= p'_2 + a'_2 u + b'_2 v + c'_2 w + \text{etc.}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}e'_2 u^2 + \tfrac{1}{2}f'_2 v^2 + \tfrac{1}{2}g'_2 w^2 + h'_2 uv + k'_2 uw + l'_2 vw + \text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

et je supposerai que les équations (2) ne contiennent pas le terme t explicitement, auquel cas tous les coefficiens des puissances et des produits de u, v, w, etc., dans ces séries seront des constantes données. Si le système avait un mouvement de translation ou de rotation commun à tous ses points, il faudrait comprendre les parties variables de leurs coordonnées, qui en résulteraient, dans les premiers termes p, p_1, etc.; mais, pour plus de simplicité, je supposerai que cette circonstance n'a pas lieu; et ces premiers termes seront aussi des constantes données.

Les composantes des forces qui agissent sur les points m, m', m'', etc., étant des fonctions données de leurs coordonnées, si l'on substitue dans leurs expressions les valeurs de x, y, etc., on pourra ensuite les développer suivant les puissances et les produits de u, v, w, etc. De cette manière, on

aura donc

$$\begin{aligned}
X &= P + Au + Bv + Cw + \text{etc.},\\
Y &= P_1 + A_1 u + B_1 v + C_1 w + \text{etc.},\\
Z &= P_2 + A_2 u + B_2 v + C_2 w + \text{etc.},\\
X' &= P' + A'u + B'v + C'w + \text{etc.},\\
Y' &= P'_1 + A'_1 u + B'_1 v + C'_1 w + \text{etc.},\\
Z' &= P'_2 + A'_2 u + B'_2 v + C'_2 w + \text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

les premiers termes P, P_1, etc., et tous les coefficiens A, A_1, etc., étant des fonctions données de p, p_1, etc., a, b, etc., qui pourraient, en outre, renfermer le temps t, si cette variable entrait explicitement dans les expressions des forces données. Nous supposerons que cela n'a pas lieu; et nous regarderons les quantités P, P_1, etc., A, A_1, etc., comme des constantes données.

546. Cela posé, pour appliquer l'équation (1) du n° 532 au mouvement que nous considérons, il faudra attribuer aux variables indépendantes u, v, w, etc., des accroissemens infiniment petits, qu'on représentera par δu, δv, δw, etc.; puis substituer, dans cette équation (1), les valeurs correspondantes de δx, δy, δz, qui seront, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned}
\delta x &= (a + eu + hv + kw + \text{etc.})\,\delta u\\
&\quad + (b + fv + hu + lw + \text{etc.})\,\delta v\\
&\quad + (c + gw + ku + lv + \text{etc.})\,\delta w\\
&\quad + \text{etc.},\\
\delta y &= (a_1 + e_1 u + h_1 v + k_1 w + \text{etc.})\,\delta u\\
&\quad + (b_1 + f_1 v + h_1 u + l_1 w + \text{etc.})\,\delta v\\
&\quad + (c_1 + g_1 w + k_1 u + l_1 v + \text{etc.})\,\delta w\\
&\quad + \text{etc.},\\
\delta z &= (a_2 + e_2 u + h_2 v + k_2 w + \text{etc.})\,\delta u\\
&\quad + (b_2 + f_2 v + h_2 u + l_2 w + \text{etc.})\,\delta v\\
&\quad + (c_2 + g_2 w + k_2 u + l_2 v + \text{etc.})\,\delta w\\
&\quad + \text{etc.};
\end{aligned}$$

formules d'où l'on déduira les valeurs de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, en ajoutant un trait supérieur à toutes les constantes; celles de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, en en ajoutant deux; etc. La substitution de ces valeurs de δx, δy, etc., étant effectuée, on égalera à zéro, dans le premier membre de l'équation (1), le coefficient de chacune des quantités δu, δv, δw, etc., qui sont arbitraires et indépendantes. De cette manière, on aura

$$\begin{aligned}
&\Sigma m \Big[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X\right)(a + eu + hv + kw + \text{etc.})\\
&\quad + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right)(a_1 + e_1 u + h_1 v + k_1 w + \text{etc.})\\
&\quad + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right)(a_2 + e_2 u + h_2 v + k_2 w + \text{etc.}) \Big] = 0,\\
&\Sigma m \Big[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X\right)(b + fv + hu + lw + \text{etc.})\\
&\quad + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right)(b_1 + f_1 v + h_1 u + l_1 w + \text{etc.})\\
&\quad + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right)(b_2 + f_2 v + h_2 u + l_2 w + \text{etc.} \Big] = 0,\\
&\Sigma m \Big[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X\right)(c + gw + ku + lv + \text{etc.}\\
&\quad + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right)(c_1 + g_1 w + k^1 u + l_1 v + \text{etc.})\\
&\quad + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right)(c_2 + g_2 w + k_2 u + l_2 v + \text{etc.}) \Big] = 0,\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

les sommes Σ s'étendant toujours à tous les points m, m', m'', etc., du système.

Il restera encore à substituer dans ces équations, à la place de x, y, etc., X, Y, etc., leurs valeurs précédentes. La substitution faite, on négligera, dans une première approximation, les carrés et les produits de u, v, w, etc., ainsi que les produits de ces inconnues et de leurs coefficiens différentiels $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$, etc., qui sont aussi des quantités constamment très petites; il en résultera alors un

nombre n d'équations linéaires à coefficiens constans, que nous indiquerons par (a), et dont chacune sera de la forme :

$$\left.\begin{aligned} D\frac{d^2u}{dt^2} + E\frac{d^2v}{dt^2} + F\frac{d^2w}{dt^2} + \text{etc.} \\ + Gu + Hv + Kw + \text{etc.} = Q; \end{aligned}\right\} (a)$$

les coefficiens D, E, F, etc., G, H, K, etc., ainsi que la quantité Q, désignant des fonctions données des constantes qui entrent dans les valeurs précédentes de x, y, etc., X, Y, etc.

Après avoir déterminé les valeurs approchées de u, v, w, etc., aux moyen de ces n équations, on les substituera dans les termes des équations rigoureuses, qu'on a négligés dans cette première approximation ; les nouvelles équations qui en résulteront différeront des premières en ce que leurs seconds membres, au lieu d'être constans, seront des fonctions connues de t ; on en déduira d'autres valeurs de u, v, w, etc., plus approchées que les premières ; et ainsi de suite, par la méthode des approximations successives. Nous nous bornerons à la première approximation, suivant l'usage ordinaire dans les questions de ce genre. Quand les points matériels m, m', m'', etc., seront en nombre infini, les équations (a) se changeront en équations aux différences partielles, communes à tous les points du système, et dont le nombre sera toujours égal à celui des inconnues u, v, w, etc. C'est ce que l'on a vu, par exemple, dans le problème des cordes vibrantes (n° 484), où ces inconnues sont au nombre de trois, qui expriment les déplacemens d'un point quelconque de la corde suivant trois directions rectangulaires, et dont les valeurs dépendent de trois équations aux différences partielles, du second ordre par rapport à t.

547. Les seconds membres des équations (a) et les coefficiens qui entrent dans les premiers, étant des quantités constantes, on pourra toujours faire disparaître ces seconds membres, en augmentant chacune des inconnues u, v, w, etc., d'une quantité constante, qu'on déterminera facilement. Sans restreindre la généralité de la question, nous pouvons donc supposer qu'on a $Q = 0$ dans chacune des équations (a) ; ce qui revient à dire que les valeurs initiales α, β, γ, etc., des n variables indépendantes, répondent à un état d'équilibre du système, dont on l'a écarté en déplaçant un tant soit peu les points m, m', m'', etc., et leur imprimant de très petites vitesses. Ces déplacemens et ces vitesses devant être compatibles avec les liaisons des points du système, ce ne sont pas les valeurs initiales des coordonnées x, y, etc., et de leurs premiers coefficiens différentiels $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, etc., qui sont données arbitrairement dans chaque cas, mais seulement les valeurs initiales des inconnues indépendantes u, v, w, etc., et de leurs coefficiens différentiels $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, etc.

On satisfera aux équations (a) sans seconds membres en prenant

$$\left.\begin{aligned} u &= RN \sin\left(t\sqrt{\rho} - r\right), \\ v &= RN' \sin\left(t\sqrt{\rho} - r\right), \\ w &= RN'' \sin\left(t\sqrt{\rho} - r\right), \\ &\text{etc.}; \end{aligned}\right\} (b)$$

R et r étant des constantes arbitraires, dont la seconde pourra être supposée positive et moindre que π, et ρ, N, N', N'', etc., désignant des constantes qu'il s'agira de déterminer. La substitution de ces valeurs de u, v, w, etc., dans les équations (a), donnera évidemment un nombre n d'équations de cette forme :

$$(DN + EN' + FN'' + \text{etc.})\,\rho = GN + HN' + KN'' + \text{etc.}$$

En éliminant entre elles un nombre $n-1$ des quantités N, N', N'', etc., la $n^{\text{ième}}$ s'en ira en même temps, et l'on aura, pour déterminer ρ, une équation du degré n, que je représenterai par

$$\Delta = 0.$$

De plus, les valeurs de $n-1$ des quantités N, N', N'', etc., par exemple, de N', N'', etc., qu'on tirera de ces mêmes équations, seront des fractions rationnelles du degré n, par rapport à ρ, ayant un dénominateur commun, et multipliées toutes par la quantité N, qui restera indéterminée. En faisant celle-ci égale au dénominateur commun, les n quantités N, N', N'', etc., seront exprimées symétriquement par des polynomes du degré n relativement à ρ. Or, à cause de la forme linéaire des équations (a), on y satisfera non seulement par les valeurs précédentes de u, v, w, etc., relatives à telle racine qu'on voudra de l'équation $\Delta = 0$, mais aussi en prenant pour u, v, w, etc., les sommes de toutes ces valeurs particulières, dans lesquelles on pourra changer les constantes R et r en même temps que la racine de $\Delta = 0$. Si donc on appelle ρ, ρ_1, ρ_2, etc., les racines de cette équation, et qu'on représente par N, N_1, N_2, etc., les valeurs correspondantes de N ; par N', N'_1, N'_2, etc., celles de N' ; etc., on satisfera aux équations (a) au moyen de

$$\left.\begin{aligned} u &= RN \sin\left(t\sqrt{\rho} - r\right) + R_1 N_1 \sin\left(t\sqrt{\rho_1} - r_1\right) + \text{etc.}, \\ v &= RN' \sin\left(t\sqrt{\rho} - r\right) + R_1 N'_1 \sin\left(t\sqrt{\rho_1} - r_1\right) + \text{etc.}, \\ w &= RN'' \sin\left(t\sqrt{\rho} - r\right) + R_1 N''_1 \sin\left(t\sqrt{\rho_1} - r_1\right) + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}\right\} (c)$$

R, R_1, R_2, etc., r, r_1, r_2, etc., étant des constantes arbitraires; et comme elles sont au nombre de $2n$, il s'ensuit que ces formules (c) seront les n intégrales complètes des équations (a), dont chacune est du second ordre.

Dans chaque cas, on déterminera les valeurs de $R\cos r$, $R_1\cos r_1$, etc., $R\sin r$, $R_1\sin r_1$, etc., au moyen des valeurs données pour $t=0$, des $2n$ quantités u, v, w, etc. $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, etc. Toutes ces valeurs étant supposées très petites, celles de R, R_1, R_2, etc., le seront aussi; par conséquent, si toutes les racines ρ, ρ_1, ρ_2, etc., de l'équation $\Delta=0$, sont réelles et positives, les valeurs de u, v, w, etc., en fonctions de t, seront périodiques et demeureront très petites, comme on l'a supposé pendant toute la durée du mouvement. Mais si une ou plusieurs de ces racines sont imaginaires ou négatives, les termes qui leur correspondront dans les équations (8) se changeront, par les formules connues, en exponentielles, et croîtront indéfiniment; par conséquent, les valeurs de u, v, w, etc., quelque petites qu'elles aient été à l'origine du mouvement, finiront par cesser de l'être; et les formules (c) ne pourront plus représenter les valeurs approchées de ces inconnues, que pendant un temps peu considérable. Dans le premier cas, que nous allons examiner spécialement, l'état d'équilibre, d'où le système a été un peu écarté, est un état stable; dans le second cas, cet équilibre est non stable, du moins relativement aux dérangemens primitifs, pour lesquels les coefficiens R, R_1, R_2, etc., des termes non périodiques, ne sont pas égaux à zéro.

548. Lorsque tous les coefficiens R, R_1, R_2, etc., sont nuls, excepté le premier, par exemple, les formules (c) se réduisent aux formules (b). En négligeant toujours les carrés et les produits de v, u, w, etc., on aura donc simplement (n° 545)

$$\left.\begin{aligned}
z &= p + (a\,N + b\,N' + c\,N'' + \text{etc.})\,R\sin(t\sqrt{\rho} - r),\\
y &= p_1 + (a_1\,N + b_1\,N' + c_1\,N'' + \text{etc.})\,R\sin(t\sqrt{\rho} - r),\\
z &= p_2 + (a_2\,N + b_2\,N' + c_2\,N'' + \text{etc.})\,R\sin(t\sqrt{\rho} - r),\\
x' &= p' + (a'\,N + b'\,N' + c'\,N'' + \text{etc.})\,R\sin(t\sqrt{\rho} - r),\\
y' &= p'_1 + (a'_1\,N + b'_1\,N' + c'_1\,N'' + \text{etc.})\,R\sin(t\sqrt{\rho} - r),\\
z' &= p'_2 + (a'_2\,N + b'_2\,N' + c'_2\,N'' + \text{etc.})\,R\sin(t\sqrt{\rho} - r),\\
&\text{etc.};
\end{aligned}\right\}\quad(d)$$

Les premiers termes p, p_1, etc., étant constans ainsi que les coefficiens des seconds termes, il s'ensuit que, dans ce cas, tous les points du système feront, suivant la direction de chacune de leurs coordonnées, des oscillations isochrones et d'une amplitude constante, dont la durée sera la même et égale à $\frac{2\pi}{\sqrt{\rho}}$, pour tous ces mobiles, et dans toutes les directions. Les rapports des amplitudes pour deux points ou deux directions différentes, seront déterminés, et dépendront de la nature du système et de la racine ρ de l'équation $\Delta=0$. Leur grandeur absolue, dépendante du facteur R, sera arbitraire, et n'influera pas sur la durée des oscillations. Tous les mobiles reviendront à la fois à leur position d'équilibre, qui répondent, par hypothèse (n° 547), à $u=0$, $v=0$, $w=0$, etc., ou à $x=p$, $y=p_1$, etc.; le premier retour aura lieu au bout d'un temps $t=\frac{r}{\sqrt{\rho}}$, qui dépendra, ainsi que R, de leur dérangement primitif.

Un système de points matériels, dans lequel la liaison de ces points laisse un nombre n de variables indépendantes, et qu'on dérangera un tant soit peu d'un état d'équilibre, pourra prendre un nombre n de mouvemens semblables au précédent, qui répondront aux n racines de l'équation $\Delta=0$. De plus, en vertu des formules (c) et des valeurs correspondantes des coordonnées x, y, etc., tous ces petits mouvemens, ou seulement quelques-uns d'entre eux, pourront avoir lieu en même temps dans ce système; et réciproquement, quel que soit son dérangement initial, on pourra toujours décomposer le mouvement de chacun de ces points, parallèlement à chaque axe des coordonnées, en un nombre n, ou moindre que n, d'oscillations simples, comme celles qui répondent aux équations (d), dont les durées indépendantes du dérangement initial seront $\frac{2\pi}{\sqrt{\rho}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{\rho_1}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{\rho_2}}$, etc. Quand ces durées seront toutes commensurables, le système entier reviendra au même état au bout de chaque intervalle de temps égal à la plus longue; c'est ce qui a lieu, par exemple, dans le mouvement des cordes vibrantes, et n'a pas lieu dans le mouvement transversal des verges élastiques (nos 491 et 526).

C'est dans ce théorème général que consiste le *principe de la coexistence des petites oscillations*. Il a encore lieu lorsque le nombre des points m, m', m'', etc., du système est infini; le nombre des oscillations simples, qui sont alors possibles, peut être aussi infini; mais leurs durées et les rapports de leurs amplitudes n'en sont pas moins des quantités déterminées. Ainsi, dans le mouvement trans-

versal d'une corde tendue, dont la longueur, le poids et la tension sont l, p et α, et en désignant par g la gravité, les durées des oscillations simples ne peuvent être que la quantité $2\sqrt{\frac{pl}{g\alpha}}$ et ses sous-multiples; et, d'après la formule (d) du n° 490, les amplitudes de l'oscillation qui répond au sous-multiple quelconque i, sont entre elles dans le rapport de $\sin\frac{i\pi x}{l}$ à $\sin\frac{i\pi x'}{l}$, pour des points de la corde, dont x et x' sont les distances à l'une de ses extrémités.

549. Lorsque les points m, m', m'', etc., oscilleront dans un milieu résistant, les composantes X, Y, etc., des forces qui les sollicitent, renfermeront dans leurs expressions les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, etc., des vitesses de ces mobiles. Si la résistance du milieu est proportionnelle au carré ou à une puissance supérieure de la vitesse, elle n'influera pas sur le mouvement du système, au degré d'approximation où nous nous sommes arrêté, parce que les termes $\frac{du^2}{dt^2}$, $\frac{dv^2}{dt^2}$, $\frac{dw^2}{dt^2}$, etc., qui en résulteraient dans les expressions de X, Y, etc., sont du même ordre de petitesse que les quantités qui ont été négligées. Mais si les mouvemens des points m, m', m'', etc., sont peu rapides, il faudra, comme dans le cas des très petites oscillations d'un pendule simple (n° 187), supposer la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse; supposition qui introduira dans les expressions X, Y, etc., et par suite dans les équations (a), des termes multipliés par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$, etc., qu'on ne devra pas négliger.

Ces équations, que j'indiquerai par (e), seront alors de la forme

$$\left.\begin{aligned} &D\frac{d^2u}{dt^2} + E\frac{d^2v}{dt^2} + F\frac{d^2w}{dt^2} + \text{etc.} \\ &+ Gu + Hv + Kw + \text{etc.} \\ &= D'\frac{du}{dt} + E'\frac{dv}{dt} + F'\frac{dw}{dt} + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} (e)$$

D', E', F', etc., étant aussi des coefficiens constans, qui seront proportionnels à la densité du milieu, et généralement très petits par rapport à ceux qui entrent dans le premier membre. Or, on satisfera à ce système d'équations au moyen des formules (b) multipliées par des exponentielles, c'est-à-dire, en prenant

$$\left.\begin{aligned} u &= RN \sin(t\sqrt{\rho} - r)e^{-\omega t}, \\ v &= RN' \sin(t\sqrt{\rho} - r)e^{-\omega' t}, \\ w &= RN'' \sin(t\sqrt{\rho} - r)e^{-\omega'' t}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}\right\} (f)$$

e désignant la base des logarithmes népériens, et ω, ω', ω'', etc., étant des quantités constantes et très petites. Je négligerai leurs carrés et les produits de ces inconnues et des coefficiens D', E', F', etc. Les valeurs de u, v, w, etc., satisfaisant déjà aux équations (e) sans seconds membres, lorsque l'on fait abstraction des exponentielles, leur substitution dans les équations (e) donnera un nombre n d'équations de la forme,

$$2DN\omega + 2EN'\omega' + 2FN''\omega'' + \text{etc.} = D'N + E'N' + \text{etc.},$$

d'où l'on tirera les valeurs des n inconnues ω, ω', ω'', etc.

Ces valeurs seront positives, parce que l'effet de la résistance d'un milieu est de diminuer graduellement les amplitudes des oscillations. Cette diminution sera plus ou moins rapide pour les diverses variables indépendantes u, v, w, etc.; elle dépendra aussi de la racine ρ de l'équation $\Delta = 0$, qui entre dans les valeurs de N, N', N'', etc.; en sorte que les amplitudes des oscillations simples dont le système est susceptible, ne décroîtront pas toutes avec une même rapidité. La résistance du milieu n'aura d'ailleurs aucune influence sur la durée de chaque sorte d'oscillation, qui sera toujours $\frac{2\pi}{\sqrt{\rho}}$ pour celle qui répond à la racine ρ. En prenant les sommes des formules (f), relatives à toutes les racines de l'équation $\Delta = 0$, on aura, comme précédemment, les valeurs les plus générales de u, v, w, etc.

550. Il résulte du principe du n° 548, que si les points d'un système sont tellement liés entre eux, qu'il ne reste qu'une seule variable indépendante, ils ne pourront faire qu'une seule espèce d'oscillations, pour lesquelles la durée et les rapports des amplitudes relatives aux différens mobiles, dépendront des forces qui les sollicitent, et de la nature du système. Ce cas aura lieu, par exemple, dans le mouvement de deux points matériels m et m', attachés l'un à l'autre par un fil d'une longueur constante, et obligés de se mouvoir sur des courbes données.

Si, au contraire, les points m, m', m'', etc., ne sont pas liés entre eux ni assujettis à demeurer sur des surfaces ou sur des courbes données, ce qui n'empêche pas qu'ils ne soient soumis à leurs attractions ou répulsions mutuelles et à d'autres forces semblables dirigées vers des points fixes, toutes leurs coordonnées seront des variables indépendantes; et, dans ce cas, inverse du précédent, le nombre des oscillations simples qui pourront avoir lieu, sera triple de celui de ces points matériels. C'est ce qui arrive effectivement dans le problème du n° 535, relatif au mouvement très petit d'un point m, considéré comme entièrement libre, et soumis à des forces dirigées vers quatre points fixes.

Pour donner encore un exemple de l'application

du principe précédent, considérons les petites oscillations d'un point matériel pesant m, sur la surface d'un ellipsoïde dont l'un des axes est vertical. Soient $2c$ la longueur de cet axe, $2a$ et $2b$ celles des deux axes horizontaux, et conséquemment

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'équation de la surface, quand l'origine des coordonnées est à son centre. Si l'on transporte cette origine au point le plus bas, et que les z positives soient dirigées de bas en haut, il faudra mettre $c-z$, au lieu de z, dans cette équation. Les oscillations du mobile étant supposées très petites, de part et d'autre de ce point inférieur, les abscisses horizontales x et y de m le seront aussi, et son ordonnée verticale z sera très petite par rapport à x et y. En négligeant le carré de z, après la substitution de $c-z$ à la place de z, on aura alors

$$z=\frac{cx^2}{2a^2}+\frac{cy^2}{2b^2};$$

et si l'on appelle h et k les rayons de courbure des deux sections principales de la surface, relatifs à son point le plus bas, ou à $x=0$ et $y=0$, on en déduira

$$h=\frac{a^2}{c},\quad k=\frac{b^2}{c}.$$

Cela posé, dans cette question, les variables indépendantes sont au nombre de deux, savoir x et y; le mobile ne peut donc exécuter que deux sortes d'oscillations simples; et son mouvement le plus général résultera de la coexistence de ces deux mouvemens particuliers. Or, si l'on écartait le mobile du point le plus bas de l'ellipsoïde, dans la section dont l'axe horizontal est $2a$, et qu'on lui imprimât une vitesse dirigée dans le plan de cette section, il est évident qu'il n'en sortirait pas pendant tout son mouvement. En désignant par g la gravité, la durée de ces petites oscillations serait alors $2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, comme celle du pendule simple dont la longueur est h (n° 183); et, à un instant quelconque, on aurait

$$x=\mathrm{R}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{h}}-r\right),\quad y=0;$$

R et r étant, comme précédemment, deux constantes arbitraires. Dans le cas où les petites oscillations auraient lieu dans le plan de la section dont l'axe horizontal est $2b$, leur durée serait $2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$, et l'on aurait, à un instant quelconque,

$$x=0,\quad y=\mathrm{R}'\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{k}}-r'\right);$$

R' et r' étant aussi deux constantes arbitraires. Donc, les valeurs les plus générales de x et y seront les sommes de ces valeurs particulières, c'est-à-dire

$$x=\mathrm{R}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{h}}-r\right),\quad y=\mathrm{R}'\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{k}}-r'\right).$$

Pour déterminer les quatre constantes arbitraires R, R', r, r', supposons qu'on a, à l'origine du mouvement,

$$t=0,\quad x=p,\quad y=q,\quad \frac{dx}{dt}=p',\quad \frac{dy}{dt}=q';$$

il en résultera

$$\mathrm{R}\sin r=-p,\quad \mathrm{R}'\sin r'=-q,$$

$$\mathrm{R}\cos r=p'\sqrt{\frac{h}{g}},\quad \mathrm{R}'\cos r'=q'\sqrt{\frac{k}{g}};$$

par conséquent, en ayant égard aux valeurs de h et k, nous aurons, à un instant quelconque,

$$x=p\cos t\frac{\sqrt{gc}}{a}+\frac{p'a}{\sqrt{gc}}\sin t\frac{\sqrt{gc}}{a},$$

$$y=q\cos t\frac{\sqrt{gc}}{b}+\frac{q'b}{\sqrt{gc}}\sin t\frac{\sqrt{gc}}{b}.$$

Dans le cas de $a=b=c$, ces formules doivent coïncider avec celles du n° 207, en faisant, comme dans celles-ci,

$$x=a\theta\cos\psi,\quad y=a\theta\sin\psi.$$

En effet, elles deviennent alors

$$a\theta\cos\psi=p\cos t\sqrt{\frac{g}{a}}+p'\sqrt{\frac{a}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

$$a\theta\sin\psi=q\cos t\sqrt{\frac{g}{a}}+q'\sqrt{\frac{a}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

mais dans ce numéro on a supposé

$$\theta = a, \quad \psi = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad a\theta\frac{d\psi}{dt} = \mathfrak{c}\sqrt{ga};$$

quand $t = 0$; ce qui exige qu'on prenne

$$p = aa, \quad p' = 0, \quad q = 0, \quad q' = \mathfrak{c}\sqrt{ga};$$

il en résultera donc

$$\theta \cos\psi = a \cos t\sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \theta \sin\psi = \mathfrak{c} \sin t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

d'où l'on tire

$$\theta^2 = \frac{1}{2}(a^2 + \mathfrak{c}^2) + \frac{1}{2}(a^2 - \mathfrak{c}_2)\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

$$a \operatorname{tang}\psi = \mathfrak{c} \operatorname{tang} t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

comme dans le numéro cité.

551. Supposons généralement qu'on ait

$$u = U, \quad v = V, \quad w = W, \quad \text{etc.},$$

pour les valeurs des variables indépendantes à un instant quelconque, quand on a

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1, \quad \text{etc.},$$

$$\frac{du}{dt} = u_{,1}, \quad \frac{dv}{dt} = v_{,1}, \quad \frac{dw}{dt} = w_{,1}, \quad \text{etc.},$$

à l'origine du mouvement; supposons qu'on ait aussi, à un instant quelconque,

$$u = U', \quad v = V', \quad w = W', \quad \text{etc.},$$

lorsqu'on a

$$u = u_1', \quad v = v_1', \quad w = w_1', \quad \text{etc.},$$

$$\frac{du}{dt} = u_{,1}', \quad \frac{dv}{dt} = v_{,1}', \quad \frac{dw}{dt} = w_{,1}', \quad \text{etc.},$$

pour $t = 0$; et ainsi de suite. Je dis qu'on aura, au bout du temps t quelconque,

$$\left.\begin{aligned} u &= U + U' + U'' + \text{etc.}, \\ v &= V + V' + V'' + \text{etc.}, \\ w &= W + W' + W'' + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}\right\} (g)$$

lorsqu'on suppose, à l'origine du mouvement,

$$u = u_1 + u_1' + u_1'' + \text{etc.},$$
$$v = v_1 + v_1' + v_1'' + \text{etc.},$$
$$w = w_1 + w_1' + w_1'' + \text{etc.},$$
$$\text{etc.},$$

$$\frac{du}{dt} = u_{,1} + u_{,1}' + u_{,1}'' + \text{etc.},$$

$$\frac{dv}{dt} = v' + v_{,1}' + v_{,1}'' + \text{etc.},$$

$$\frac{dw}{dt} = w' + w_{,1}' + w_{,1}'' + \text{etc.},$$

etc.

En effet, d'après les premières suppositions qu'on a faites sur les valeurs initiales de u, v, w, etc., $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, etc., les formules (g) satisferont évidemment pour $t = 0$ à ces dernières équations; de plus, les valeurs particulières de u, v, w, etc., satisfaisant, par hypothèse, aux équations différentielles du mouvement, leurs sommes ou les formules (g) y satisferont aussi, puisque ces équations sont linéaires, et ne renferment pas de termes indépendans des inconnues u, v, w, etc., (n° 547); les formules (g) rempliront donc toutes les conditions de la question, et seront, par conséquent, les valeurs des inconnues à un instant quelconque.

552. Ce théorème général peut être appelé le *principe de la superposition des petits mouvemens*. On ne doit pas le confondre avec celui de la coexistence des petites oscillations : il est indépendant des lois particulières des petits mouvemens que l'on considère, et résulte seulement de ce que les déplacemens et les vitesses des mobiles sont traités comme des infiniment petits, puisqu'on néglige leurs produits et leurs puissances supérieures à la première.

En vertu de ce principe, les ondes sonores qui partent de différens points, se propagent et se superposent dans l'air sans se modifier; en sorte qu'à chaque instant le déplacement et la vitesse d'une molécule d'air, suivant une direction quelconque, sont les sommes des déplacemens et des vitesses qui répondraient à toutes ces ondes considérées isolément; ce qui nous permet d'entendre distinctement et sans confusion plusieurs sons à la fois, produits par différens corps sonores. Les sons simultanés peuvent aussi résulter de la coexistence des petites oscillations dans un même corps sonore. Ainsi, par exemple, lorsqu'une corde tendue exécute, en même temps, les oscillations isochrones qui répondent à sa longueur entière, et celles dont la durée correspond au tiers de cette longueur, le mouvement de l'air est le même que si deux cordes, dont les longueurs seraient entre elles comme un est à trois, exécutaient simultanément les vibrations les plus lentes dont elles sont susceptibles; et l'on entend, en même temps, le ton fondamental de la corde donnée, et un autre ton plus élevé, qui est la *quinte* de l'*octave* supérieure. C'est aussi pour cela que l'on entend distinctement les sons produits par les vibrations longitudinales et par les vibrations transversales, qui ont lieu à la fois

dans une même corde tendue, ou dans une même verge élastique.

D'après le même principe, les ondes produites en plusieurs points de la surface de l'eau, se propagent simultanément autour de ces centres différens, et peuvent se croiser en tous sens à cette surface, sans se modifier mutuellement; de manière qu'à un instant quelconque l'élévation de l'eau, en tel point qu'on voudra, est la somme des élévations positives ou négatives qui auraient lieu en vertu de toutes ces ondes considérées isolément.

L'explication qu'on donne du phénomène des *interférences*, dans la théorie des ondulations lumineuses, est aussi fondée sur le principe de la superposition des petits mouvemens, qui est, comme on voit, susceptible de nombreuses applications.

Pour le compléter, nous ajouterons que si des forces émanées de centres mobiles agissent sur les points du système, les seconds membres des équations (a) de leurs petits mouvemens (n° 546), seront des fonctions linéaires des composantes de ces forces données. Il en sera de même à l'égard des intégrales complètes de ces mêmes équations différentielles; d'où l'on conclut que les parties de u, v, w, etc., indépendantes de l'état initial du système, et, par suite, les parties semblables des coordonnées des mobiles, seront les sommes des valeurs qu'elles auraient si les forces données agissaient séparément. Ainsi, par exemple, dans le phénomène des marées, l'élévation totale de la mer en chaque point et à chaque instant est la somme des élévations, prises avec leurs signes, qui seraient causées par les actions isolées du soleil et de la lune; et c'est pour cela que, toutes choses égales d'ailleurs, les hautes mers sont les plus considérables dans les *sysygies*, et les moindres dans les *quadratures*.

§ III. *Principes de la conservation du mouvement du centre de gravité, et de la conservation des aires.*

553. Puisque le mouvement du centre de gravité d'un système entièrement libre est le même que si les masses de tous les mobiles y étaient réunies et que leurs forces motrices y fussent transportées parallèlement à leurs directions, il s'ensuit que les forces données dont les composantes parallèles à chaque coordonnée seront égales et contraires, n'entreront pas dans les équations différentielles de ce mouvement. Or, ce cas est celui des forces motrices provenant des actions mutuelles des points du système, en vertu de la loi générale de l'*action égale à la réaction*, qui s'observe toujours dans la nature, ainsi qu'on va l'expliquer.

Si un point matériel situé en M agit sur un autre point situé en M', et lui imprime ou tend à lui imprimer, dans un instant, une quantité de mouvement infiniment petite, que je représenterai par μ, on observe toujours :

1° Que cette action est dirigée suivant la droite menée du point M' vers le point M, ou suivant son prolongement au delà de M';

2° Qu'en même temps le point situé en M' réagit sur le point situé en M, suivant la droite qui va de M vers M', ou suivant son prolongement au delà de M.

3° Que cette réaction communique ou tend à communiquer au point situé en M une quantité de mouvement précisément égale à μ.

On dit qu'il y a attraction ou répulsion entre ces deux points matériels, selon que leur action mutuelle tend à augmenter ou à diminuer la distance MM'; s'ils sont entièrement libres, et que leurs masses soient représentées par m et m', les vitesses qu'ils prendront seront $\frac{\mu}{m}$ et $\frac{\mu}{m'}$, c'est-à-dire, en raison inverse de leurs masses, et les quantités dont ils se rapprocheront ou s'écarteront, pendant un temps infiniment petit, seront égales à ces vitesses multipliées par la moitié de ce temps (n° 114): d'ailleurs, la quantité μ pourra dépendre de la nature des corps auxquels m et m' appartiennent, ou en être indépendante et proportionnelle au produit mm' de ces masses (n° 241), comme dans le cas de l'attraction universelle.

La première des trois propositions qu'on vient d'énoncer peut être regardée comme évidente en elle-même; car des quantités de matière m et m', étant réduites à des dimensions infiniment petites, et placées à une distance finie l'une de l'autre, il n'y aurait aucune raison pour que l'action d'un de ces points sur l'autre s'exerçât d'un côté déterminé de la droite qui les joint, et autour de laquelle tout est semblable; mais les deux autres propositions ne peuvent être pour nous que les résultats de l'expérience, généralisés par induction et confirmés par toutes les conséquences qui s'en déduisent. En effet, nous ne pouvons regarder comme impossible, *à priori*, qu'un point matériel m agisse sur un autre m', sans que celui-ci réagisse sur le premier, en sens contraire et avec une égale intensité. Ainsi, nous admettrons le principe de la réaction égale et contraire à l'action comme une loi générale de la nature, qui nous est donnée par l'observation, de même que la loi de l'attraction universelle, en raison inverse du carré de la distance.

554. Cela posé, si tous les points matériels d'un système entièrement libre ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, ces forces motrices, transportées au centre de gravité du système, s'y détruiront deux à deux; le mouvement de ce centre sera donc rectiligne et uniforme, et conservera constamment sa vitesse et sa direction initiales; ce qui a fait donner à ce théorème le nom de *principe*

de la conservation du mouvement du centre de gravité.

Ce mouvement n'est pas altéré par le choc des corps, quel que soit leur degré d'élasticité (n° 542); et, en effet, le phénomène du choc est produit, comme nous l'avons déjà dit (n° 500), par les actions mutuelles des molécules du corps choquant et du corps choqué, qui s'exercent à des distances insensibles, mais de grandeur finie, et pour lesquelles la loi de la réaction, égale et contraire à l'action, ne peut manquer d'avoir lieu. Par la même raison, si un corps solide est en mouvement, et qu'il soit brisé par une explosion intérieure, la direction et la vitesse du centre de gravité de toutes ses parties, après cette explosion, seront les mêmes que la direction et la vitesse du centre de gravité qui avaient lieu auparavant. En général, les changemens brusques de vitesse qui accompagnent les chocs ou les explosions, sont les effets des actions mutuelles des molécules; ces forces varient dans de très grands rapports, quand les molécules se rapprochent ou s'éloignent les unes des autres; et, par suite, elles font varier de même les vitesses des corps pendant de très courts intervalles de temps.

Le principe dont il s'agit est indépendant de la liaison des points du système, pourvu qu'aucun d'eux ne soit lié à d'autres points étrangers au système que l'on considère, et ne soit pas assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe fixe ou mobile. Des conditions de cette espèce, s'il en existait, donneraient naissance à des forces qu'il faudrait transporter au centre de gravité, et qui pourraient faire varier sa vitesse. Il en sera de même, lorsqu'il y aura des forces appliquées aux points du système qui ne proviendront pas de leurs actions mutuelles; et, dans ce cas, les actions mutuelles pourront influer indirectement sur le mouvement du centre de gravité, en diminuant ou augmentant les distances des points du système aux points fixes ou mobiles d'où émanent les forces étrangères, et changeant, par conséquent, leurs intensités.

L'inertie d'un point matériel consiste en ce qu'il ne peut se mettre de lui-même en mouvement, ni modifier aucunement le mouvement qu'il a reçu, sans le secours de forces émanant d'autres points; l'inertie d'un système de corps consiste, de même, en ce que l'action mutuelle de ses parties ne peut produire ni modifier le mouvement de son centre de gravité, sans le secours de points d'appui ou de forces étrangères. Ainsi, le mouvement du centre de gravité du soleil, des planètes, des satellites et des comètes, doit être rectiligne et uniforme dans l'espace, abstraction faite de l'action exercée par les étoiles sur tous ces corps, et de la résistance du milieu, si elle existe.

La manière dont les différentes parties d'un muscle agissent l'une sur l'autre, pour produire ses mouvemens, nous est inconnue; nous ignorerons peut-être toujours par quel moyen la volonté met ces parties de nature diverse dans la disposition respective nécessaire pour qu'elles exercent actuellement leurs attractions ou répulsions mutuelles : quoi qu'il en soit, nous ne pouvons pas douter que ces actions ne soient soumises à la loi de réciprocité, comme toutes les autres forces naturelles; d'où il résulte qu'un animal, de quelque manière qu'il s'y prenne, ne peut jamais déplacer son centre de gravité par sa seule volonté, et sans le secours d'un point d'appui extérieur. L'homme et les animaux peuvent élever ou abaisser verticalement leur centre de gravité, en s'appuyant sur la terre; ils peuvent aussi s'avancer horizontalement, à l'aide du frottement contre sa surface; mais la locomotion leur serait impossible sur un plan parfaitement poli, où cette résistance serait tout-à-fait insensible. Dans le vol des oiseaux, c'est le centre de gravité de l'animal et de toute la masse d'air qu'il met en mouvement, qui demeure constamment en repos; et, dans le vide, il ne pourrait parvenir à déplacer son propre centre de gravité, quelle que fût la rapidité du mouvement de ses ailes.

Il n'y a pas de doute, non plus, que les fluides impondérables ne soient soumis à la loi de réaction égale et contraire à l'action, et que le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, qui en est la conséquence, ne doive aussi s'observer dans leurs mouvemens, comme dans celui de toutes les autres substances, dont ils ne diffèrent que par leur extrême ténuité. Ainsi, lorsque l'électricité, la chaleur, la lumière, s'échappent d'un mobile par un seul côté, ce corps doit reculer en sens contraire, afin que le centre de gravité du système entier demeure en repos; mais la quantité de mouvement qu'il prendra ne sera sensible, qu'autant que celle du fluide impondérable le sera également, malgré la petitesse de sa masse, et à raison de la grandeur de sa vitesse. C'est ce qui ne peut être décidé que par des expériences très délicates.

555. Non seulement les forces provenant de l'action mutuelle des points m, m', m'', etc., d'un système entièrement libre, n'entrent pas dans les équations (7) de leur mouvement de translation, mais elles disparaissent aussi des équations (9) de son mouvement de rotation autour de l'origine des coordonnées (n°s 539 et 540),

En effet, soit F la force provenant de l'action mutuelle de m et m', qui est la même pour ces deux points matériels, et dirigée, si on la suppose attractive, de m vers m' pour le point m, et de m' vers m pour le point m'. En appelant ρ la distance de ces deux points, les cosinus des angles que fait la droite mm', avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point m, seront

$$\frac{x'-x}{\rho},\quad \frac{y'-y}{\rho},\quad \frac{z'-z}{\rho};$$

relativement à la force F, on aura donc

$$mX = \frac{(x'-x)F}{r}, \quad mY = \frac{(y'-y)F}{r}, \quad mZ = \frac{(z'-z)F}{r},$$

pour les composantes de la force motrice du point m; et l'on trouvera de même

$$m'X' = \frac{(x-x')F}{r}, \quad m'Y' = \frac{(y-y')F}{r}, \quad m'Z' = \frac{(z-z')F}{r},$$

pour les composantes de la force motrice de m', provenant de cette force F. Or, d'après ces valeurs, nous aurons

$$\begin{aligned} m(zY - yX) + m'(z'Y' - y'X') &= 0, \\ m(zX - xZ) + m'(z'X' - x'Z') &= 0, \\ m(yZ - zY) + m'(y'Z' - z'Y') &= 0; \end{aligned}$$

par conséquent, les termes provenant de l'action mutuelle des points du système, se détruisent deux à deux dans les seconds membres des équations (9) du n° 540.

Si donc il n'y a pas d'autres forces motrices qui agissent sur les points m, m', m'', etc., le mouvement de rotation du système autour de l'origine des coordonnées, sera uniquement dû aux vitesses initiales qui ont été imprimées à ces points; en sorte que sans le secours de forces étrangères ou de points d'appui pris au dehors, c'est-à-dire, par la seule action mutuelle de ses parties, un système quelconque de corps ne peut produire aucun mouvement de translation ou de rotation commun à tous ses points, ni modifier, en aucune manière, celui qu'il a reçu primitivement.

556. Les seconds membres des équations (9) seront encore zéro, lorsque les points du système, indépendamment de leurs actions mutuelles, seront aussi sollicités par des forces dirigées vers l'origine des coordonnées; car pour une semblable force, appliquée au point m, les composantes mX, mY, mZ, sont entre elles comme les coordonnées x, y, z, de ce point; on a donc

$$zY = yX, \quad zX = xZ, \quad yZ = zY;$$

et le terme qui en provient disparaît de chacune des équations (9).

Ainsi, dans tout système entièrement libre, ou qui ne renferme qu'un seul point fixe, et dont les points m, m', m'', etc., sont soumis à leurs actions mutuelles et à des forces dirigées vers ce point fixe, en le prenant pour origine des coordonnées, on aura

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= 0, \\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= 0, \\ \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} (a)$$

S'il n'y a aucun point fixe dans le système, et que les mobiles soient uniquement soumis à leurs actions mutuelles, on pourra prendre tel point qu'on voudra pour origine des coordonnées; et comme dans ce même cas, les équations (7) du n° 539, se réduiront à

$$\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad (b),$$

il s'ensuit qu'on pourra aussi prendre pour cette origine, un point qui ait un mouvement rectiligne et uniforme dans l'espace.

En effet, en désignant par α, β, γ, les coordonnées de ce point mobile, on aura

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0;$$

pour y transporter l'origine des coordonnées, il faudra faire

$$x = \alpha + x_{,}, \quad y = \beta + y_{,}, \quad z = \gamma + z_{,},$$

relativement au point quelconque m; or, en substituant ces valeurs, dans la première équation (a), on peut la mettre sous la forme

$$\Sigma m\left(z_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2} - y_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}\right) + \frac{d^2\beta}{dt^2}\Sigma mz_{,} - \frac{d^2\alpha}{dt^2}\Sigma my_{,}$$
$$+ \alpha\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} - \beta\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$

au moyen des équations précédentes, elle se réduira donc à

$$\Sigma m\left(z_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2} - y_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}\right) = 0;$$

et l'on trouvera de même que les deux autres équations (a) ne changent pas de forme, et deviennent

$$\Sigma m\left(z_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2} - x_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\Sigma m\left(y_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2} - z_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}\right) = 0,$$

quand on transporte l'origine des coordonnées au point dont le mouvement est rectiligne et uniforme.

Dans le cas dont il s'agit, le mouvement du centre de gravité du système étant rectiligne et uniforme (n° 554), il en résulte que les équations (*a*) devront subsister en prenant ce centre pour origine des coordonnées.

557. En multipliant les équations (*a*) par dt, et observant qu'on a

$$z\frac{d^2y}{dt}-y\frac{d^2z}{dt}=d\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right),$$

$$z\frac{d^2x}{dt}-x\frac{d^2z}{dt}=d\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right),$$

$$y\frac{d^2z}{dt}-z\frac{d^2y}{dt}=d\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),$$

intégrant et désignant par c, c', c'', les constantes arbitraires, il vient

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)&=c,\\ \Sigma m\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right)&=c',\\ \Sigma m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)&=c'';\end{aligned}\right\}\quad(c)$$

équations qui montrent que dans le mouvement d'un système entièrement libre, où les mobiles ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, ou à des forces dirigées vers un centre fixe, les momens des quantités de mouvement de tous les points du système, par rapport à trois axes rectangulaires qui se coupent en ce point, et par conséquent, par rapport à toute autre droite menée par ce même point, sont des quantités constantes. Ces momens ne changeront pas de valeur, dans le choc des corps du système, ou dans l'explosion d'un ou de plusieurs d'entre eux, puisque les forces qui produisent ces phénomènes, sont des actions mutuelles de leurs molécules; ce qui s'accorde avec le résultat du n° 542.

S'il n'y a pas de forces dirigées vers un point fixe, il résulte du numéro précédent, que ce théorème aura encore lieu, par rapport à un axe quelconque qui se meut parallèlement à lui-même, en passant constamment par le centre de gravité du système, ou, plus généralement, par un point dont le mouvement est rectiligne et uniforme. Dans ce même cas, on conclut des équations (*b*), que les sommes des quantités de mouvement de tous les points du système, suivant trois directions rectangulaires, et conséquemment suivant une direction quelconque, sont également des quantités constantes; théorème qu'on peut aussi regarder comme renfermé dans celui qui répond aux momens de ces forces, en éloignant à l'infini le centre des momens et l'origine des coordonnées.

558. Les valeurs des constantes c, c', c'', dépendront de la direction des axes rectangulaires, qu'on prendra pour ceux des coordonnées; mais si l'on fait

$$c^2+c'^2+c''^2=\gamma^2,$$

la quantité γ sera non seulement indépendante de t, mais aussi de cette direction; car elle exprime le moment principal d'un système de forces (n° 281), dont la valeur ne peut pas dépendre de la direction arbitraire des droites suivant lesquelles ces forces sont décomposées. Lorsqu'il n'existe pas de point fixe dans le système, on trouvera donc une même valeur de γ, en la calculant à deux époques différentes du mouvement, et prenant le centre de gravité pour origine des coordonnées, quelle que soit d'ailleurs leur direction, différente ou la même, à ces deux époques. Dans ces calculs, on n'emploiera que des positions et des vitesses relatives des mobiles aux époques données, savoir, les perpendiculaires x, y, z, abaissées de chaque point m sur trois plans rectangulaires, menés arbitrairement par le centre de gravité, et les excès $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, des composantes de la vitesse de m, parallèles à leurs intersections, sur les composantes de la vitesse du centre de gravité suivant les mêmes directions. Lors même qu'il serait survenu entre les deux époques pour lesquelles on aura ainsi calculé la valeur de γ, un ou plusieurs chocs ou explosions des corps du système, cette valeur ne serait pas changée, pourvu que, dans le cas d'une explosion, on comprît dans le calcul de la seconde époque toutes les parties du corps brisé. Si donc on la trouvait différente à la seconde époque de ce qu'elle était à la première, on en pourrait conclure que des forces étrangères ont agi, dans l'intervalle, sur les mobiles, ou bien qu'ils ont choqué d'autres corps qui ne font pas partie du système.

Si l'on appelle α, α', α'', les angles que fait l'axe du moment principal avec les axes des z, y, x, dont l'origine est au centre de gravité, on aura (n° 281)

$$\cos\alpha=\frac{c}{\gamma},\quad \cos\alpha'=\frac{c'}{\gamma},\quad \cos\alpha''=\frac{c''}{\gamma};$$

en supposant donc que ces axes soient constamment parallèles à eux-mêmes, les quantités c, c', c'', ne changeront pas, et la direction de l'axe du moment principal sera aussi invariable, comme la grandeur du moment qui s'y rapporte. La même chose a lieu par rapport à un point fixe, lorsqu'il y en a un dans le système, et qu'on le prend pour origine des coordonnées; ce qu'on a déjà vu dans le n° 416, relativement à un corps solide.

559. Il est important d'observer que les termes provenant de l'action mutuelle du système dispa-

raissent dans les seconds membres des équations (9) du n° 540, lors même que l'intensité de cette action varie avec le temps, indépendamment de la distance, c'est-à-dire, lorsque les composantes de cette force renferment le temps t explicitement. Les équations (o), et, par conséquent, l'invariabilité du moment principal et de la direction de son axe, ont donc encore lieu dans ce cas, qui se présente, par exemple, quand les points du système perdent, sous forme rayonnante, une partie de leur chaleur propre; ce qui diminue, à distance égale, l'intensité de leur action mutuelle.

Ainsi, en faisant abstraction de l'action du soleil et de la lune sur la masse de la terre, et supposant que notre planète, autrefois à l'état gazeux, s'est solidifiée par le refroidissement, sans perdre aucune partie de sa matière pondérable, on peut assurer que, dans cette transformation, le moment principal des quantités de mouvement de tous ses points n'a pas changé de grandeur, ni son axe de direction. Cette droite est devenue l'axe de figure de la terre, autour duquel elle tourne maintenant; et, dans ce mouvement, il est aisé de voir (n° 386) que l'on a

$$\gamma = \omega \mathbf{M} k^2,$$

pour la valeur du moment principal; ω étant la vitesse angulaire de rotation, $\mathbf{M}$ la masse, et $\mathbf{M}k^2$ le moment d'inertie par rapport à l'axe de figure. Si le refroidissement et la rotation de la terre continuent encore actuellement, et que son rayon diminue en conséquence, la valeur de k diminuera dans le même rapport; à cause que la quantité γ est constante, la valeur de ω augmentera donc en raison inverse du carré de k, et la durée du jour décroîtra proportionnellement au carré du rayon. Une diminution, due à cette cause, d'un dix-millionième sur la durée du jour, supposerait un décroissement d'un vingt-millionième sur la longueur du rayon; et comme on est certain que le jour n'a pas éprouvé cette diminution depuis 2500 ans (n° 443), il en résulte que le rayon moyen de la terre n'a pas varié d'un vingt-millionième, ou d'à peu près 3 mètres, dans ce long intervalle de temps, par l'effet du refroidissement, si la température moyenne de la terre n'est pas encore parvenue à un état permanent.

Les tremblemens de terre, les explosions volcaniques, le souffle des vents contre les côtes, les frottemens et les pressions de la mer sur la partie solide du sphéroïde terrestre, répondant à des actions mutuelles des parties du système, il n'en peut résulter aucune variation de la quantité γ; et les déplacemens de ces parties qui ont lieu dans toutes ces circonstances, n'étant pas assez considérables pour produire des changemens sensibles dans la valeur de k, ces causes diverses ne produiront aucune altération appréciable dans la rapidité de la vitesse ω, ni dans la durée du jour.

560. Les théorèmes qui se déduisent des équations (o) peuvent encore s'énoncer d'une autre manière.

Observons, pour cela, que la formule $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ est l'aire décrite pendant l'instant dt, ou la différentielle de l'aire décrite pendant le temps t, par le rayon vecteur de la projection du point m sur le plan des x et y, en allant de l'axe des x positives vers l'axe des y positives (n° 154). La formule $\frac{1}{2}(zdx - xdz)$ est de même la différentielle de l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection du même point m, sur le plan des z et x, en allant de l'axe des z vers l'axe des x; et $\frac{1}{2}(ydz - zdy)$ exprime la différentielle de l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection de ce point sur le plan des y et z, en allant de l'axe des y vers l'axe des z.

Cela posé, considérons les aires comme des quantités positives ou négatives, selon qu'elles sont décrites sur chaque plan, dans le sens qu'on vient d'indiquer, ou dans le sens opposé. Soit $\frac{1}{2}\lambda$ la somme des aires décrites, pendant le temps t, par les rayons vecteurs des projections de tous les points du système, et multipliées respectivement par leurs masses m, m', m'', m''', etc. Appelons $\frac{1}{2}\lambda'$ la somme des aires décrites sur le plan des z et x, pendant le même temps, par les rayons vecteurs des projections de ces points matériels, et multipliée aussi par leurs masses. Soit enfin $\frac{1}{2}\lambda''$ la somme des aires décrites sur le plan des y et z, pendant ce temps t, par les rayons vecteurs des projections de ces mêmes points, multipliées de même par leurs masses. Ces trois sommes seront des fonctions de t, dont les valeurs s'évanouiront avec cette variable, et qui auront pour différentielles

$$\frac{1}{2}\,d\lambda = \frac{1}{2}\,\Sigma m\,(xdy - ydx),$$

$$\frac{1}{2}\,d\lambda' = \frac{1}{2}\,\Sigma m\,(zdx - xdz),$$

$$\frac{1}{2}\,d\lambda'' = \frac{1}{2}\,\Sigma m\,(ydz - zdy),$$

En vertu des équations (c), on aura donc

$$d\lambda = cdt, \quad d\lambda' = c'dt, \quad d\lambda'' = c''dt;$$

et, en intégrant, on en déduit

$$\lambda = ct, \quad \lambda' = c't, \quad \lambda'' = c''t.$$

Donc, dans le mouvement d'un système entièrement libre, dont les points ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, les sommes des aires représentées par $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda'$, $\frac{1}{2}\lambda''$, sont proportionnelles au temps employé à les décrire, et les sommes des airés décrites pendant l'unité de temps, conservent leurs valeurs initiales pendant toute la durée du mouvement; le centre des aires étant un

point fixe, le centre de gravité du système, ou tout autre point dont le mouvement est rectiligne et uniforme.

C'est en cela que consiste le *principe de la conservation des aires*. Il a encore lieu lorsqu'il existe dans le système un point fixe vers lequel sont dirigées des forces agissant sur un ou plusieurs des mobiles, pourvu que l'on prenne alors ce point fixe pour centre des aires; ce qui comprend le théorème du n° 154, relatif à un point matériel isolé.

Nous ferons remarquer que, quand les points m, m', m'', etc., tournent dans un même sens autour du centre des aires, comme les centres des planètes autour du soleil, il en sera de même à l'égard de leurs projections sur les plans des coordonnées; de sorte que tous les termes des sommes $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda'$, $\frac{1}{2}\lambda''$, auront le même signe : ils auront au contraire, des signes différens, et ces sommes pourront être des quantités positives ou négatives, lorsqu'une partie des mobiles tournera dans un sens, et l'autre partie dans le sens opposé, comme dans le mouvement des comètes autour du soleil.

561. Maintenant, soient O (fig. 116), le centre des aires, fixe ou mobile; Ox, Oy, Oz, les directions des axes rectangulaires des coordonnées; M et M_1 les positions du point quelconque m au bout des temps t et $t+dt$; P et P_1 les projections de M et M_1 sur le plan des x et y. Le triangle MOM_1 sera l'aire plane décrite, pendant l'instant dt, par le rayon vecteur de m, et il aura pour projection sur le plan des x et y, le triangle POP_1, ou l'aire décrite pendant cet instant, par le rayon vecteur de la projection de m sur ce plan. Les projections de MOM_1 sur les deux autres plans des coordonnées, seront aussi les aires décrites par les rayons vecteurs des projections de m sur ces plans. Il en sera de même pour les aires décrites dans l'espace, pendant toutes les parties infiniment petites du temps t, par les rayons vecteurs de tous les points du système, et multipliées par leurs masses, ou, autrement dit, pour toutes ces aires augmentées dans le rapport des masses m, m', m'', etc., à l'unité. Par conséquent, les quantités $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda'$, $\frac{1}{2}\lambda''$, qu'on vient de considérer, seront les sommes des projections de ces aires infiniment petites, sur les trois plans des coordonnées; et l'on pourra appliquer à ce système d'aires planes et à leurs projections, les théorèmes des n°s 276 et suivans.

Ainsi, parmi tous les plans qu'on peut faire passer par le point O, il y en a un sur lequel la somme des projections des aires planes, prises avec les signes qui résultent du sens du mouvement pour chacune d'elles, est un *maximum*. Si l'on désigne par μ la valeur de cette aire *maxima*, on aura

$$\mu^2 = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2;$$

et, si OH est la perpendiculaire à son plan, et qu'on fasse

$$zOH = \mathcal{C}, \quad yOH = \mathcal{C}', \quad xOH = \mathcal{C}'',$$

on aura aussi

$$\cos\mathcal{C} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \cos\mathcal{C}' = \frac{\lambda'}{\mu}, \quad \cos\mathcal{C}'' = \frac{\lambda''}{\mu}.$$

Or, d'après les valeurs de λ, λ', λ'', ces formules sont la même chose que

$$\cos\mathcal{C} = \frac{c}{\gamma}, \quad \cos\mathcal{C}' = \frac{c'}{\gamma}, \quad \cos\mathcal{C}'' = \frac{c''}{\gamma}; \quad (d)$$

c, c', c'', γ, étant les mêmes constantes que précédemment. Il en résulte donc que la direction du plan de l'aire *maxima* demeurera constante pendant toute la durée du mouvement, et que la normale à ce plan menée par le centre des aires coïncidera toujours avec l'axe du moment principal des quantités de mouvement de tous les points du système.

On conclut de là que dans le mouvement de tout système entièrement libre, dont les points matériels ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, il existe un plan, passant par le centre de gravité, qui demeure constamment parallèle à lui-même, et dont on peut, à chaque instant, déterminer la direction, au moyen des masses de tout ces points, de leurs coordonnées rapportées au centre de gravité comme origine, et des excès des composantes de leurs vitesses sur celles de la vitesse de ce centre.

Ce théorème est dû à Laplace, qui a donné au plan dont il s'agit la dénomination de *plan invariable*, et qui a proposé d'en faire usage, en Astronomie, pour rapporter à sa direction constante les directions variables (n° 244) des plans des orbites planétaires.

562. C'est au plan de l'orbite de la terre, et à une droite menée, dans ce plan, par le centre du soleil et parallèlement à la ligne des équinoxes, que les astronomes rapportent les positions des astres et les directions des plans dans lesquels ils se meuvent. L'écliptique vraie et la ligne des équinoxes étant en mouvement dans l'espace, on détermine leurs positions, à un instant donné, en les comparant à celles des étoiles; mais on peut craindre que les mouvemens propres des étoiles, qui sont inconnus pour la plupart, ne nous induisent en erreur sur les déplacemens absolus de l'orbite de la terre, après plusieurs siècles; et, pour prévenir cet embarras, il est bon de pouvoir assigner sa direction vraie à un instant quelconque.

Supposons donc que le plan des x et y soit le plan de l'écliptique à un instant donné, ou, plus exactement, un plan parallèle à celui de cette écliptique et mené par le centre de gravité O du système solaire. Par le point O (fig. 117), menons arbitrairement dans ce plan les axes Ox et Oy; et d'après les coordonnées et les vitesses actuelles de tous les points du système solaire, rapportées aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et les masses de ces points, supposons aussi qu'on ait calculé les valeurs des quantités c, c', c''. Si OH est la perpendiculaire au

plan invariable de ce système, et EOE' l'intersection de ce plan avec celui des x et y, les équations (d) donneront

$$\cos HOz = \frac{c}{\gamma}, \quad \text{tang } EOx = \frac{c'}{c''}, \quad (e)$$

ce qui fait connaître la direction du plan invariable par rapport à celui des x et y. Mais pour en conclure, réciproquement, la direction absolue du plan de l'écliptique, parallèle à celui des x et y, il faut encore qu'il existe, sur le plan invariable, une droite qui demeure constamment parallèle à elle-même, et dont la direction soit connue à chaque instant. OK étant cette droite, on connaîtra l'angle KOx à l'époque que l'on considère; de cet angle, joint à HOz et EOx, on déduira l'angle EOK; et les deux angles HOz et EOK détermineront complètement la direction absolue du plan de l'écliptique.

Or, l'existence du plan invariable, dans le système solaire, suppose, implicitement, que l'on fait abstraction de l'action des étoiles sur le soleil et sur les planètes, et que toutes les parties du système sont soumises uniquement à leurs actions mutuelles. Mais, dans ce cas, le mouvement du centre de gravité O est rectiligne et uniforme; par conséquent, à moins que la direction de ce mouvement ne soit exactement perpendiculaire au plan invariable, on aura une droite OK, toujours parallèle à elle-même, en projetant sur ce plan la droite que décrit le point O dans l'espace. On ne voit pas une autre ligne qu'on puisse prendre pour la droite OK; mais pour faire usage de celle que nous indiquons, il faut qu'on ait préalablement déterminé, par l'observation, la direction du mouvement du centre de gravité de notre univers, que nous ne connaissons encore que très imparfaitement.

En comparant les valeurs des angles HOz et EOK, déterminées à deux époques différentes, on connaîtra les déplacemens réels de l'écliptique qui ont eu lieu dans l'intervalle, et que le seul angle HOz, inclinaison du plan mobile sur le plan invariable, ne suffirait pas pour déterminer complètement. Toutefois, si les quantités c' et c'' sont très petites par rapport à c, l'angle HOz sera aussi très petit, et de très petites différences dans les valeurs de c' et c'' en produiront de très grandes dans les valeurs de EOx, et, par suite, de l'angle EOK; en sorte qu'il paraîtrait, dans ce cas, que l'intersection OE de l'écliptique et du plan invariable aurait éprouvé un déplacement très considérable sur ce plan. Mais, en général, ce déplacement ne serait pas réel; car les petites différences des valeurs de c' et c'' proviendront, en grande partie, des erreurs inévitables dans les observations qui servent à déterminer ces valeurs, et des quantités qu'on est obligé de négliger en les calculant.

Au reste, quand l'angle HOz est très petit, c'est-à-dire, quand l'écliptique est très peu inclinée sur le plan invariable, l'angle EOK, qu'on peut alors très difficilement déterminer, n'a que très peu d'influence sur la direction vraie du plan de l'orbite de la terre.

563. Le nombre et les masses des comètes nous étant inconnus, on sera obligé de négliger les termes qui leur correspondent dans les valeurs de c, c', c'', relatives au système solaire; mais les valeurs de c, c', c'', données par les formules (c) seront très peu altérées par cette omission, vu la petitesse de ces masses, et parce que les termes de ces formules, qui correspondent aux comètes, se détruisent, en grande partie, par l'opposition des signes (n° 560).

On calculera de la manière suivante les parties de c, c', c'', qui répondent aux soleil, aux planètes et aux satellites.

Soient M la masse d'un de ces corps, et dm l'élément de cette masse, dont x, y, z, sont les coordonnées rapportées aux axes Ox, Oy, Oz. Appelons x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité de M, par rapport aux mêmes axes, et $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées de dm, rapportées à des parallèles à ces axes, menées par ce centre de gravité; de sorte qu'on ait, à un instant quelconque,

$$x = x_1 + x_{,}, \quad y = y_1 + y_{,}, \quad z = z_1 + z_{,},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_{,}}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_{,}}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_{,}}{dt}.$$

L'origine des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, étant au centre de gravité de M, on a

$$\int x_{,} dm = 0, \quad \int y_{,} dm = 0, \quad \int z_{,} dm = 0,$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dx_{,}}{dt} dm = 0, \quad \int \frac{dy_{,}}{dt} dm = 0, \quad \int \frac{dz_{,}}{dt} dm = 0;$$

les intégrales s'étendant à la masse entière. D'après cela, si l'on substitue les valeurs de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, dans la première équation (c), et qu'on y change m et Σ en dm et $\int$, on trouve

$$c = M\left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt}\right) + \int \left(x_{,} \frac{dy_{,}}{dt} - y_{,} \frac{dx_{,}}{dt}\right) dm;$$

ce qui montre que le moment des quantités de mouvement de M, par rapport à l'axe Oz, se compose de deux parties : la première ne dépend que du mouvement du centre de gravité de M, et est la même que si cette masse était concentrée en ce point; la seconde est indépendante de ce mouve-

ment, et la même que si le centre de gravité de M était en repos, et que l'axe Oz fût transporté en ce point, parallèlement à lui-même. Le même résultat s'applique aux quantités c' et c'', et a encore lieu par rapport à un axe quelconque.

Maintenant, soient A, B, C, les momens d'inertie de M, par rapport à ses trois axes principaux qui se coupent à son centre de gravité; p, q, r, les composantes de sa vitesse angulaire de rotation, relatives aux mêmes axes; λ, μ, ν, les angles que font leurs directions avec une parallèle à l'axe Oz, menée par leur point d'intersection; d'après ce qu'on a vu dans le n° 409, nous aurons

$$\int\left(z_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dz_1}{dt}\right)dm = Ap\cos\lambda + Bq\cos\mu + Cr\cos\nu,$$

pour le moment, par rapport à cette parallèle, des quantités de mouvement de tous les points de M, provenant de sa rotation autour de son centre de gravité. Il s'en suit que la valeur complète de c sera

$$c = \Sigma M\left(z_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dz_1}{dt}\right)+\Sigma(Ap\cos\lambda+Bq\cos\mu+Cr\cos\nu);\quad (f)$$

les deux sommes Σ s'étendant au soleil, à toutes les planètes et à leurs satellites, et se composant par conséquent de 30 termes. Or, les rapports de A, B, C, à M, dépendant de la constitution intérieure de ce corps M, ils nous seront, sans doute, toujours inconnus : nous savons seulement que ces trois rapports diffèrent peu l'un de l'autre, à cause de la forme à peu près sphérique des corps célestes; et qu'ils sont moindres que si ces corps étaient homogènes, parce que les densités des couches concentriques vont en décroissant du centre à la surface de M. Il serait donc impossible de calculer la valeur de c, et de même les valeurs de c' et c'', si l'on devait avoir égard à la partie de chacune de ces quantités, qui provient de la rotation des corps célestes. Mais quelles que soient la forme de M et sa constitution intérieure, la partie de $Ap\cos\lambda + Bq\cos\mu + Cr\cos\nu$, qui est due à l'état initial de ce corps solide, demeure constante pendant toute la durée de son mouvement (n° 416); en sorte que cette quantité ne peut varier, pour chaque corps céleste, qu'à raison des attractions des autres corps, en tant que leur résultante ne passe pas exactement par le centre de gravité de M, c'est-à-dire, en tant qu'elles s'exercent sur la partie non sphérique de M. Il en résulte que pour chaque corps céleste, la partie variable du second terme de la formule (f) est très petite, et peut être négligée par rapport à la partie du premier terme, relative au même corps. Ainsi, par exemple, en désignant par k le rayon du globe terrestre, par ω la vitesse angulaire de son mouvement de rotation, qui a lieu autour de son axe de figure, et par δ l'angle que fait cet axe avec la parallèle à l'axe Oz, le second terme de la formule (f), qui répond à la terre, sera moindre que $\frac{2Mk^2}{5}\omega\cos\delta$, qui en serait la valeur, si la terre était homogène; soient aussi ρ et θ le rayon moyen de l'orbite de la terre et sa vitesse moyenne dans son mouvement annuel; le premier terme de la formule (f) relatif à la terre, aura par conséquent $M\rho^2\theta$ pour valeur; or, si l'axe Oz est perpendiculaire au plan de cette orbite, auquel cas δ représentera l'obliquité de l'écliptique, on verra qu'une variation de cinq degrés dans la grandeur de cet angle, ne produirait pas une variation dans la valeur de $\frac{2Mk^2}{5}\omega\cos\delta$, qui soit un cent-millionième de la quantité $M\rho^2\theta$. On s'en assurera, en observant que le rapport de ω à θ excède à peine 366, que celui de ρ à k est environ 24000, et l'angle δ, à peu près 23° 28'. Il en sera de même à l'égard de toutes les autres planètes. Par rapport au soleil, il y a lieu de croire que la partie variable du second terme de la formule (f) qui lui correspond, est tout-à-fait insensible, à cause de sa forme sphérique qui résulte des observations, et que l'on peut aussi supposer à ses couches intérieures, à raison de la petitesse de la force centrifuge comparée à la pesanteur, dans les différens points de ce corps (n° 250); d'où l'on conclut que la résultante des attractions des planètes doit passer constamment par son centre de gravité, et ne produire aucune perturbation dans son mouvement de rotation autour de ce point.

D'après ces considérations, si l'on fait passer dans le premier membre de l'équation (f), le second terme de son second membre, on pourra comprendre dans la constante c, la partie invariable de ce second terme, prise avec un signe contraire; et en négligeant seulement sa partie variable, et opérant de même sur les équations qui donnent les valeurs de c' et c'', on aura, avec une approximation bien supérieure à celles des observations,

$$\left.\begin{aligned} c &= \Sigma M\left(z_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dz_1}{dt}\right),\\ c' &= \Sigma M\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right),\\ c'' &= \Sigma M\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right).\end{aligned}\right\}\ (g)$$

564. Les coordonnées x_1, y_1, z_1, qui entrent dans ces formules, ont leur origine au centre de gravité du système solaire; pour plus de commo-

dité, il est bon de la transporter au centre de gravité du soleil.

Pour cela, soient g, h, k, les coordonnées de ce point rapportées aux mêmes axes que x_1, y_1, z_1; appelons x, y, z, les coordonnées du centre de gravité de M, rapportées à des axes parallèles, passant par le centre de gravité du soleil; nous aurons

$$x_1 = x - g, \quad y_1 = y - h, \quad z_1 = z - k;$$

en substituant ces valeurs dans la première équation (g), elle deviendra donc

$$c = \Sigma M\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \Sigma M\left(g\frac{dh}{dt} - h\frac{dg}{dt}\right)$$
$$- g\,\Sigma M\frac{dy}{dt} + h\Sigma M\frac{dx}{dt} + \frac{dg}{dt}\Sigma My - \frac{dh}{dt}\Sigma Mx;$$

et l'on transformera de même les expressions de c' et c''. D'ailleurs, l'origine des coordonnées x_1, y_1, z_1, étant au centre de gravité du système, on en conclut

$$g\Sigma M = \Sigma Mx, \quad h\Sigma M = \Sigma My, \quad k\Sigma M = \Sigma Mz,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dg}{dt}\Sigma M = \Sigma M\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dh}{dt}\Sigma M = \Sigma M\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dk}{dt}\Sigma M = \Sigma M\frac{dz}{dt}.$$

Au moyen de ces équations, j'élimine g, h, k, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dk}{dt}$, des expressions de c, c', c'', qui deviennent finalement

$$\left.\begin{aligned}
c &= \Sigma M\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\Sigma M}\left(\Sigma Mx\,.\,\Sigma M\frac{dy}{dt} - \Sigma My\,.\,\Sigma M\frac{dx}{dt}\right), \\
c' &= \Sigma M\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\Sigma M}\left(\Sigma Mz\,.\,\Sigma M\frac{dx}{dt} - \Sigma Mx\,.\,\Sigma M\frac{dz}{dt}\right), \\
c'' &= \Sigma M\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\Sigma M}\left(\Sigma My\,.\,\Sigma M\frac{dz}{dt} - \Sigma Mz\,.\,\Sigma M\frac{dy}{dt}\right).
\end{aligned}\right\}(h)$$

Les coordonnées x, y, z, du centre de gravité de chaque planète ou satellite, et les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, de sa vitesse, pourront être regardées comme des données de l'observation aux différentes époques pour lesquelles on voudra calculer les valeurs de c, c', c'', et, par suite, les angles HOx et EOx relatifs à la direction du plan invariable, au moyen des équations (e). L'origine des coordonnées étant actuellement le centre du soleil, les sommes Σ qui s'y rapportent, ne contiendront pas la masse du soleil, laquelle se trouvera seulement dans ΣM, et rendra conséquemment très petit le second terme de chacune des formules (h) par rapport au premier.

§ IV. *Principes des forces vives et de la moindre action.*

565. Lorsque les équations (2) du n° 532 ne renfermeront pas le temps explicitement, on satisfera aux équations (3) du même numéro, en prenant pour δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., les différentielles dx, dy, dz, dx', etc., relatives à cette variable; car alors ces dernières équations deviendront les différentielles complètes des premières, savoir :

$$dL = 0, \quad dL' = 0, \quad dL'' = 0, \quad \text{etc.};$$

et les quantités L, L', L'', etc., étant nulles par hypothèse, pendant toute la durée du mouvement, leurs différentielles complètes, prises en considérant x, y, z, x', etc., comme des fonctions de t, sont aussi égales à 0. Mais si L, par exemple, renferme le temps explicitement, sa différentielle complète sera

$$dL = \frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \text{etc.};$$

et en prenant

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \quad \delta x' = dx', \text{etc.},$$

la première équation (3) ne s'accordera avec l'équation $dL = 0$, que pour les valeurs particulières de t, s'il en existe, pour lesquelles on aura $\frac{dL}{dt} = 0$. Je supposerai dans ce qui va suivre, que les conditions du système de points matériels m, m', m'', etc., exprimées par les équations (2), sont indépendantes du temps t; les quantités L, L', L'', etc., seront, d'ailleurs, des fonctions quelconques des coordonnées de ces mobiles, qui ne contiendront pas seulement leurs distances mutuelles, et le système pourra renfermer des points fixes et des points assujettis à demeurer sur des surfaces ou sur des courbes immobiles.

Cela étant, si l'on substitue les valeurs précédentes de δx, δy, etc., dans l'équation (1) du numéro cité, elle deviendra

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right)$$
$$= \Sigma m\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

En appelant v, v', v'', etc., les vitesses des points m, m', m'', etc., au bout du temps t, on aura, relativement au point quelconque m,

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = v^2;$$

et en différentiant par rapport à t, il en résultera

$$\frac{1}{2} d.v^2 = \frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz;$$

ce qui changera l'équation précédente en celle-ci :

$$\frac{1}{2} d.\Sigma m v^2 = \Sigma m (X dx + Y dy + Z dz). \quad (a)$$

Maintenant, si les points du système sont attirés ou repoussés par des centres fixes, et que ces forces soient des fonctions quelconques de la distance, la formule $X dx + Y dy + Z dz$ sera une différentielle exacte (n° 158), pour chacun des mobiles en particulier. Si les points m, m', m'', etc., sont, en outre, soumis à leurs actions mutuelles, dont les intensités soient aussi des fonctions de la distance, et qui satisfassent à la loi de la réaction, égale et contraire à l'action, la somme des quantités $X dx + Y dy + Z dz$ et $X' dx' + Y' dy' + Z' dz'$, relatives à l'action mutuelle de m et m', sera encore une différentielle exacte (n° 346); et de même pour toutes les autres parties de la somme Σ, prises deux à deux. Il suit donc de là que s'il n'y a dans le système aucune force dirigée vers un centre mobile étranger, qui introduirait le temps t dans les expressions de X, Y, etc., ni aucune résistance d'un milieu, pour laquelle ces expressions renfermeraient les vitesses des mobiles, et que les points m, m', m'', etc., ne soient soumis qu'à leurs actions mutuelles, et à des attractions ou répulsions émanant de centres fixes, on aura

$$\Sigma m (X dx + Y dy + Z dz) = d\varphi (x, y, z, x', \text{etc.});$$

φ désignant une fonction donnée des coordonnées de m, m', m'', etc., qui dépendra des lois de ces forces en fonctions des distances.

Alors, en intégrant l'équation (a) et désignant par C la constante arbitraire, nous aurons

$$\Sigma m v^2 = C + 2\varphi (x, y, z, x', \text{etc.}).$$

Pour éliminer C, soient k, k', k'', etc., les vitesses initiales de m, m', m'', etc.; désignons par a, b, c, les coordonnées initiales de m, par a', b', c', celles de m', etc.; on aura à l'origine du mouvement

$$\Sigma m k^2 = C + 2\varphi (a, b, c, a', \text{etc.});$$

et en retranchant cette équation de la précédente, il en résultera, à un instant quelconque,

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m k^2 = 2\varphi (x, y, z, x', \text{etc.}) - 2\varphi (a, b, c, a'). \quad (b)$$

Les quantités $\Sigma m v^2$ et $\Sigma m k^2$ sont les sommes des forces vives de tous les points du système à cet instant et à l'origine du mouvement; cette équation signifie donc que la différence de ces deux sommes ne dépend que des coordonnées des mobiles, à ces deux époques, et nullement de leurs liaisons ni des chemins qu'ils ont suivis pour passer de leurs positions initiales à celles qu'ils occupent au bout du temps t. C'est en cela que consiste la loi du mouvement, à laquelle on a donné le nom de *principe des forces vives*.

566. On en déduit comme conséquences immédiates,

1° Que la somme des forces vives est constante, toutes les fois que les points du système ne sont soumis à aucune force motrice, et que leurs vitesses ne varient, en grandeur et en direction, qu'à raison de leurs liaisons mutuelles, ou de l'obligation où ils peuvent être de se mouvoir sur des surfaces ou sur des courbes fixes et données.

2° Que si tous les points du système occupent les mêmes positions à deux époques différentes, les sommes de leurs forces vives seront aussi les mêmes à ces deux époques.

Les forces qui produisent le choc des corps de nature quelconque, étant les actions réciproques de leurs molécules (n° 554), il s'ensuit que l'équation (b) a lieu pendant toute la durée de ce phénomène. Or, dans le choc des corps doués d'une élasticité parfaite, on suppose que les mobiles reprennent exactement, après la percussion, la forme qu'ils avaient auparavant, et que tous leurs points reviennent à leurs positions primitives; si donc cela a lieu effectivement pour deux ou plusieurs corps de forme quelconque, lorsqu'ils commencent à se séparer après s'être choqués, la somme des forces vives de tous leurs points sera la même à cet instant, que dans le premier moment de la percussion, ou, autrement dit, il n'y aura aucune perte de force vive dans le système, ainsi que nous l'avons déjà vu (n° 361), dans le cas particulier de deux sphères homogènes, dont les centres se meuvent suivant une même droite.

567. Si l'on représente par R la force d'attraction ou de répulsion qui émane d'un centre fixe, et agit sur le point m, et qu'on appelle r la distance mutuelle de ces deux points, on aura (n° 158),

$$m (X dx + Y dy + Z dz) = \pm R dr;$$

le signe supérieur ayant lieu dans le cas de la force répulsive, et le signe inférieur dans le cas de la force attractive, et R désignant une fonction donnée de r, que l'on regardera toujours comme une quantité positive. Par conséquent, si la distance r est a à l'origine du mouvement, et u au bout du temps t, on aura $\pm 2\int_a^u R dr$ pour la variation de la force R, pendant le temps t, c'est-à-dire, pour la partie du second membre de l'équation (b), qui répond à cette force. Lorsqu'elle sera répulsive, il y aura donc augmentation ou diminution de force vive, selon que la distance r aura augmenté ou diminué; et le contraire aura lieu quand la force R sera attractive.

D'après ce qu'on a vu dans le n° 346, il en sera de même à l'égard des actions mutuelles des points du système; et, en effet, si l'on appelle, comme

dans le n° 555, F l'action mutuelle de m et m', par exemple, et ρ la distance mm', on aura

$$mX = \mp \frac{(x' - x)F}{\rho}, \quad mY = \mp \frac{(y' - y)F}{\rho}, \quad mZ = \mp \frac{(z' - z)F}{\rho}.$$

$$m'X' = \mp \frac{(x - x')F}{\rho}, \quad m'Y' = \mp \frac{(y - y')F}{\rho}, \quad m'Z' = \mp \frac{(z - z')F}{\rho},$$

selon que la force F sera répulsive ou attractive; à cause de

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$
$$\rho d\rho = (x' - x)(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz'),$$

il en résultera donc

$$m(Xdx + Ydy + Zdz) + m'(X'dx' + Y'dy' + Z'dz') = \pm F d\rho,$$

pour la partie du second membre de l'équation (a), qui répond à la force F, et par conséquent, $\pm 2\int_a^u F d\rho$ pour la variation de la force vive du système qui produira cette force, pendant que la distance ρ passera de $\rho = a$ à $\rho = u$. Le signe supérieur ayant lieu dans le cas d'un action répulsive, et la quantité F étant toujours positive, on voit qu'il y aura augmentation ou diminution de force vive, selon que l'on aura $u > a$ ou $u < a$, c'est-à-dire, selon que la distance ρ aura augmenté ou diminué : on en conclut, par exemple, que l'action mutuelle des molécules d'un gaz qui tend à augmenter leurs distances mutuelles, produit toujours une augmentation de force vive, dans le système dont ce fluide fait partie, lorsqu'il se dilate effectivement, et une diminution quand il se condense. Le signe inférieur aura lieu devant la quantité précédente, et la force F produira des effets inverses, lorsqu'elle sera attractive.

On voit encore qu'un poids P appliqué à une machine ou à un système quelconque de points matériels, y produira une augmentation de force vive, exprimée par le produit 2Ph, en s'abaissant d'une hauteur verticale h, et une diminution égale aussi à 2Ph, en s'élevant de la même hauteur, quel que soit d'ailleurs le chemin, en ligne droite ou courbe, qu'il suivra dans ces deux cas.

568. Si le point m est assujetti à demeurer sur une surface mobile, et que $L = 0$ soit l'équation de cette surface, L sera une fonction donnée de x, y, z, t. En appelant N la résistance de cette surface, dirigée suivant une des deux parties de la normale, et en faisant, pour abréger

$$V = \left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

il en résultera

$$mX = NV\frac{dL}{dx}, \quad mY = NV\frac{dL}{dy}, \quad mZ = NV\frac{dL}{dz},$$

pour les composantes de cette force inconnue N. La partie du second membre de l'équation (a) qui répond à cette force, sera donc

$$m(Xdx + Ydy + Zdz) = NV\left(\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz\right);$$

et comme en différentiant complètement l'équation $L = 0$, par rapport à t, x, y, z, on a

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz = 0,$$

on voit que cette partie peut se réduire à $-NV\frac{dL}{dt}dt$. Pour avoir égard à la force N, dans le calcul de la force vive du système, il faudra donc ajouter le double de l'intégrale de cette quantité au second membre de l'équation (b); par conséquent, la variation de force vive, qui sera produite par la force N, pendant le temps t, aura pour valeur $-2\int NV\frac{dL}{dt}dt$; l'intégrale étant prise de manière qu'elle soit nulle, quand $t = 0$.

Cette variation pourra être positive ou négative, selon le signe de $\frac{dL}{dt}$, et selon celui de V, qui dépendra du sens dans lequel la force N s'exercera. La grandeur de cette résistance N dépendant en partie de la force centrifuge du point m, pour la connaître et calculer en conséquence la valeur de l'intégrale précédente, il faudra que la vitesse du point m et sa trajectoire aient été préalablement déterminées; ce qui suppose le problème dont on s'occupe résolu en ce qui concerne le point m. La variation de force vive produite, par cette force inconnue, ne sera pas indépendante du chemin que ce point m aura suivi en allant d'une position à une autre; le principe des forces vives, tel qu'on l'a énoncé plus haut, n'aura plus lieu; et, en effet, sa démonstration suppose que l'équation $L = 0$, ne contient pas le temps t explicitement.

569. Ce principe n'aura pas lieu non plus, quoique la surface dont $L = 0$ est l'équation soit im-

mobile, lorsque l'on aura égard au frottement du point m contre cette surface ; la variation de force vive produite par le frottement, dépendra de la pression, qui est égale et contraire à la force inconnue N ; on ne pourra donc pas calculer, *à priori*, la grandeur de cette variation ; mais il est facile de prouver que l'effet du frottement sera toujours une diminution de force vive.

En effet, à cause que le frottement est proportionnel à la pression, on pourra représenter celui du point m, contre la surface dont l'équation est $L=0$, par fN, en désignant par f une fraction donnée qui sera une quantité positive, ainsi que l'inconnue N. De plus, la direction du frottement étant tangente à la trajectoire du mobile, et dirigé en sens contraire de sa vitesse, si l'on appelle s l'arc décrit par le point m pendant le temps t, les composantes de la force fN, seront

$$-fN\frac{dx}{ds},\quad -fN\frac{dy}{ds},\quad -fN\frac{dz}{ds},$$

parallèlement aux axes des x, y, z ; donc, à cause de $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$, le terme du second membre de l'équation (a), qui provient de cette force, se réduira à $-fNds$; et il en résultera, dans le second membre de l'équation (b), un terme $-2\int fNds$, dans lequel on prendra l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse avec s, et qui exprimera évidemment une diminution de force vive.

Ce résultat conviendra également au cas où un corps du système glissera sur l'autre : en prenant pour ds l'élément de la courbe décrite par leur point de contact en vertu de ce glissement, pour N la pression réciproque de ces deux corps, et pour f un coefficient dépendant de la nature de leur surface, la quantité $-2\int fNds$ exprimera encore la diminution de force vive due à ce frottement.

On verra de même que la résistance d'un milieu produira aussi constamment une diminution de force vive, qui dépendra de la vitesse des mobiles. Ainsi, les frottemens des parties d'un système, entre elles ou contre des obstacles fixes, et les résistances du milieu que les mobiles traversent, diminuent continuellement la somme des forces vives de tous ces corps ; et c'est de cette manière que ces forces finissent toujours par réduire au repos le système entier, s'il a été mis en mouvement, puis ensuite abandonné à lui-même, sans être soumise à d'autres forces motrices qui puissent reproduire incessamment les forces vives détruites par ces résistances. C'est ce que fait, par exemple, la force du ressort dans les pendules ordinaires : son action restitue au corps oscillant la force vive qu'il aurait perdue sans cela, à chaque retour à la verticale, et le fait ainsi remonter constamment à la même hauteur, malgré la résistance de l'air et les frottemens. Dans les horloges à poids, la force vive perdue est restituée au pendule par un poids, qui descend un tant soit peu pendant chaque oscillation.

570. Si l'on représente par x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité du système des points matériels m, m', m'', etc., à un instant quelconque, et qu'on fasse

$$x=x_1+x_{,},\quad y=y_1+y_{,},\quad z=z_1+z_{,},$$

de sorte que $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ soient les coordonnées du point quelconque m, rapportées à ce centre comme origine, on aura

$$\Sigma m\frac{dx_{,}}{dt}=0,\quad \Sigma m\frac{dy_{,}}{dt}=0,\quad \Sigma m\frac{dz_{,}}{dt}=0,$$

et à cause de

$$v^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},$$

il en résultera

$$\Sigma mv^2=\left(\frac{dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2}{dt^2}\right)\Sigma m+\Sigma m\left(\frac{dx_{,}^2+dy_{,}^2+dz_{,}^2}{dt^2}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Sigma mv^2=v_1^2\,\Sigma m+\Sigma mv_{,}^2,$$

en désignant par v_1 la vitesse du centre de gravité et par $v_{,}$ la vitesse du point m dans son mouvement autour de ce centre. Par conséquent, on aura la somme des forces vives absolues de tous les points du système, en ajoutant le produit du carré de la vitesse de leur centre de gravité et de la somme de leurs masses, à la somme des forces vives de tous ces mêmes points dans leur mouvement relatif autour de ce centre.

D'après ce théorème, si l'on appelle m la masse de l'un des corps célestes, U la somme des forces vives de tous ses points dans son mouvement de rotation autour de son centre de gravité, et qu'on désigne par u la vitesse de ce centre dans l'espace, on aura $U+mu^2$, pour la somme des forces vives absolues de m. En appliquant l'équation (b) au système solaire, on aura donc

$$\Sigma U+\Sigma mu^2=D+2\varphi(x,y,z,x',\text{etc.});$$

les sommes Σ s'étendant au soleil, aux planètes, aux satellites, et même aux comètes, si leurs masses étaient connues ; D étant une constante arbitraire dépendante des positions et des vitesses de tous ces corps à un instant donné ; et φ désignant une fonction relative à leurs attractions mutuelles. En vertu du même théorème, on aura aussi

$$\Sigma mu^2=V^2\,\Sigma m+\Sigma m\left(\frac{dx_{,}^2+dy_{,}^2+dz_{,}^2}{dt^2}\right),$$

en désignant par V la vitesse du centre de gravité du système solaire dans l'espace, et par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées du centre de figure de m, rapportées à ce centre de gravité comme origine. Par conséquent, l'équation des forces vives deviendra

$$\Sigma U + V^2 \Sigma m + \Sigma m \left(\frac{dx_{,}^2 + dy_{,}^2 + dz_{,}^2}{dt^2}\right)$$
$$= D + 2\varphi\,(x, y, z, x', \text{etc.}). \quad (c)$$

Pour obtenir l'expression de la fonction φ, observons qu'à raison de la forme à peu près sphérique des corps célestes, et de la petitesse de leurs dimensions par rapport aux distances qui les séparent, on peut les considérer comme des masses réunies à leurs centres de gravité (n° 242). Soient donc f l'intensité de l'attraction universelle à l'unité de distance et rapportée à des masses prises pour unité, m et m' les masses de deux de ces corps, et ρ la distance de leurs centres de gravité; leur attraction mutuelle sera $\frac{fmm'}{\rho^2}$, et le terme correspondant de la fonction φ aura pour valeur $-\frac{fmm'}{\rho}$; d'où il résultera

$$\varphi(x, y, z, x', \text{etc.}) = -\Sigma \frac{mm'}{\rho},$$

pour sa valeur complète, la somme Σ s'étendant à tous les corps célestes, pris deux à deux.

Observons maintenant, pour simplifier l'équation (c), que si l'on ne tient pas compte de l'action des étoiles sur les corps du système solaire, le mouvement de son centre de gravité est rectiligne et uniforme, et la vitesse V, une quantité constante; de plus, abstraction faite des perturbations du mouvement de rotation de chacun des corps célestes, qui proviennent des attractions de tous les autres sur la partie non sphérique de celui que l'on considère, la quantité U est aussi constante pour chaque corps en particulier (n° 419); si donc on néglige la partie variable de ΣU, et qu'on mette une autre constante C, à la place de $D - \Sigma mU - V^2 \Sigma m$, l'équation (c) deviendra

$$\Sigma m \left(\frac{dx_{,}^2 + dy_{,}^2 + dz_{,}^2}{dt^2}\right) = C - 2f\Sigma \frac{mm'}{\rho}. \quad (d)$$

Si l'on veut transporter l'origine des coordonnées au centre de figure du soleil, on désignera par g, h, k, les coordonnées de ce point, dont l'origine est au centre de gravité du système solaire; par x, y, z, les coordonnées du centre de m, rapportées à celui du soleil, de sorte qu'on ait

$$x_{,} = x - g, \quad y_{,} = y - h, \quad z_{,} = z - k,$$

pour les coordonnées du centre de m, dont l'origine est au centre de gravité du système. Il en résultera

$$\frac{dg}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dh}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dk}{dt}\Sigma m = \Sigma m \frac{dz}{dt};$$

et à cause de

$$\Sigma m \left(\frac{dx_{,}^2 + dy_{,}^2 + dz_{,}^2}{dt^2}\right) = \Sigma m \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)$$
$$- 2\frac{dg}{dt}\Sigma m \frac{dx}{dt} - 2\frac{dh}{dt}\Sigma m \frac{dy}{dt} - 2\frac{dk}{dt}\Sigma m \frac{dz}{dt}$$
$$+ \left(\frac{dg^2 + dh^2 + dk^2}{dt^2}\right)\Sigma m,$$

l'équation (d) se changera en celle-ci :

$$\Sigma m \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \frac{1}{\Sigma m}\left[\left(\Sigma m \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Sigma m \frac{dy}{dt}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\Sigma m \frac{dz}{dt}\right)^2\right] = C - 2f\Sigma \frac{mm'}{\rho},$$

après l'élimination des quantités $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dk}{dt}$.

Les sommes Σ, excepté Σm et $\Sigma \frac{mm'}{\rho}$, ne comprendront plus la masse du soleil. On peut aussi séparer de ces deux sommes les termes relatifs à cet astre, lesquels sont

$$M, \quad \frac{Mm}{r}, \quad \frac{Mm'}{r'}, \quad \frac{Mm''}{r''}, \text{ etc.},$$

en appelant M la masse du soleil, et r, r', r'', etc., les distances des centres de m, m', m'', etc., au centre de M. De cette manière l'équation des forces

vives, appliquée au système solaire, deviendra finalement

$$\Sigma m\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)^2-\frac{1}{M+\Sigma m}\left[\left(\Sigma m\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\Sigma m\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\Sigma m\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=C-2fM\Sigma\frac{m}{r}-2f\Sigma\frac{mm'}{\rho};$$

les sommes Σ ne s'étendant plus qu'aux planètes, aux satellites et aux comètes, s'il est possible; et l'origine de leurs coordonnées étant actuellement au centre du soleil.

Nous ferons remarquer, à cette occasion, que le moyen le plus direct de savoir si l'ensemble des actions des comètes exerce une influence sensible dans le système du monde, serait de calculer, à des époques éloignées l'une de l'autre, la valeur de la quantité C, déduite de cette équation, d'après les vitesses relatives, les distances mutuelles, et les masses des autres corps célestes, à ces différentes époques : si l'on trouvait des valeurs de C sensiblement inégales, on pourrait attribuer leurs variations à l'action des comètes, en négligeant toujours l'action des étoiles, et en supposant qu'il n'y ait eu ni choc, ni explosion dans l'intervalle; car on verra bientôt que les changemens brusques de vitesse altèrent la somme des forces vives du système, et font changer, par conséquent, la valeur de la quantité C.

571. D'après ce qu'on a vu dans le n° 547, la fonction désignée par φ dans l'équation (b), est un *maximum* ou un *minimum* pour les valeurs des coordonnées x, y, z, x', etc., qui répondent à une position d'équilibre du système; il s'ensuit donc que la somme des forces vives de tous ses points cesse d'augmenter ou de diminuer, toutes les fois que le système, pendant son mouvement, passe dans une position où il demeurerait en équilibre, si ses points n'avaient pas de vitesses acquises; et comme les *maxima* et les *minima* de cette fonction du temps devront être alternatifs, il en résulte aussi que les positions d'équilibre par lesquelles le système passera, seront alternativement *stables* et *non stables;* celles-ci répondant au *minima* de la fonction φ, et celles-là à ses *maxima*.

Toutefois, le caractère distinctif des deux états d'équilibre a été seulement énoncé dans le n° 347; et il nous reste à prouver qu'en effet, la stabilité de l'équilibre a lieu, quand la fonction φ est un *maximum;* ce que nous allons faire au moyen de l'équation (b).

Pour cela supposons que a, b, c, a', b', c', etc., soient les coordonnées des points m, m', m'', etc., dans un état d'équilibre du système; supposons aussi qu'on les écarte un tant soit peu de leurs positions, et qu'on leur imprime de très petites vitesses k, k', k'', etc.; au bout du temps t, soient

$$x=a+p,\quad y=b+q,\quad z=c+r,$$
$$x'=a'+p',\quad y'=b'+q',\quad z'=c'+r',$$
etc.,

les coordonnées des mêmes points; il s'agira de faire voir que les variables p, q, r, p', etc., demeureront toujours très petites, si la quantité $\varphi(a, b, c, a'$, etc.), est un *maximum*.

En effet, je développe $\varphi(x, y, z, x'$, etc.), suivant les puissances et les produits de p, q, r, p', etc. Par la propriété commune aux *maxima* et aux *minima*, la somme des termes dépendans des premières puissances de ces variables sera toujours nulle, quel que soit le nombre des variables indépendantes que la question comporte. On démontre aussi, dans le calcul différentiel, que la somme des termes dépendans des carrés et des produits de p, q, r, p', etc., c'est-à-dire la somme des termes du second ordre par rapport à ces quantités, pourra se décomposer dans le cas du *maximum*, en plusieurs carrés, pris avec le signe —, et dont le nombre est celui des variables indépendantes. En désignant par R, le reste de la série comprenant les termes du troisième ordre et des ordres supérieurs, on aura donc

$$\varphi(x, y, z, x', \text{etc.})=\varphi(a, b, c, a', \text{etc.})$$
$$-(s^2+s'^2+s''^2+\text{etc.})+R;$$

s, s', s'', etc., étant des fonctions linéaires de p, q, r, p', etc., qui seront toutes nulles en même temps que ces variables. La substitution de cette valeur de φ dans l'équation (a) donne

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2=\tfrac{1}{2}\Sigma mk^2-(s^2+s'^2+s''^2+\text{etc.})+R.$$

Or, au commencement du mouvement, les variables p, q, r, p', etc., sont d'abord très petites; tant qu'il en est ainsi, les quantités s, s', s'', etc., sont également très petites; et, réciproquement, à des valeurs très petites de s, s', s'', etc., correspondent toujours de semblables valeurs de p, q, r, p', etc. D'ailleurs, pour de telles valeurs, chaque terme du second ordre est plus grand, abstraction faite du signe, que R, qui ne renferme que des termes d'un ordre supérieur au second; par conséquent, tant que tous les carrés s^2, s'^2, s''^2, etc., sont encore très petits, chacun d'eux surpasse la valeur de R.

Cela posé, nous sommes en droit de conclure que toutes les quantités s, s', s'', etc., demeureront toujours très petites, et que chacune d'elles ne surpassera jamais $\sqrt{\frac{1}{2}\Sigma k^2}$; car, ces quantités variant par degrés continus, cela ne pourrait arriver avant que la plus grande d'entre elles, qui sera s, par exemple, ne soit devenue égale à $\sqrt{\frac{1}{2}\Sigma k^2}$; et comme cette valeur de s serait encore très petite,

puisque toutes les quantités k, k', k'', etc., sont très petites, par hypothèse, on aurait à la fois

$$s^2 = \frac{1}{2}\Sigma k^2, \quad s'^2 > R, \quad s''^2 > R, \quad \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = -(s'^2 + s''^2 + \text{etc.}) + R;$$

ce qui serait absurde, puisque $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ est essentiellement une quantité positive. Donc aussi les variables p, q, r, p', etc., resteront constamment très petites, et le système ne fera qu'osciller autour de sa position d'équilibre, qui est alors un équilibre stable; ce qu'on se proposait de démontrer.

Lorsque la quantité $\varphi(a, b, c, a', \text{etc.})$ est un *minimum*, la somme des termes du second ordre, dans le développement de $\varphi(x, y, z, x', \text{etc.})$, est une quantité positive; l'équation des forces vives peut alors subsister, sans que les variables p, q, r, p', etc., soient toujours très petites; mais cela ne suffit pas pour en conclure qu'elles cesseront, en effet, de l'être au bout d'un certain temps, quelque petites qu'on les suppose à l'origine du mouvement, ainsi que les vitesses initiales k, k', k'', etc.; et ce n'est qu'en déterminant, dans chaque problème, leurs valeurs en fonctions de t, qu'on pourra s'assurer qu'elles ne sont pas limitées.

572. Les vitesses initiales, dont les composantes ont été représentées par a, b, c, a', b', c', etc., dans le n° 536, et que les points m, m', m'', etc., ont prises effectivement, quand le mouvement du système a commencé, satisfont nécessairement aux conditions données qui lient les mobiles entre eux et à d'autres points de l'espace; et comme, par hypothèse, ces conditions sont exprimées par des équations, savoir, par les équations (2) du n° 532, il s'ensuit que si l'on désigne par s un temps infiniment petit, et qu'on prenne

$$\delta x = as, \quad \delta y = bs, \quad \delta z = cs, \quad \delta x' = a's, \text{ etc.},$$

les déplacemens des points m, m', m'', etc., qui répondent à ces accroissemens de leurs coordonnées, et aussi les déplacemens contraires, satisferont aux conditions données, c'est-à-dire, aux équations (3), qui ont été déduites des équations (2) dans le n° 532. On pourra donc employer ces valeurs de δx, δy, etc., dans l'équation (5) du n° 536; en sorte qu'à l'origine du mouvement, et en supprimant le facteur s commun à tous les termes, on aura cette équation

$$\Sigma m[(A - a)a + (B - b)b + (C - c)c] = 0, \quad (e)$$

entre les composantes A, B, C, A', etc., des vitesses que les points m, m', m'', etc., prendraient s'ils étaient libres et isolés, et celles des vitesses qu'ils prennent réellement.

Il est facile de vérifier cette équation dans le mouvement initial de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. En effet, changeons m en dm et Σ en $\int$, et faisons

$$\int(a^2 + b^2 + c^2)\,dm = k,$$

de sorte que k représente la somme des forces vives de tous les points du corps. L'équation précédente deviendra

$$\int(Aa + Bb + Cc)\,dm = k. \quad (f)$$

D'ailleurs, on aura (n° 408)

$$a = qz_{,} - ry_{,}, \quad b = rx_{,} - pz_{,}, \quad c = py_{,} - qx_{,};$$

$x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ étant les trois coordonnées de dm, rapportées aux axes principaux du corps qui se coupent au point fixe, et p, q, r, désignant les composantes de la vitesse de rotation autour de ces mêmes axes. De plus, en appelant k le moment principal, relatif au point fixe, des quantités de mouvement imprimées à tous les points du corps, et α, β, γ, les angles que l'axe de ce moment fait avec les axes de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, on aura

$$S\,(Bz_{,} - Cy_{,})\,dm = k\cos\gamma,$$
$$S\,(Cx_{,} - Az_{,})\,dm = k\cos\beta,$$
$$S\,(Ay_{,} - Bx_{,})\,dm = k\cos\alpha;$$

car il est évident que les premiers membres de ces équations sont les momens, par rapport aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, des quantités de mouvement dont k est le moment principal; en sorte que les valeurs de ces intégrales doivent se déduire de la valeur de k, en la multipliant par $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ (n° 281). Or, si l'on substitue les valeurs de a, b, c, dans l'équation (f), et qu'on ait égard à ces dernières équations, il vient

$$k\,(p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma) = k;$$

donc, en désignant par ω la composante de la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe du moment principal, de sorte qu'on ait

$$\omega = p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma,$$

il en résultera

$$k\omega = k;$$

ce qui s'accorde avec le théorème du n° 419, d'après lequel cette composante de la vitesse de rotation est égale à la somme des forces vives, divisée par le moment principal des quantités du mouvement.

573. Maintenant, s'il survient pendant le mouvement un changement brusque dans les vitesses des mobiles, on pourra prendre pour δx, δy, etc., dans l'équation (5) du n° 536, les déplacemens infiniment petits de tous les points du système, qui ont effectivement lieu à une époque quelconque de ce changement, pourvu qu'à cet instant, comme on l'a expliqué dans le numéro suivant, les points par lesquels les parties du système sont en contact, aient une même vitesse, pour les deux parties adjacentes, dans le sens normal à leur surface com-

mune. Cela étant, il y aura deux cas distincts à examiner.

1° Si le changement brusque est produit par la rencontre de deux ou plusieurs corps du système, ou par le choc de ces mobiles contre des obstacles fixes, la condition dont il s'agit sera remplie à l'instant de la plus grande compression (n° 469). En supposant donc que les composantes a, b, c, a', etc., des vitesses des mobiles se rapportent à cet instant, et A, B, C, A', etc., au commencement du choc, on pourra prendre, comme dans le numéro précédent,

$$\delta x = a\epsilon, \quad \delta y = b\epsilon, \quad \delta z = c\epsilon, \quad \delta x' = a'\epsilon, \text{ etc.};$$

et l'équation (e) aura lieu entre les composantes des vitesses à ces deux époques, qui seront celles du commencement et de la fin du choc, lorsque les mobiles n'auront aucune élasticité. Or, cette équation (e) donne

$$\Sigma m\,(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c) = \Sigma m\,(a^2 + b^2 + c^2);$$

et comme on a identiquement

$$\begin{aligned}&\Sigma m\,[(\mathrm{A}-a)^2 + (\mathrm{B}-b)^2 + (\mathrm{C}-c)^2]\\ &= \Sigma m\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2) + \Sigma m\,(a^2 + b^2 + c^2)\\ &\qquad - 2\Sigma m\,(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c),\end{aligned}$$

il en résulte

$$\begin{aligned}&\Sigma m\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2) - \Sigma m\,(a^2 + b^2 + c^2)\\ &= \Sigma\,[(\mathrm{A}-a)^2 + (\mathrm{B}-b)^2 + (\mathrm{C}-c)^2];\end{aligned}$$

en sorte que l'excès de la somme des forces vives de tous les points du système avant le choc, sur la somme des forces vives après le choc, est une certaine somme de forces vives, et, conséquemment, une quantité positive. Par conséquent, dans les changemens brusques de vitesse, provenant du choc des corps dénués d'élasticité, entre eux ou contre des obstacles fixes, il y a toujours perte de force vive, ainsi que nous l'avons déjà vu, dans le choc de deux corps sphériques et homogènes, dont les centres se meuvent sur une même droite (n° 361).

2° Lorsque le changement brusque sera produit par des explosions intérieures qui briseront un ou plusieurs corps du système, ce sont les composantes A, B, C, A', etc., des vitesses au commencement du phénomène, et non pas les composantes a, b, c, a', etc., des vitesses finales, qui satisferont à la condition du n° 537; en sorte que, dans ce cas, on ne pourra plus employer les valeurs précédentes de δx, δy, etc., dans l'équation (5) du n° 536. Mais en désignant toujours par ϵ un temps infiniment petit, on pourra prendre

$$\delta x = \mathrm{A}\epsilon, \quad \delta y = \mathrm{B}\epsilon, \quad \delta z = \mathrm{C}\epsilon, \quad \delta x' = \mathrm{A}'\epsilon, \text{ etc.};$$

ce qui changera l'équation (5) en celle-ci :

$$\Sigma m\,[(\mathrm{A}-a)\,\mathrm{A} + (\mathrm{B}-b)\,\mathrm{B} + (\mathrm{C}-c)\,\mathrm{C}] = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}&\Sigma m\,(a^2 + b^2 + c^2) - \Sigma\,(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)\\ &= \Sigma m\,[a-\mathrm{A})^2 + (b-\mathrm{B})^2 + (c-\mathrm{C})^2];\end{aligned}$$

ce qui montre que la somme des forces vives de tous les points des parties des mobiles, après l'explosion, est toujours plus grande que la somme de leurs forces vives avant l'explosion. Il est évident, en effet, que si les mobiles sont en repos avant la séparation de leurs parties, cette séparation sera toujours suivie d'une augmentation de force vive; mais, en vertu du théorème qu'on vient d'énoncer quels que soient les mouvemens de translation et de rotation d'un corps, le changement brusque produit par une explosion intérieure, donnera toujours lieu à une augmentation de force vive, et non pas à une diminution, comme dans le cas d'une rencontre de corps dénués d'élasticité.

Sans qu'il soit nécessaire de rien ajouter à ce que nous avons dit, dans le n° 470, sur le choc des corps élastiques, on voit que la première partie de ce phénomène, depuis le commencement jusqu'à l'instant de la plus grande compression, peut être assimilée au premier des deux cas précédens, et la seconde partie, depuis cet instant jusqu'à la séparation des mobiles, au second de ces deux cas : il y a donc perte de force vive pendant la première partie, et accroissement pendant la seconde. De plus, si les mobiles sont parfaitement élastiques, de sorte qu'ils reprennent, en se séparant, la même forme qu'ils avaient avant le choc, et que les deux parties du phénomène soient exactement semblables, l'augmentation de force vive, pendant la seconde partie, sera égale à la diminution qui aura eu lieu pendant la première; par conséquent, la somme des forces vives du système sera la même avant et après le choc, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 566. Cela suppose, toutefois, qu'on fasse abstraction de la perte de force vive, qui aura toujours lieu (n° 569), s'il y a glissement et frottement des corps l'un contre l'autre pendant la durée de leur contact.

574. Le *principe de la moindre action*, qu'il nous reste à considérer, consiste en ce que, dans le mouvement d'un système de corps pour lequel le principe des forces vives a lieu, si l'on fait le produit de la vitesse de chaque point matériel du système, de sa masse et de l'élément de sa trajectoire; que l'on prenne la somme des produits semblables pour tous les mobiles; et qu'on intègre cette somme, depuis une position donnée du système jusqu'à une autre position aussi donnée, la valeur de cette intégrale sera généralement un *minimum*.

Ce théorème est une extension de celui du n° 160, et se démontre de la même manière; c'est pourquoi nous en supprimerons la démonstration, pour abréger. Si l'on appelle ds l'élément de la trajectoire de m, dont la vitesse est v, ce sera l'intégrale de $\Sigma mvds$ qui aura, en général, une valeur *minima*; mais dans quelques cas, comme dans celui du mouvement d'un point matériel sur une surface fermée, le *minimum* pourra être remplacé par le *maximum*; et ce que l'on démontre seulement, c'est que la variation infiniment petite de $\int \Sigma mvds$ est toujours égale à zéro.

A cause de $ds = vdt$, l'intégrale dont il s'agit est la même chose que $\int V dt$, en faisant $V = \Sigma m v^2$. Le principe de la moindre action revient donc à dire que l'intégrale du produit de la force vive du système et de l'élément du temps, est généralement un *minimum*; en sorte que, dans la nature, un système de corps est transporté d'une position dans une autre, en dépensant la moindre quantité possible de force vive. Lorsque les mobiles ne sont soumis à aucune force motrice, la quantité V est constante (n° 566), et c'est le temps du trajet qui est un *minimum*.

Si l'on compare le principe de la moindre action aux principes des forces vives, de la conservation du mouvement du centre de gravité, et de la conservation des aires, on voit que le premier n'est qu'une règle pour former les équations différentielles du mouvement, maintenant inutile, puisqu'on obtient ces équations d'une manière plus directe et plus générale, au moyen de la formule (1) du n° 532; tandis que les autres principes, outre qu'ils renferment des propriétés importantes du mouvement, ont encore l'avantage de fournir des intégrales de ces équations différentielles, qui sont les seules que l'on connaisse dans la plupart des problèmes.

Le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité fournit trois intégrales en quantités finies, savoir :

$$\Sigma mx = a\Sigma m + At,$$
$$\Sigma my = b\Sigma m + Bt,$$
$$\Sigma mz = c\Sigma m + Ct;$$

a, b, c, A, B, C, étant les six constantes arbitraires, dont les trois premières représentent les coordonnées du centre de gravité du système à l'origine du mouvement, et les trois autres sont les sommes des quantités de mouvement imprimées, à cette époque, à tous les points du système, parallèlement aux axes des coordonnées.

Les intégrales qui résultent du principe de la conservation des aires sont trois intégrales premières, savoir :

$$\Sigma m\,(zdy - ydz) = cdt,$$
$$\Sigma m\,(zdx - xdz) = c'dt,$$
$$\Sigma m\,(ydx - xdy) = c''dt;$$

c, c', c'', étant les trois constantes arbitraires qui expriment les momens des quantités de mouvement initiales de tous les points du système, par rapport aux axes des x, y, z, ou le double des aires décrites dans l'unité de temps, autour de ces mêmes axes.

Enfin, le principe des forces vives ne fournit qu'une seule intégrale, qui est l'équation (b) du n° 565, et qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{1}{2}\,\Sigma m\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = D + \varphi(x,\ y,\ z,\ x',\ \text{etc.});$$

D étant une constante arbitraire.

LIVRE CINQUIÈME.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

575. L'*Hydrostatique* est la partie de la Statique qui traite de l'équilibre des fluides. On y considère un fluide comme un amas de points matériels qui cèdent au moindre effort que l'on fait pour les séparer les uns des autres. Les fluides que la nature nous présente approchent plus ou moins de cet état de fluidité parfaite : l'adhérence qui existe entre les molécules de plusieurs de ces substances, et qui produit ce qu'on appelle leur *viscosité*, s'oppose à la séparation de leurs parties; mais, dans la théorie que nous allons exposer, nous ne nous occuperons que des fluides parfaits; et, si l'on excepte quelques liquides où la viscosité est très considérable, les lois de l'équilibre auxquelles nous parviendrons s'appliqueront, sans erreur sensible, à tous les autres fluides.

Ces substances, comme les corps solides, sont composés de molécules disjointes, et séparées par des espaces vides; mais si l'on divise un fluide en parties d'une étendue insensible, dont chacune renferme, néanmoins, un nombre immense de molécules, on pourra admettre que les conditions d'équilibre de chaque partie sont les mêmes que si elle était infiniment petite, qu'elle conservât toujours sa fluidité, et qu'elle eût pour densité celle du corps, telle qu'on l'a définie dans le n° 98. Cela revient à considérer un fluide comme une masse continue, dont la densité est constante, ou variable par degrés insensibles.

576. On distingue deux sortes de fluides, savoir : les *liquides* et les fluides *aériformes*.

On appelle aussi les liquides des fluides *incompressibles;* mais, dans la réalité, ce sont des substances qui ne se compriment sensiblement que sous des pressions extrêmement grandes. Si, par exemple, un cylindre vertical est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur; que cette eau n'éprouve d'abord aucune pression à sa partie supérieure, et qu'elle soit ensuite chargée d'un poids équivalent à la pression atmosphérique, l'observation a fait voir que la hauteur primitive de l'eau diminue seulement de 46 millionièmes, en supposant que le cylindre conserve son diamètre, et que ses parois ne cèdent pas à la pression qui leur est transmise par le liquide. En augmentant la charge du liquide, et la portant à plusieurs centaines de pressions atmosphériques, l'expérience a donné une condensation de l'eau croissante dans le même rapport que cette charge. Le mercure est encore moins compressible que l'eau; et, quelque effort que l'on ait fait, on n'est pas parvenu à diminuer son volume d'une manière appréciable.

Les fluides aériformes, comprenant l'air atmosphérique et les différens gaz, sont compressibles et doués d'une parfaite élasticité; en sorte qu'ils peuvent changer, à la fois, de forme et de volume par la compression, et revenir exactement à leur forme primitive dès que cette compression a cessé. On les nomme aussi, pour cette raison, des *fluides élastiques*.

Les *vapeurs* sont également des fluides élastiques; mais, pour une température donnée, un es-

pace aussi donné ne peut contenir qu'une quantité déterminée de vapeur; de manière que si la vapeur a atteint cette limite, et qu'on diminue un tant soit peu, soit l'espace, soit la température, une portion de vapeur se liquéfie. L'expérience a prouvé que ce *maximum* de vapeur est le même, à température égale, dans un espace vide d'air et dans un espace rempli d'air plus ou moins dilaté ou comprimé. La densité de la vapeur est, en général, peu considérable, relativement à celle du liquide dont elle provient; mais, quand un liquide est contenu dans un vase fermé, dont il occupe, par exemple, le tiers ou la moitié; et qu'on élève sa température à un très haut degré, le liquide tout entier, après s'être dilaté, se réduit subitement en une vapeur transparente dont la densité est le tiers ou la moitié de la densité primitive de ce même liquide.

L'air et les gaz sont appelés des fluides *permanens*, par opposition aux vapeurs; mais il y a lieu de croire qu'ils peuvent être liquéfiés par une très grande compression ou par un très grand refroidissement; et c'est, en effet, ce que l'on a vérifié à l'égard de plusieurs d'entre eux.

577. La propriété caractéristique des fluides, qui les distingue essentiellement des corps solides et qui servira de base à la théorie de leur équilibre, est la faculté qu'ils ont de transmettre également, en tous sens, les pressions exercées à leurs surfaces. Dans mon Mémoire sur les *Équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides* *, j'ai fait voir comment cette propriété provient d'une disposition respective des molécules du fluide, à laquelle il revient très rapidement quand il a été comprimé ou dilaté; et comment la résultante des attractions et répulsions moléculaires, qui produit les pressions intérieures, peut varier dans un très grand rapport, pour les très petites variations de distance des molécules, qui ont lieu dans les liquides. Mais, dans cet ouvrage, on regardera la propriété dont il s'agit comme une donnée de l'expérience, admise par tous les physiciens et les géomètres qui se sont occupés de l'Hydrostatique, et dont l'exactitude ne peut laisser aucun doute. C'est ainsi qu'en traitant de l'équilibre de la lame élastique (n° 306), nous sommes partis d'un principe secondaire, au lieu de remonter aux actions moléculaires dont il dérive.

578. Pour nous former une idée précise du principe de l'égalité de pression en tous sens, considérons d'abord les fluides incompressible.

Supposons qu'un vase prismatique, droit et posé sur un plan horizontal, dont ABCD (fig. 118) représente une section verticale, soit rempli jusqu'en EF d'un liquide, tel que l'eau, par exemple; supposons aussi que l'on recouvre cette eau d'un piston horizontal qui ferme le vase exactement. Pour simplifier la question, faisons abstraction de la pesanteur de l'eau, de sorte que ce fluide n'exerce, par lui-même, aucune pression sur les parois du vase; enfin, posons sur le piston un poids donné P, comprenant le poids même du piston. Il est évident que la base horizontale du prisme sera pressée de la même manière que si le poids P était posé immédiatement sur cette base, et qu'il fût distribué uniformément sur toute son étendue. Tous ses points éprouveront des pressions verticales égales entre elles; la pression qui en résultera, pour une portion quelconque ω de cette base, sera proportionnelle à ω : elle équivaudra à une force verticale, appliquée au centre de gravité de l'aire ω, et exprimée par $\frac{P\omega}{a}$, en désignant par a l'aire de la base entière du prisme, qui est aussi celle de la base du piston en contact avec le liquide. Or, le principe de l'égalité de pression en tous sens, consiste en ce que la pression que le poids P exerce à la partie supérieure de l'eau, se transmet, par l'intermédiaire du fluide, non seulement sur la base du vase, mais encore sur ses faces latérales : tous les points du vase sont également pressés dans des directions perpendiculaires aux parois; et une aire ω, prise sur une des faces latérales du prisme, éprouve la même pression $\frac{P\omega}{a}$, que si elle faisait partie de sa base horizontale.

Généralement, supposons que le vase ait la forme d'un polyèdre quelconque, dont la figure 119 représente une section. Ce vase étant fermé de toutes parts, et fixement attaché, concevons qu'il soit rempli exactement d'un liquide sans pesanteur. Si l'on enlève une face de ce vase, et qu'on la remplace par un piston, auquel on applique une force donnée P, perpendiculaire à la surface du liquide adjacent, le vase et le fluide demeureront en repos, et, d'après le principe que nous expliquons, la pression que la force P exerce sur la surface adjacente, se transmettra, par l'intermédiaire du liquide, sur toutes les faces du polyèdre. Tous les points du vase, en y comprenant les points de la base du piston, seront également pressés de dedans en dehors, suivant les directions perpendiculaires aux parois; et, relativement à une aire ω, prise sur une de ces parois, ou sur la surface du piston, la pression sera une force perpendiculaire à son plan, appliquée à son centre de gravité, et égale à $\frac{P\omega}{a}$; a étant l'aire entière de la base du piston, en contact avec le liquide.

Cette pression transmise s'exerce de la même manière dans l'intérieur du liquide; et si l'on y considère une portion du liquide terminée par des faces planes, ou un polyèdre solide qui y soit plongé, chaque partie ω de l'une des faces éprouvera aussi, de dehors en dedans, la pression normale égale à $\frac{P\omega}{a}$.

* *Journal de l'École Polytechnique*, 20e cahier.

On étend, sans difficulté, ces résultats au cas où la surface pressée n'est plus supposée plane; il suffit alors de la décomposer en élémens infiniment petits, que l'on regardera comme les faces planes d'un polyèdre infinitésimal; et si l'on désigne par ω l'aire d'un de ces élémens, on aura $\frac{P\omega}{a}$ pour la pression normale qu'il éprouve; a étant toujours l'aire du piston, et P la force perpendiculaire qui y est appliquée. En désignant par p la pression constante qu'éprouverait une aire plane égale à l'unité, on aura $\frac{P}{a} = p$, et les produits $p\omega$ et pa exprimeront les pressions sur l'élément ω et sur l'aire plane égale à a.

Si le liquide a un certain degré de viscosité, la propriété de presser également en tous sens a encore lieu; seulement, il arrive que la pression ne se transmet pas latéralement avec la même rapidité que suivant la direction même de la force P; mais, après un temps convenable, la pression latérale devient égale à la pression directe; et c'est à cet instant que l'on considère l'équilibre du liquide.

579. Quand le liquide contenu dans un vase est pesant, il transmet les pressions que l'on exerce à sa surface, de la même manière que quand il est dénué de pesanteur; mais il exerce en outre, sur les parois du vase, une pression due à son poids et variable d'un point à un autre : il en est de même à l'égard d'un liquide dont les points sont sollicités par la pesanteur et par d'autres forces données, et qui demeure en équilibre dans un vase. Si les parois du vase sont nécessaires à l'équilibre, en sorte qu'on n'y puisse pas faire une ouverture sans que le liquide ne s'échappe aussitôt, il en faudra conclure que les parois éprouvent, en chaque point, une pression particulière, dirigée de dedans en dehors, suivant une normale à la surface du vase; car ce n'est que suivant cette direction qu'une surface peut empêcher de se mouvoir un point matériel en contact avec elle, et détruire, par sa résistance, la force motrice de ce mobile.

La même chose a lieu dans l'intérieur du liquide, comme on l'a dit dans le numéro précédent, soit sur des portions du liquide même, soit sur des corps qui y sont plongés. La pression en un point quelconque est une quantité inconnue, que nous déterminerons dans la suite, et qui dépendra de la position de ce point et des forces motrices appliquées au fluide. Comme elle change, en général, d'un point à un autre, on ne peut la supposer rigoureusement constante que dans une étendue infiniment petite; or, pour mesurer la pression exercée sur un élément déterminé d'une surface, on conçoit une aire plane, que l'on prend pour unité, et qui éprouve, dans toute son étendue, la même pression que cet élément : p étant la pression totale que cette aire supporte, et ω l'étendue infiniment petite de cet élément, le produit $p\omega$ sera la pression correspondante à cet élément, et normale à la surface dont il fait partie. Le coefficient p sera une fonction des coordonnées de ce même élément, que nous appellerons la *pression rapportée à l'unité de surface.*

Cela posé, si l'on enlève une portion plane de la surface du vase, qu'on la remplace par un piston de même étendue, et qu'on applique à ce piston une force égale et contraire à celle que cette portion du vase éprouvait, il est évident que l'équilibre subsistera comme auparavant. De plus, si le vase est fermé de toutes parts, partout en contact avec le liquide, et fixement attaché, l'équilibre ne sera pas non plus troublé en ajoutant à cette première force une autre force quelconque P; car les forces appliquées aux points du fluide étant en équilibre, tout doit se passer, relativement à cette force P, comme si ces forces n'existaient pas, et de même que dans le numéro précédent. Par conséquent, la pression exercée par cette force P, sur la surface du liquide en contact avec le piston, sera transmise également en tous sens, par l'intermédiaire du fluide, et la pression p, rapportée à l'unité de surface, se trouvera augmentée, en chaque point, d'une quantité constante et égale à $\frac{P}{a}$; a étant toujours l'aire du piston, en contact avec le liquide.

Il est important de distinguer, comme nous le faisons ici, les deux sortes de pressions qui sont exercées sur les parois d'un vase contenant un liquide en équilibre, ou que supportent les parties mêmes de ce fluide : l'une de ces pressions, qui varie d'un point à un autre, est due au poids et aux autres forces motrices de la masse fluide; l'autre, qui est partout la même, provient des forces appliquées à sa surface, et transmises par son intermédiaire. Ces deux pressions s'ajoutent en chaque point, pour former la pression totale.

580. D'après la propriété de transmettre également en tous sens les pressions exercées sur sa surface, un fluide incompressible, contenu dans un vase fixement attaché, doit être regardé comme une véritable machine; car une *machine* est, en général, un appareil au moyen duquel une force agit sur des points qui sont hors de sa direction, et exerce sur ces points des efforts plus grands ou plus petits que si elle y était immédiatement appliquée, ce qui est le cas de la force P, que nous avons considérée dans les numéros précédens.

Le principe des vitesses virtuelles s'observe dans l'équilibre de cette machine, comme dans celui de toutes les autres machines connues. Pour le prouver, considérons un vase immobile et de forme quelconque (fig. 120), qui ait un nombre quelconque d'ouvertures; à chacune de ces ouvertures, appliquons un cylindre qui se prolonge indéfiniment en dehors du vase; emplissons ce vase d'un liquide, tel que l'eau, dont nous ne considérerons pas la pe-

santeur; supposons que l'eau s'étende dans tous les cylindres, jusqu'à une certaine distance de leurs orifices, et qu'elle y soit terminée par des surfaces planes, perpendiculaires aux longueurs des cylindres; enfin, posons sur ces surfaces EF, E'F', E''F'', etc., des pistons qui les recouvrent exactement, et qui puissent, néanmoins, glisser sans frottement le long des cylindres. Soient a, a', a'', etc., les bases de ces pistons, qui sont aussi celles des cylindres; appliquons à ces corps des forces P, P', P'', etc., perpendiculaires à leurs bases, et dirigées de dehors en dedans; et supposons que ces forces données, qui agiront l'une sur l'autre par l'intermédiaire de l'eau, se fassent équilibre. Dans cet état, la pression rapportée à l'unité de surface doit être la même sur toutes les parois du vase, en y comprenant les bases des pistons (n° 578). Si donc on la représente par p, on aura pa, $p'a$, $p''a$, etc., pour les pressions totales que supportent de dedans en dehors les bases des pistons. Pour l'équilibre, ces pressions doivent être respectivement égales aux forces P, P', P'', etc.; par conséquent, on aura

$$P = ap, \quad P' = a'p, \quad P'' = a''p, \quad \text{etc.} \quad (a)$$

L'une de ces équations servira à déterminer la valeur de p; et en la substituant dans toutes les autres, on aura les équations d'équilibre du système, qui seront en nombre égal à celui des pistons moins un.

Maintenant, imaginons, conformément à l'énoncé du principe des vitesses virtuelles, que l'on déplace les parties du système, de manière que les pistons répondent actuellement aux sections CD, C'D', C''D'', etc., des cylindres. Une partie de ces corps aura avancé, et l'autre partie aura reculé; je représenterai leurs déplacemens par h, h', h'', etc.; et je considérerai ces quantités comme positives ou comme négatives, selon que les pistons auront avancé ou reculé. Ainsi, dans la figure, la distance h comprise entre les sections EF et CD, est positive, et la distance h' comprise entre les sections E'F' et C'D', est négative. Les volumes d'eau qui sortent des cylindres pour entrer dans le vase, répondent aux valeurs positives de h, h', h'', etc., et ceux qui sortent du vase pour entrer dans les cylindres, à leurs valeurs négatives; les uns et les autres seront exprimés par les produits ah, $a'h'$, $a''h''$, etc., abstraction faite des signes. Par conséquent, l'eau étant considérée comme incompressible, et la figure du vase comme invariable, la somme de ces produits, positifs ou négatifs, devra être nulle, et l'on aura

$$ah + a'h' + a''h'' + \text{etc.} = 0. \quad (b)$$

Je multiplie cette équation par p; et en ayant égard aux équations (a), il vient

$$Ph + P'h' + P''h'' + \text{etc.} = 0; \quad (c)$$

ce qui est l'équation résultante du principe des vitesses virtuelles, appliqué aux forces P, P', P'', etc., et aux déplacemens h, h', h'', etc., de leurs points d'application.

La condition du système, qui est ici l'invariabilité du volume du liquide, est exprimée par l'équation (b). Non seulement les déplacemens h, h', h'', etc., remplissent cette condition, mais aussi les déplacemens contraires $-h$, $-h'$, $-h''$, etc., ainsi que l'exige le principe des vitesses virtuelles (n° 331). Les quantités h, h', h'', etc., peuvent avoir des grandeurs finies, pourvu qu'aucun des pistons n'entre dans le vase, et ne sorte du cylindre où il doit être contenu.

581. Le principe de l'égalité de pression en tous sens convient aux fluides élastiques comme aux liquides; mais relativement aux premiers, il n'est pas nécessaire que des forces motrices agissent sur leurs molécules, ou qu'on exerce des pressions sur leurs surfaces, pour qu'ils pressent eux-mêmes les parois des vases qui les contiennent; il suffit pour cela de leur élasticité, en vertu de laquelle ces fluides font continuellement effort pour occuper un plus grand volume. En supposant donc qu'une masse d'air, d'un gaz ou d'une vapeur, soit contenue dans un vase fermé de toutes parts, et qu'on fasse abstraction de la pesanteur du fluide, les parois du vase éprouveront des pressions égales en tous leurs points, et dirigées de dedans en dehors, suivant les normales à ces parois. La pression rapportée à l'unité de surface sera la même dans toute l'étendue du vase; pour la déterminer, on fera une ouverture en un endroit du vase, pris au hasard; on y appliquera un piston, et à ce corps, la force nécessaire pour le maintenir en équilibre; en divisant cette force par l'aire de la base du piston en contact avec le fluide, on aura la pression demandée; et l'on trouvera toujours le même quotient, quel que soit l'endroit où le piston aura été appliqué. Si, par exemple, le vase représenté par la figure 120, est rempli d'un fluide élastique, les forces P, P', P'', etc., qu'on devra appliquer aux pistons qui ferment les cylindres, pour les empêcher de glisser, seront proportionnelles aux bases a, a', a'', etc.; le rapport de chaque force à la base correspondante, sera le même pour tous les pistons; et l'équation (c) aura encore lieu, mais seulement pour les mouvemens du système dans lesquels le volume total du fluide ne changera pas.

Cette pression constante qu'un fluide élastique exerce sur les parois du vase qui le renferme, dépend de sa matière, de sa densité et de sa température. On la nomme aussi la *force élastique* du fluide. L'expérience prouve que, pour un même fluide, et la température ne changeant pas, la force élastique est proportionnelle à la densité; de sorte qu'en désignant par p la mesure de la force élastique, c'est-à-dire, la pression rapportée à l'unité de surface, et par ρ la densité, on a dans chaque fluide,

$$p = k\rho;$$

k étant un coefficient qui ne dépend plus que de la matière et de la température du fluide.

Lorsqu'on aura égard à la pesanteur du fluide, ou plus généralement, lorsque ses molécules seront sollicitées par des forces données, la pression p variera d'un point à un autre du vase, suivant une loi dépendante de ces forces, et qu'on déterminera dans la suite.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

582. Pour traiter la question de la manière la plus générale, considérons une masse fluide ABCD (fig. 121), homogène ou hétérogène, compressible ou incompressible, dont tous les points matériels sont sollicités par des forces données, et proposons-nous d'exprimer par des équations les conditions de son équilibre.

Soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque M de cette masse, parallèles aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; nous supposerons, pour fixer les idées, le plan des x et y horizontal, l'axe Oz dirigé dans le sens de la pesanteur, et la masse ABCD comprise au-dessous du plan des x et y, dans l'angle trièdre des trois plans des coordonnées positives. Partageons la masse fluide en parties que nous traiterons comme des élémens infiniment petits, d'après ce qu'on a dit précédemment (nº 575); supposons ces élémens compris entre des plans infiniment rapprochés l'un de l'autre, et parallèles à ceux des coordonnées; de sorte que ces élémens soient des parallélipipèdes rectangles, dont les côtés adjacens seront parallèles aux axes et égaux aux différentielles des coordonnées : les deux bases horizontales de celui qui répond au point quelconque M, et qui est représenté dans la figure, seront égales à $dxdy$; il aura dz pour sa hauteur verticale MM', et $dxdydz$ pour son volume.

En appelant ρ, la densité du fluide en ce point M, telle qu'elle a été définie dans le nº 98, et désignant par dm l'élément différentiel de la masse correspondant à ce même point, on aura donc

$$dm = \rho dxdydz.$$

Le facteur ρ sera une quantité constante dans les liquides homogènes, abstraction faite des petites compressions qu'ils éprouveront et qui pourront être inégales en des points différens; ρ sera une fonction connue ou inconnue des coordonnées x, y, z, dans les liquides hétérogènes, et dans les fluides élastiques qui ne seront pas partout également comprimés.

Soient aussi Xdm, Ydm, Zdm, les composantes parallèles aux axes des x, y, z, de la force motrice donnée qui agit sur l'élément dm, de sorte que X, Y, Z, soient les composantes de cette force rapportée à l'unité de masse, ou de la force accélératrice relative au point M. Chacune de ces trois quantités sera une fonction de x, y, z, dont on regardera les valeurs comme positives ou comme négatives, selon que la force qu'elle représente tendra à augmenter ou à diminuer la coordonnée à laquelle elle est parallèle. L'élément dm sera, en outre, pressé de dehors en dedans sur ses six faces, par le fluide environnant; et, pour qu'il demeure en repos, ces pressions extérieures devront faire équilibre aux forces intérieures Xdm, Ydm, Zdm.

Cela étant, désignons par $pdxdy$, la pression verticale qui s'exerce sur la base supérieure $dxdy$, dans le sens de la pesanteur, de manière que p exprime la pression rapportée à l'unité de surface, qui répond à cette base infiniment petite (nº 578). Cette quantité p sera une fonction inconnue des coordonnées x, y, z; au point M', dont les coordonnées sont x, y, $z + dz$, elle deviendra $p + \frac{dp}{dz} dz$, et elle exprimera la pression verticale, rapportée à l'unité de surface et relative à la base inférieure de dm. Cette seconde base éprouvera donc, dans le sens de la pesanteur, une pression égale à

$\left(p+\frac{dp}{ds}ds\right).dx\,dy$; la résistance du fluide sur lequel l'élément dm est appuyé, sera une force égale et contraire à cette pression; en sorte que cet élément sera poussé verticalement par les deux forces contraires $pdx\,dy$ et $\left(p+\frac{dp}{ds}ds\right).dx\,dy$, ou par une force égale à leur différence $\frac{dp}{ds}dx\,dy\,ds$ et dirigée du bas en haut. Or, pour que cet élément dm ne s'élève ni ne s'abaisse, il faudra que cette force soit égale à la composante verticale Zdm de la force motrice, qui agit dans le sens opposé; par conséquent, on aura d'abord

$$\frac{dp}{ds}dx\,dy\,ds = Zdm.$$

On trouvera de même les équations

$$\frac{dq}{dy}dx\,dy\,ds = Ydm,\quad \frac{dr}{dx}dx\,dy\,ds = Xdm,$$

qui seront nécessaires pour que l'élément dm ne se meuve ni dans le sens des y, ni dans le sens des x, et dans lesquelles q et r représentent les pressions rapportées à l'unité de surface, qui répondent aux faces de dm, parallèles aux plans des x et z et des y et z, et les plus voisines de ces plans. En substituant dans ces trois équations, la valeur précédente de dm, et supprimant le facteur commun $dx\,dy\,dz$, elles deviennent

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z,\quad \frac{dq}{dy} = \rho Y,\quad \frac{dr}{dx} = \rho X. \qquad (1)$$

583. Observons actuellement que si les élémens dans lesquels nous avons partagé la masse ABCD, étaient solides, de sorte que cette masse fût un assemblage de parallélipipèdes rectangles, solides et juxtaposés, il n'y aurait aucune relation nécessaire entre les pressions que chacun de ces parallélipipèdes éprouverait sur ses faces non parallèles; l'élément dm pourrait, par exemple, éprouver une pression quelconque sur ses bases horizontales, et n'en éprouver aucune sur ses faces verticales; mais cet élément infiniment petit devant être considéré comme fluide, aussi bien que toutes les parties de la masse totale, qui auraient une grandeur finie (n° 575), il suit de la propriété fondamentale des fluides, que les trois quantités p, q, r, doivent être égales entre elles, ou du moins, qu'il ne peut exister entre elles qu'une différence infiniment petite, négligeable dans les équations (1).

En effet, la pression que le fluide environnant exerce sur chacune des faces du parallélipipède $dx\,dy\,dz$, se transmet sur les autres faces, par l'intermédiaire du fluide, dont l'élément dm est composé; cette transmission se fait de la manière que l'on a expliquée précédemment, et d'où il résulte qu'ayant appelé $pdx\,dy$ la pression qui a lieu de dehors en dedans, sur la base horizontale supérieure, il faudra représenter, en même temps, par $pdx\,dz$ et $pdy\,dz$, les pressions transmises sur les faces latérales, et qui s'exerceront de dedans en dehors; de plus, à ces pressions transmises, il faudra ajouter celles qui résultent de la force motrice du fluide dm; par conséquent, si l'on appelle γ la pression due à cette force, et exercée, par exemple, sur la face $dy\,dz$, la plus voisine du plan des y et z, on aura $pdy\,dz+\gamma$ pour la pression totale, qui a lieu de dedans en dehors, ou de droite à gauche, sur cette même face. D'un autre côté, la pression provenant du fluide environnant, et exercée de dehors en dedans, ou de gauche à droite, sur cette face $dy\,dz$, a été représentée par $rdy\,dz$; cette force est la résistance que le fluide environnant oppose à la pression intérieure $pdy\,dz+\gamma$; par conséquent il faut qu'on ait

$$rdy\,dz = pdy\,dz + \gamma.$$

Or, quoique la valeur de γ soit inconnue, nous sommes certains, néanmoins, que cette quantité ne peut être qu'un infiniment petit du troisième ordre, comme la force motrice de dm, dont elle provient; en négligeant donc γ par rapport à $pdy\,dz$, nous aurons $r=p$; et l'on prouvera de même que l'on doit aussi avoir $q=p$.

La conclusion serait encore la même, si l'élément dm, au lieu d'être un parallélipipède rectangle, était un polyèdre quelconque dont toutes les dimensions fussent toujours infiniment petites; et l'on démontrerait de la même manière, que la pression extérieure exercée normalement sur toutes ses faces par le fluide environnant, est proportionnelle à leurs aires respectives, et indépendante de la force motrice du polyèdre. Il s'ensuit donc que tous les élémens de surface qui passent par le point M, éprouvent une même pression rapportée à l'unité de surface, et que si ω est l'aire de l'un d'entre eux, la pression normale qu'il supporte, sur l'un ou l'autre de ses deux côtés, est égale à $p\omega$, quelle que soit la direction du plan auquel il appartient.

D'après la condition $r=q=p$, les équations (1) deviennent

$$\frac{dp}{dx} = \rho X,\quad \frac{dp}{dy} = \rho Y,\quad \frac{dp}{dz} = \rho Z; \qquad (2)$$

et elles sont maintenant les équations générales de l'Hydrostatique, qu'il s'agissait de trouver.

584. Les conditions d'équilibre qu'elles expriment se réduisent, dans chaque cas particulier, à ce qu'on puisse trouver pour p une fonction de x, y, z, qui satisfasse en même temps à ces trois équations. Or, si on les ajoute après les avoir mul-

tipliées par dx, dy, dz, il vient

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz); \quad (3)$$

il faudra donc, pour que la valeur de p soit possible, que le produit de ρ et de la formule $Xdx + Ydy + Zdz$, soit une différentielle exacte d'une fonction de trois variables indépendantes x, y, z. Réciproquement, quand cette condition sera remplie, on prendra pour p l'intégrale de ce produit, et l'on satisfera de cette manière aux équations (2).

En mettant dans cette valeur de p, à la place de x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque de la surface de ABCD, on aura la pression qui aura lieu en ce point sur la paroi du vase dans lequel cette masse fluide sera contenue; pression qui sera toujours détruite, pourvu que cette paroi soit fixe et susceptible d'une résistance indéfinie; mais dans les endroits où le vase est ouvert, et où le fluide est entièrement libre, rien ne pourra détruire la pression p; par conséquent, il faudra que sa valeur soit nulle, pour tous les points de la surface libre d'une masse fluide en équilibre; ce qui donne

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad (4)$$

pour l'équation différentielle de cette surface.

Cette équation subsistera encore lorsqu'on exercera une pression constante à la surface libre du fluide; car alors il faudra qu'on ait $dp = 0$, pour tous ses points; et la densité ρ n'étant pas nulle, l'équation (4) résulte alors de la formule (3). Si l'on exerçait, par un moyen quelconque, une pression variable d'un point à un autre de la surface libre d'un fluide, et que cette pression, rapportée à l'unité de surface, fût représentée par $f(x, y, z)$, il faudrait que la valeur de p, tirée de l'équation (4), coïncidât, pour tous les points de la surface libre, avec cette fonction donnée de x, y, z; et, dans ce cas, l'équation différentielle de cette surface serait

$$\rho\,(Xdx + Ydy + Zdz) = df(x, y, z).$$

Dans la suite, nous supposerons toujours que la pression extérieure est nulle ou constante dans toute l'étendue de la surface libre d'un fluide en équilibre.

La pression p étant proportionnelle à la densité, dans les fluides élastiques (n° 581), il s'ensuit que cette pression ne peut jamais être zéro dans un fluide de cette nature, tant que la densité n'est pas nulle, c'est-à-dire, tant que le fluide existe, et qu'il n'a pas perdu, par le froid, toute sa force élastique. Un fluide élastique ne peut donc être en équilibre que quand il est contenu dans un vase fermé de toutes parts, ou bien lorsqu'on exerce à sa surface des pressions dirigées de dehors en dedans.

585. Il suit de l'équation (4), que la résultante des forces accélératrices X, Y, Z, qui agissent sur chaque point d'un liquide en équilibre, appartenant à sa surface libre, est perpendiculaire à cette surface, soit qu'il n'y ait aucune pression extérieure, soit qu'on exerce à cette surface une pression constante d'un point à un autre. En effet, traçons sur la surface libre une courbe quelconque, et soit ds l'élément différentiel de cette courbe, correspondant au point dont les coordonnées sont x, y, z, de sorte que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, soient les cosinus des angles que la tangente à cette courbe, en ce même point, fait avec des parallèles aux axes des coordonnées. Appelons R la résultante des forces X, Y, Z; les cosinus des angles que fait sa direction avec ces parallèles, seront $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$; or, si l'on divise l'équation (4) par Rds, on aura

$$\frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds} = 0;$$

ce qui montre que la direction de la force R, et la tangente à la courbe qu'on a tracée arbitrairement sur la surface, sont perpendiculaires l'une à l'autre, et, par conséquent, que cette direction coïncide avec la normale au point que l'on considère. Cette force agira, en général, de dehors en dedans; mais quand la pression extérieure ne sera pas nulle, elle pourra être dirigée, au contraire, de dedans en dehors.

Si l'on intègre l'équation (4), et qu'on donne à la constante arbitraire, contenue dans son intégrale, autant de valeurs particulières qu'on voudra, les équations déterminées qui en résulteront, appartiendront à autant de surfaces, dont chacune aura l'équation (4) pour équation différentielle, et jouira, par conséquent, des propriétés d'être également pressée dans toute son étendue et de couper à angle droit, en tous ses points, la direction de la résultante des forces X, Y, Z. Celles de ces surfaces qui passent dans l'intérieur du fluide, d'après la valeur de la constante arbitraire, sont ce qu'on appelle des *surfaces de niveau*. Si l'on fait croître cette constante par degrés infiniment petits, on divisera la masse fluide en une infinité de couches infiniment minces, et comprises entre deux surfaces de niveau consécutives, que l'on nomme, pour cette raison, des *couches de niveau*.

La valeur de la constante qui répond à la surface extérieure se déterminera, dans chaque cas, d'après le volume donné du liquide; en sorte que la pression extérieure n'aura aucune influence, ni sur la figure d'équilibre, ni sur les dimensions de ce fluide regardé comme incompressible. L'équilibre ne sera pas troublé si le liquide vient à se solidifier; il s'ensuit donc qu'une pression constante et normale, exercée de dehors en dedans sur tous les élémens de la surface d'un corps liquide ou solide, se détruit d'elle-même, et ne peut imprimer à ce corps aucun mouvement de translation ou de rota-

tion. Pour un liquide, cet équilibre des pressions extérieures résulte de la propriété caractéristique des fluides, de transmettre également en tous sens les pressions exercées à leur surface (n° 578); on vérifiera, par la suite, qu'il est indépendant de cette propriété, et qu'il a également lieu pour un corps solide de forme quelconque.

586. Supposons actuellement que le fluide en équilibre soit formé d'une matière homogène, et qu'il ait partout la même température et la même densité. La quantité ρ étant constante, il faudra, d'après l'équation (3), que la formule $Xdx + Ydy + Zds$ soit la différentielle exacte d'une fonction de trois variables indépendantes. Si cela n'a pas lieu, l'équilibre est impossible dans la masse fluide, quelque forme qu'on lui donne, et lors même qu'elle serait renfermée dans un vase fermé de toutes parts.

Mais la condition d'intégrabilité est toujours remplie à l'égard des forces de la nature, qui sont des attractions ou des répulsions, dont les intensités varient en fonctions des distances aux centres dont elles émanent (n° 158). L'équilibre d'un liquide homogène, soumis à de semblables forces, sera donc possible; et pour qu'il ait lieu effectivement, il faudra donner au fluide une forme, telle que sa surface libre coupe à angle droit, dans toute son étendue, la résultante de ces forces attractives ou répulsives.

Si, par exemple, la masse fluide est entièrement libre; que l'on exerce à sa surface une pression constante, et qu'il n'y ait qu'une seule force dirigée vers un centre fixe, la figure de la masse ABCD, en équilibre autour de ce point, sera une sphère qui aura ce point pour centre, et dont le rayon se déduira du volume donné de cette masse. En supposant que la force dirigée vers le centre fixe soit une attraction en raison inverse du carré de la distance, désignant par g l'intensité de cette force accélératrice à la surface du liquide, par a son rayon, et par ϖ la pression extérieure, $\frac{ga^2}{r^2}$ sera l'attraction à la distance r, et l'on conclura de l'équation (4)

$$p = \varpi + \frac{g\rho a^2}{r} - g\rho a,$$

pour la pression à la même distance. La même chose aura lieu si l'on remplace le centre fixe par une sphère solide dont tous les points attirent ceux du liquide en raison inverse du carré de la distance; mais alors c étant le rayon de cette sphère, la valeur de p ne s'appliquera qu'aux valeurs de r comprises depuis $r = c$ jusqu'à $r = a$. Lorsqu'on changera l'attraction en une force répulsive, il suffira de changer le signe de g; en sorte que l'on aura

$$p = \varpi + g\rho a - \frac{g\rho a^2}{r}.$$

La plus petite valeur de p répondra à $r = c$, et sera

$$p = \varpi - \frac{g\rho a(a-c)}{c}.$$

Il faudra qu'elle soit positive, sans quoi la couche liquide se détacherait du corps solide, et serait dispersée dans l'espace; par conséquent, il faudra que la pression extérieure ϖ surpasse la quantité $\frac{g\rho a(a-c)}{c}$. En général, il est nécessaire, dans l'équilibre d'un fluide, que la pression p ait une valeur positive dans toute l'étendue de sa masse, afin que les parties contiguës s'appuient partout l'une contre l'autre, et que le fluide ne se divise pas.

Quand le rayon c est très grand, la force attractive dirigée vers le centre de la sphère est sensiblement parallèle, et la surface du liquide, sensiblement plane et perpendiculaire à la direction de cette force, dans une étendue peu considérable. Ce cas est celui d'un liquide pesant, que nous considérerons spécialement dans le chapitre suivant.

587. Quelles que soient les forces d'attraction ou de répulsion dirigées vers des centres fixes qui agissent sur tous les points d'une masse fluide ABCD, faisons

$$Xdx + Ydy + Zds = d\varphi;$$

φ désignant une fonction des coordonnées x, y, z, dépendante des lois de ces forces en fonctions des distances.

L'équation (3) deviendra alors

$$dp = \rho d\varphi.$$

Pour qu'elle subsiste quand la densité ρ sera variable, il faudra que cette densité soit une fonction de la quantité φ; et, réciproquement, lorsque cette condition sera remplie, il y aura toujours une valeur de p qui satisfera à cette équation d'équilibre. Or, d'après l'équation (4), la quantité φ est constante dans toute l'étendue de chaque couche de niveau; dans un fluide hétérogène et dans un fluide compressible en équilibre, il est donc nécessaire que la densité soit constante dans toute l'étendue d'une même couche; et la couche superficielle, soumise à une pression constante et donnée, étant une couche de niveau, il faut aussi qu'elle ait une même densité dans toute son étendue.

Si le fluide est incompressible, la densité ρ pourra être une fonction quelconque, continue ou discontinue, de la quantité φ; quand elle sera donnée, on en conclura la valeur de p en fonction de ρ, en intégrant la formule $\rho d\varphi$, et déterminant la constante arbitraire d'après la grandeur constante, et aussi donnée, de la pression extérieure.

Dans le cas d'un liquide hétérogène soumis à une

force centrale, il faudra, pour l'équilibre, que sa masse soit formée de couches sphériques et concentriques, dont la densité sera la même dans toute l'étendue de chacune d'elles, et pourra varier arbitrairement d'une couche à une autre. De même, si plusieurs liquides pesans sont contenus dans un vase, il faudra, pour l'équilibre, que chaque couche horizontale et infiniment mince ne contienne qu'un seul liquide; condition qui sera remplie, si la surface supérieure, qu'on suppose soumise à une pression constante, et les surfaces de séparation de deux liquides consécutifs, sont toutes planes et horizontales. La stabilité de l'équilibre exigera, de plus, que les densités des liquides superposés décroissent, en allant du liquide le plus bas au liquide le plus élevé, afin que le centre de gravité de ce système de corps pesans, soit le plus bas possible (n° 348).

588. Dans un fluide élastique, la densité est liée à la pression (n° 581), et ne peut plus être donnée arbitrairement, comme dans un fluide incompressible et hétérogène. En divisant les équations $dp = \rho d\varphi$ et $p = k\rho$ l'une par l'autre, il vient

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varphi}{k}. \qquad (5)$$

Si la température est partout la même, k sera une quantité constante; et, en intégrant, on aura

$$p = \alpha e^{\frac{\varphi}{k}}, \quad \rho = \frac{\alpha}{k} e^{\frac{\varphi}{k}}. \qquad (6)$$

pour exprimer les lois de la pression et de la densité, dans l'état d'équilibre du fluide; e désignant la base des logarithmes népériens, et α étant une constante arbitraire, qui exprimera une certaine pression, et se déterminera d'après la pression qui aura lieu en un point donné.

Si la température varie d'un point à un autre, k variera également; mais pour que l'équation (5) subsiste, il faudra que cette quantité soit une fonction de φ, qui pourra être donnée arbitrairement. La température devra donc être aussi une fonction de φ; par conséquent, la température est constante dans toute l'étendue de chaque couche de niveau d'un fluide élastique en équilibre. Cette condition étant remplie, il faudra remplacer les équations (6) par celle-ci :

$$p = \alpha e^{\int \frac{d\varphi}{k}}, \quad \rho = \frac{\alpha}{k} e^{\int \frac{d\varphi}{k}}.$$

Abstraction faite de la force centrifuge et de la non sphéricité de la terre, la pesanteur des molécules d'air est dirigée vers le centre de la terre, et les couches de niveau de la terre sont sphériques et concentriques. Pour que l'atmosphère demeurât en équilibre, il faudrait donc que la température fût partout la même, à une même hauteur au-dessus de la surface de la terre, et qu'elle ne variât qu'avec l'élévation des couches concentriques. Or, il n'en est pas ainsi; et le soleil échauffe inégalement les différens points de la surface de la terre et de chaque couche atmosphérique. La température dépendant de la latitude, cette circonstance empêche l'équilibre d'avoir lieu, et produit des vents permanens, que l'on observe, en effet, près de l'équateur. Au reste, la condition de l'équilibre des couches atmosphériques ne pourrait rien nous apprendre, relativement à la variation de la température dans le sens vertical; car l'équation (5) a lieu, quelle que soit la valeur de k en fonction de φ, et, par conséquent, quelle que soit la loi de cette variation.

Lorsque la masse ABCD est composée de plusieurs gaz de nature diverse, les conditions d'équilibre peuvent être remplies de deux manières différentes : quand ces gaz sont parfaitement mêlés ensemble, de sorte qu'ils forment un fluide homogène dans toutes ses parties; et quand ils sont, au contraire, disposés en couches superposées, dont les surfaces de séparation sont toutes des surfaces de niveau. Le premier cas a lieu dans l'atmosphère dont la composition a été trouvée la même à toutes les hauteurs. Cet état d'un mélange parfait est celui de l'équilibre le plus stable; et quand deux gaz différens sont superposés dans un vase fermé de toutes parts, ils finissent, à la longue, par se mêler exactement, à moins qu'on ne parvienne à garantir le vase qui contient ces fluides, des plus petites agitations.

589. Les centres des forces attractives ou répulsives, qui agissent sur chaque point M de la masse fluide ABCD, peuvent être tous les autres points matériels de cette masse. Dans ce cas, les composantes X, Y, Z, de la force accélératrice totale du point M, se composeront d'une infinité de termes; ce qui n'empêchera pas qu'elles ne soient de certaines fonctions de x, y, z, communes à tous les points des fluides, en supposant que la loi naturelle de l'action égale et contraire à la réaction, ait lieu dans leurs attractions et répulsions mutuelles, et que tous ces points soient d'ailleurs soumis aux mêmes forces étrangères.

Dans la nature, ces actions mutuelles sont de deux sortes différentes : les unes varient en raison inverse du carré de la distance, et les intensités des autres sont exprimées par des fonctions qui décroissent avec une extrême rapidité et n'ont de valeurs sensibles que pour des distances insensibles. On calculera les composantes totales X, Y, Z, des forces de la première espèce, en partageant la masse de ABCD en élémens infiniment petits (n° 98), et faisant ensuite, par le calcul intégral, les sommes des attractions ou répulsions de tous ces points, suivant chaque direction. Quant aux actions de la seconde espèce, que l'on appelle proprement les forces *moléculaires*, et qui sont attrac-

tives ou répulsives, selon que l'attraction de la matière pondérable est plus grande ou plus petite que la répulsion calorifique, on ne devra pas en tenir compte dans le calcul des forces X, Y, Z, relatives à un point intérieur M; car ce sont précisément ces forces moléculaires qui produisent la pression p, égale en tous sens autour de M, à laquelle on a déjà eu égard en formant les équations d'équilibre.

Il résulte de cette dernière considération, que les équations (2) auxquelles on est parvenu, sont les conditions d'équilibre, *nécessaires* et *suffisantes*, de toutes les forces, y compris les actions moléculaires, qui agissent sur un élément quelconque du de la masse fluide; en sorte que l'équilibre a lieu, certainement, quand il existe une valeur de p qui satisfait à ces équations pour tous les points du fluide, qui coïncide avec la valeur donnée directement de la pression à la surface libre, et qui ne devient négative en aucun point, afin que les parties du fluide restent contiguës.

Si la loi des forces moléculaires, en fonction de la distance, était donnée, et qu'on pût déduire de ces forces l'expression de la quantité p en fonction de l'intervalle moyen des molécules (n° 98), on substituerait cette expression dans les équations (2); l'une d'elles déterminerait la grandeur de cet intervalle, qui a lieu, dans l'état d'équilibre, autour du point M; et les deux autres exprimeraient les conditions de cet équilibre. La valeur numérique de p résulterait ensuite de celle de l'intervalle moyen, ou de la valeur correspondante de la densité; et j'ai expliqué, dans le mémoire cité précédemment (n° 577), comment cette pression p peut varier, dans de très grands rapports, pour de très petites variations de la densité qu'on observe dans les liquides. Mais la détermination directe de la pression p étant impossible, on est obligé de déduire sa valeur des conditions mêmes de l'équilibre, ou de la formule (3), qui en est la conséquence.

Lorsque le point M est situé à la surface du fluide, ou qu'il n'en est éloigné que d'une distance moindre que le rayon d'activité des forces moléculaires, on doit avoir égard à ces forces et à la variation rapide de la densité superficielle, dans le calcul des composantes X, Y, Z, et, par suite, de la valeur de p, déduite de la formule (3). Il en résulte une influence des forces moléculaires sur la figure du liquide en équilibre, qui n'est pas sensible, en général, et qui ne le devient que dans les espaces capillaires. On n'y aura point égard dans ce Traité; et, pour tout ce qui concerne les phénomènes de la capillarité, je renverrai à la *Nouvelle théorie de l'Action capillaire*, que j'ai publiée il y a deux ans.

590. Si un liquide homogène ou hétérogène tourne uniformément autour d'un axe fixe, les formules précédentes feront connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il conserve une figure permanente, et se meuve comme un corps solide. Il suffira pour cela, de joindre aux composantes X, Y, Z, celles de la force centrifuge qui résulte de cette rotation.

Prenons alors l'axe de rotation pour celui des z. Soit r la distance du point quelconque M à cette droite, de sorte qu'on ait

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Appelons ω la vitesse angulaire constante et commune à tous les points du fluide; $r\omega$ sera la vitesse absolue du point M; et comme il décrira un cercle dont le rayon est r, la force centrifuge aura $r\omega^2$ pour valeur (n° 174). Cette force étant dirigée suivant le prolongement de r, on obtiendra ses composantes parallèles aux axes des x et des y en la multipliant par $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r}$; ce qui donne $x\omega^2$ et $y\omega^2$, qu'il faudra ajouter aux forces X et Y; et comme la force Z ne changera pas, la formule (3) deviendra

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2 xdx + \omega^2 ydy). \quad (a)$$

La quantité comprise entre les parenthèses sera encore une différentielle exacte, savoir, la différentielle de la fonction φ du n° 587, augmentée de $\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$, ou de $\frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Par conséquent, la forme permanente sera possible; et si la surface libre du liquide éprouve une pression constante dans toute son étendue, l'équation commune à cette surface et à toutes les surfaces de niveau sera

$$Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2\,(xdx + ydy) = 0. \quad (b)$$

Dans le cas d'un liquide homogène, il suffira que la surface libre soit déterminée par l'intégrale de cette équation différentielle, dont on déterminera la constante arbitraire, d'après le volume entier du liquide, comme on le verra tout à l'heure par un exemple. Dans le cas d'un liquide hétérogène, il faudra, de plus, qu'il se compose de couches homogènes, dont les figures seront aussi déterminées par l'intégrale de cette même équation, et qui ne différeront de la figure extérieure, que par les valeurs de la constante arbitraire.

591. Appliquons l'équation (b) au cas d'un liquide homogène, soumis à la pesanteur, tournant autour d'un axe vertical, et contenu dans un vase ouvert à sa partie supérieure.

En appelant g la gravité, et comptant les z positives dans le sens contraire à cette force, nous aurons

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

L'équation (b) deviendra donc

$$gdz = \omega^2\,(xdx + ydy);$$

d'où l'on tire en intégrant, et désignant par c la

constante arbitraire

$$z = \frac{\alpha^2}{2g}(x^2 + y^2) + c;$$

ce qui montre que la figure libre du liquide sera celle d'un paraboloïde de révolution dont l'axe sera celui de la rotation.

Pour déterminer la constante c, supposons que le vase soit un cylindre vertical à base circulaire, dont l'axe de figure soit l'axe des z ou de rotation. Appelons a son rayon, et h la hauteur due à la vitesse absolue αa de la surface, de sorte qu'on ait $\alpha^2 a^2 = 2gh$, et par conséquent $z = \frac{hr^2}{a^2} + c$. Soit aussi b la hauteur de l'eau avant le mouvement; $\pi a^2 b$ sera le volume du liquide qui ne changera pas pendant la rotation; or, en divisant le paraboloïde en couches cylindriques et infiniment minces, qui aient pour axe commun celui des z, on aura $2\pi r dr$ pour la base, et $2\pi z r dr$ pour le volume de la couche dont le rayon est r et l'épaisseur dr; ce volume total s'obtiendra donc en intégrant $2\pi z r dr$, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a$; d'où l'on conclut

$$a^2 b = 2\int_0^a z r dr.$$

En substituant pour r sa valeur et effectuant l'intégration, on en déduit

$$c = b - \tfrac{1}{2} h,$$

pour la valeur de c.

L'équation de la surface supérieure du liquide sera donc

$$z = \frac{hr^2}{a^2} + b - \tfrac{1}{2} h.$$

La plus petite et la plus grande valeur de z qui répondent à $r = 0$ et $r = a$, seront $b - \frac{1}{2} h$ et $b + \frac{1}{2} h$; en sorte que l'abaissement du liquide dans l'axe et son élévation à la circonférence, qui résulteront de la rotation, seront les mêmes, et auront pour valeur la moitié de la hauteur due à la vitesse de la circonférence.

592. Quand les forces dont X, Y, Z, sont les composantes, proviennent des attractions de tous les points du liquide, en raison inverse du carré des distances, ou suivant d'autres lois, les valeurs totales de X, Y, Z, dépendent, en général, de la forme du liquide et de ses couches de niveau; et, réciproquement, cette forme dépend des valeurs de ces composantes. Cette dépendance mutuelle des attractions du fluide et de sa figure, rend la détermination de celle-ci très difficile au moyen de l'équation (b). Lors même que le liquide est homogène, on n'est parvenu à résoudre ce problème, dans le cas ordinaire de l'attraction en raison inverse du carré des distances, qu'en supposant la force centrifuge peu considérable, de manière que le fluide s'écarte peu de la forme sphérique qu'il pourrait prendre si cette force était tout-à-fait nulle, c'est-à-dire, si le fluide était en repos. On démontre alors, par une analyse fondée sur la considération des séries, et qui ne peut pas trouver place ici, que la figure du fluide est nécessairement celle d'un ellipsoïde de révolution, dont on détermine l'aplatissement, d'après la grandeur de la force centrifuge à l'équateur, comparée à l'attraction du fluide au même point.

Mais, il est facile de vérifier que la figure elliptique satisfait toujours à l'équation (b), lorsque la vitesse α ne dépasse pas une certaine limite, et qu'il y a alors deux ellipsoïdes de révolution qui répondent à une même valeur de cette vitesse de rotation. Supposons, en effet, que la surface du fluide, dans son état permanent, a pour équation

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 + \gamma^2)} = 1, \qquad (c)$$

qui est celle d'un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de figure et le diamètre de l'équateur ont $2c$ et $2c\sqrt{1+\gamma^2}$ pour longueurs. Appelons X, Y, Z, les composantes de la force accélératrice provenant de l'attraction totale de ce corps sur le point de sa surface qui répond à x, y, z, et dirigées suivant les prolongemens de ces coordonnées, c'est-à-dire, en sens contraire des composantes dont on a donné les expressions dans le n° 106. En changeant les signes de ces expressions, et observant que $\frac{4}{3}\pi\rho c^3(1+\gamma^2)$ est la masse de l'ellipsoïde, nous aurons

$$X = \frac{2\pi f\rho x}{\gamma^3}[\gamma - (1+\gamma^2)\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = \gamma)],$$

$$Y = \frac{2\pi f\rho y}{\gamma^3}[\gamma - (1+\gamma^2)\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = \gamma)],$$

$$Z = \frac{4\pi f\rho(1+\gamma^2)z}{\gamma^3}[\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = \gamma) - \gamma];$$

f étant, comme dans le n° cité, l'intensité de l'attraction à l'unité de distance, et entre des masses dont chacune est égale à l'unité. Il s'agira donc de prouver que ces valeurs, jointes à l'équation (c), satisfont à l'équation (b). Or, en les substituant dans cette équation, multipliant tous ses termes par γ^3, ce qui suppose que γ ne soit pas zéro, et faisant pour abréger

$$\frac{\alpha^2}{4\pi f\rho} = \iota,$$

il vient

$$\left[\frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{3}(1+\gamma^2)\,\text{arc}\,(\text{tang}=\gamma) + \epsilon\gamma^3\right](xdx + ydy)$$
$$+ (1+\gamma^2)\left[\text{arc}\,(\text{tang}=\gamma) - \gamma\right] sds = 0;$$

en différentiant l'équation (c), on a

$$xdx + ydy + (1+\gamma^2)\,sds = 0;$$

et, pour que cette équation différentielle coïncide avec la précédente, il est nécessaire et il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{3}(1+\gamma^2)\,\text{arc}\,(\text{tang}=\gamma) + \epsilon\gamma^3 = \text{arc}\,(\text{tang}=\gamma) - \gamma,$$

ou bien en réduisant

$$\frac{3\gamma + 2\epsilon\gamma^3}{3+\gamma^2} - \text{arc}\,(\text{tang}=\gamma) = 0; \quad (d)$$

en sorte qu'il ne restera plus qu'à s'assurer si cette équation a des racines réelles, et à en déterminer le nombre.

Pour cela, je représente par $\mathcal{C}$ son premier membre, et je suppose que l'on trace la courbe dont γ et $\mathcal{C}$ sont l'abscisse et l'ordonnée courantes : cette courbe coupera l'axe des abscisses à l'origine ; mais la racine $\gamma = 0$ est étrangère à la question, tant que la vitesse a et par suite ϵ n'est pas zéro. Les autres racines de l'équation (d) sont deux à deux égales et de signes contraires ; mais il suffira de considérer ses racines positives, par exemple, attendu que l'équation (c) ne contient que le carré de γ.

Cela étant, si l'on égale à zéro la différentielle de $\mathcal{C}$, on trouve

$$\epsilon\gamma^4 + 2(5\epsilon - 1)\gamma^2 + 9\epsilon = 0, \quad (e)$$

pour déterminer les abscisses correspondantes aux *maxima* et aux *minima* de cette ordonnée. Or, cette équation étant du second degré par rapport à γ^2, il s'ensuit qu'il ne peut exister qu'un *maximum* et un *minimum* de chaque côté de l'origine des abscisses ; d'où l'on conclut d'abord que la courbe ne pourra couper qu'en deux points l'axe des abscisses positives, au delà de cette origine ; en sorte qu'il existera, au plus, deux racines réelles et positives de l'équation (d). Observons en outre, que si les équations (d) et (e) ont lieu pour une même valeur de γ, la courbe touchera l'axe des abscisses en un point qui répondra à une racine double de l'équation (d). Or, on tire de l'équation (e),

$$\epsilon = \frac{2^2}{(1+\gamma^2)(9+\gamma^2)};$$

en substituant cette valeur dans l'équation (d), il vient

$$\frac{7\gamma^5 + 30\gamma^3 + 27\gamma}{(1+\gamma^2)(3+\gamma^2)(9+\gamma^2)} = \text{arc}\,(\text{tang}=\gamma);$$

équation qui ne peut avoir qu'une seule racine positive, outre $\gamma = 0$. Cette racine existe effectivement ; et par des essais, on trouve pour sa valeur approchée

$$\gamma = 2{,}5293.$$

La valeur correspondante de ϵ est

$$\epsilon = 0{,}1123;$$

d'où nous pouvons conclure que pour des valeurs de ϵ plus petites que cette fraction, il y a deux intersections distinctes de l'axe des abscisses positives, et deux racines inégales de l'équation (d) ; que pour cette valeur de ϵ, ces intersections se changent en un contact, et les deux racines deviennent égales ; et qu'enfin, pour des valeurs plus grandes de ϵ, les intersections n'ont plus lieu, non plus que les racines réelles de l'équation (d). Il est certain que ces racines répondent aux moindres valeurs de ϵ, et non pas aux plus grandes ; car pour $\epsilon = \infty$, l'équation (d) n'a aucune racine différente de zéro ; et, au contraire, quand ϵ est une très petite fraction, on détermine aisément les deux racines réelles de cette équation.

Lorsqu'on aura déterminé, au moyen de l'équation (d), les deux valeurs approchées de γ qui répondent à une valeur donnée de ϵ moindre que la fraction précédente, les valeurs précédentes de X, X, Z, feront connaître l'attraction du fluide en un point quelconque de son intérieur ou de sa surface, et on déduira les valeurs de c, du volume aussi donné du liquide. Quand la valeur de ϵ surpassera cette fraction, on ne sera pas en droit d'en conclure que la figure permanente du liquide soit impossible, mais seulement qu'elle ne peut pas être un ellipsoïde de révolution ; car si l'on excepte le cas où l'on suppose cette figure très peu différente d'une sphère, on n'a point encore démontré que la figure elliptique de révolution soit la seule qui convienne à l'équilibre des forces centrifuges et des actions mutuelles des molécules : on n'a même pas prouvé que la sphère soit la seule figure que puisse prendre une masse fluide en repos, dont les molécules s'attirent mutuellement, quelque naturel que cela paraisse.

593. Si la quantité ϵ est une très petite fraction, on satisfait à l'équation (d) en prenant pour γ une quantité très petite. On a alors

$$\text{arc}\,(\text{tang}=\gamma) = \gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{3+\gamma^2} = \frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{9} + \text{etc.};$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (d), supprimant le facteur γ, commun à tous les termes, et négligeant ensuite les puissances de γ supérieures à la première, on trouve

$$\gamma^2 = \frac{15\epsilon}{2};$$

ce qui répond à un ellipsoïde très peu aplati. L'aplatissement sera à peu près $\frac{1}{2}\gamma^2$, puisque les deux demi-axes sont c et $c\sqrt{1+\gamma^2}$. On pourra prendre $\omega^2 c$ pour la force centrifuge à l'équateur, et $\frac{4}{3}\pi f\rho c$ pour l'attraction en un point de la surface, ce qui serait les valeurs exactes de ces deux forces, si le corps était exactement sphérique. Le rapport de la première à la seconde est égal à 3ϵ; par conséquent, lorsqu'un fluide homogène tourne autour d'un axe fixe, et s'écarte très peu de la figure sphérique, son aplatissement est égal à cinq fois la force centrifuge à l'équateur divisée par quatre fois l'attraction à la surface. On démontre aussi que si le fluide est composé de couches très peu aplaties, dont les densités décroissent du centre à la surface, l'aplatissement sera toujours plus petit que dans le cas de l'homogénéité, et cependant plus grand que les deux cinquièmes de celui qui répond à ce cas.

Dans le mouvement de rotation de la terre, le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, ou à l'attraction terrestre, est environ $\frac{1}{288}$ (n° 177) à l'équateur. Si la terre était une masse fluide homogène, son aplatissement serait donc $\frac{1}{232}$, dont les deux cinquièmes sont $\frac{1}{580}$; sa valeur $\frac{1}{290}$, qui résulte de l'observation, est comprise entre ces deux limites, comme dans le cas d'une masse fluide dont la densité décroît du centre à la surface.

En faisant

$$z = c, \quad \sqrt{x^2+y^2} = c\sqrt{1+\gamma^2},$$

dans les valeurs de Z et $\sqrt{X^2+Y^2}$, et développant ensuite suivant les puissances de γ, on trouve

$$Z = -\frac{4\pi f\rho c}{3}\left(1 + \frac{4\gamma^2}{10} + \text{etc.}\right),$$

$$\sqrt{X^2+Y^2} = -\frac{4\pi f\rho c}{3}\left(1 + \frac{3\gamma^2}{10} + \text{etc.}\right),$$

pour les attractions qui ont lieu aux pôles et à l'équateur. J'ajoute à la seconde la force centrifuge $\omega^2 c$, dont la valeur est $4f\pi\rho c\epsilon$, ou le produit de $\frac{4}{3}\pi\rho f c$ et de $\frac{4\gamma^2}{10}$, d'après ce qui précède; il vient

$$\sqrt{X^2+Y^2} + \omega^2 c = -\frac{4\pi f\rho c}{3}\left(1 - \frac{\gamma^2}{10} + \text{etc.}\right),$$

pour la pesanteur à l'équateur. En en retranchant la pesanteur Z au pôle, et divisant par celle-ci, on a

$$\frac{\sqrt{X^2+Y^2} + \omega^2 c - Z}{Z} = \frac{1}{2}\gamma^2 - \text{etc.};$$

en sorte qu'en négligeant le carré de γ^2, ce rapport est égal à l'aplatissement $\frac{1}{2}\gamma^2$, et par conséquent, la somme de ces deux quantités a pour valeur cinq fois la force centrifuge divisée par le double de la pesanteur à l'équateur, conformément au théorème cité dans le n° 193.

Dans ce même cas d'une très petite valeur de ϵ, on satisfait encore à l'équation (d) au moyen d'une très grande valeur de γ. On a identiquement

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \gamma\right) = \frac{1}{2}\pi - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{1}{\gamma}\right);$$

pour une semblable valeur de γ, on aura donc, en série convergente,

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \gamma\right) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{3}\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{\gamma^5} + \text{etc.};$$

on a de même

$$\frac{1}{\gamma^2+3} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{3}{\gamma^4} + \text{etc.};$$

et en substituant ces développemens dans l'équation (d), on en déduira ensuite une valeur de γ ordonnée suivant les puissances croissantes de ϵ, savoir,

$$\gamma = \frac{\pi}{4\epsilon} - \frac{8}{\pi} + \text{etc.},$$

qui sera la seconde racine réelle de cette équation.

Pour de plus grands détails sur cette importante théorie et sur son application à la figure de la terre, je renverrai aux tomes II et V de la *Mécanique céleste*.

594. Il y a une différence essentielle entre les surfaces de niveau, tracées dans l'intérieur d'un liquide soumis à l'action mutuelle de tous ses points, et celles qui sont décrites dans un fluide dont les points ne sont sollicités que par des forces étrangères, c'est-à-dire, par des attractions ou répulsions qui émanent de centres fixes, et sont fonctions des distances à ces centres. Supposons que ABCD (fig. 122) soit la surface libre d'un liquide en repos, ou tournant, pour plus de généralité, autour d'un axe fixe. Soit EFGH une surface de niveau tracée dans son intérieur; et appelons R la résultante de toutes les forces qui agissent au point quelconque M de cette surface. Dans les deux cas qu'on vient de distinguer, cette force sera dirigée suivant la normale NMP en ce point; or, dans le second cas, sa grandeur et sa direction ne dépendant d'aucune action des points du fluide, elle restera encore perpendiculaire à la

surface EFGH, si l'on enlève la couche du liquide comprise entre EFGH et ABCD; de sorte qu'après cette soustraction, le liquide terminé par EFGH demeurera encore en équilibre : mais dans le cas des actions mutuelles des points du système, la force R dépendra de l'action de ce liquide intérieur et de celle de la couche extérieure; elle changera, en général, de grandeur et de direction, lorsqu'on supprimera la couche comprise entre ABCD et EFGH, et l'équilibre du liquide terminé par EFGH n'aura plus lieu. Pour qu'il se rétablisse, il faudra que la surface EFGH change, et devienne perpendiculaire, en chaque point M, à la seule partie de la force R qui subsistera.

L'action de la couche extérieure, comprise entre ABCD et EFGH, sera nulle sur tous les points du fluide intérieur et de la surface EFGH, lorsque la masse entière du fluide sera homogène, qu'elle s'écartera peu de la figure sphérique, et que ses points ne seront sollicités que par leurs attractions mutuelles en raison inverse du carré des distances, et par la force centrifuge. En effet, toutes les surfaces de niveau sont alors des ellipsoïdes semblables, et, conséquemment, la couche comprise entre deux de ces surfaces ABCD et EFGH, n'exerce aucune action sur les points situés dans l'espace intérieur (n° 105). Mais cette nullité de l'action d'une couche terminée par deux surfaces de niveau, sur le fluide intérieur, n'est pas une condition de l'équilibre des fluides; les forces étant toujours celles qu'on vient de supposer, elle n'a plus lieu, par exemple, lorsque le liquide est hétérogène; ce qui rend dissemblables les surfaces de niveau, qui sont encore elliptiques, et telles que l'ellipticité de la surface quelconque EFGH dépend de l'épaisseur et de la constitution de la couche extérieure *.

Dans le cas particulier de l'homogénéité, on peut enlever ou rétablir à volonté la couche elliptique comprise entre ABCD et EFGH, sans troubler l'équilibre ni changer la forme du fluide intérieur, en supposant que la vitesse de rotation soit toujours la même. Mais il y a aussi d'autres couches qu'on peut ajouter au fluide terminé par EFGH, et qui ne troublent pas son équilibre, quoique leur attraction ne soit pas nulle sur les points de ce liquide. Il est évident que la surface extérieure de la couche additive peut être un ellipsoïde semblable à EFGH, et ayant pour centre un point de l'axe de rotation différent du point O. La surface extérieure de cette couche peut aussi avoir ce point pour centre, et être un ellipsoïde dont l'aplatissement soit différent de celui de la surface intérieure. Pour le faire voir, soient ABCD et A'B'C'D' (fig. 123) les deux ellipsoïdes différens qui satisfont à la condition d'équilibre d'un même fluide homogène tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire donnée (n° 592); soient aussi EFGH et E'F'G'H' deux surfaces de niveau, tracées dans l'intérieur de ces ellipsoïdes, semblables aux surfaces extérieures, ayant le même centre O que celles-ci, et se coupant au point M : sans troubler l'équilibre du liquide terminé par EFGH, on y pourra ajouter la couche comprise entre les deux surfaces EFGH et A'B'C'D', dissemblables et concentriques. On remarquera que non seulement l'action de cette couche additive sur les points du liquide intérieur et de la surface EFGH, n'est pas nulle, mais que cette action sur chaque point de la surface n'est pas dirigée suivant la normale. Ainsi, au point M, l'action de la couche comprise entre les surfaces EFGH et A'B'C'D', n'est pas dirigée suivant la normale NMP à la première surface; car déjà l'action du liquide intérieur, terminé par cette surface, est dirigée suivant NMP; et si l'action de la couche additive avait aussi cette direction, l'action de la masse totale, terminée par la surface A'B'C'D', serait encore dirigée suivant cette normale, tandis qu'elle doit l'être suivant la normale N'MP' à l'autre surface de niveau E'F'G'H'.

Quelles que soient les forces qui agissent sur un fluide homogène ou hétérogène tournant autour d'un axe fixe, on ne doit pas perdre de vue que la seule condition d'équilibre est l'existence d'une quantité p qui satisfasse à l'équation (a), et qui soit nulle ou constante à la surface libre du liquide. Toute autre condition qu'on y voudrait ajouter est déjà comprise dans celles-là, ou ne se vérifiera pas.

595. Parmi les différentes lois d'attraction, il y en a une qui n'est pas celle de la nature, mais qui jouit d'une propriété remarquable. Cette loi est celle d'une action mutuelle en raison directe de la distance, et la propriété dont il s'agit consiste en ce que la résultante des actions de tous les points d'un corps, sur un point quelconque, est indépendante de la forme et de la constitution de ce corps, homogène ou hétérogène, et la même que si la masse entière était réunie à son centre de gravité.

En effet, soient x, y, z, les coordonnées du point attiré, x', y', z', celles d'un point attirant, μ la masse de ce second point matériel, u la distance des deux points, $k\mu u$ la force accélératrice dirigée du premier point vers le second; k étant un coefficient constant. Les composantes de cette force suivant des parallèles aux axes des coordonnées, menées par le point attiré, seront $k\mu(x'-x)$, $k\mu(y'-y)$, $k\mu(z'-z)$, puisque les cosinus des angles que fait sa direction avec ces droites sont les différences $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, divisées par u. Par conséquent, si l'on appelle X, Y, Z, les composantes totales de la force accélératrice du point attiré, on aura

$$X = k\Sigma\mu x' - kx\Sigma\mu,$$
$$Y = k\Sigma\mu y' - ky\Sigma\mu,$$
$$Z = k\Sigma\mu z' - kz\Sigma\mu;$$

* *Mécanique céleste*, tome II, pages 85 et suivantes.

les sommes Σ s'étendant à tous les points du corps attirant. Or, si l'on appelle m la masse entière de ce corps, et x_1, y_1, z_1, les trois coordonnées de son centre de gravité, on aura

$$\Sigma\mu = m,$$
$$\Sigma\mu x' = mx_1,$$
$$\Sigma\mu y' = my_1,$$
$$\Sigma\mu z' = mz_1;$$

il en résultera donc

$$X = km(x_1 - x),$$
$$Y = km(y_1 - y),$$
$$Z = km(z_1 - z),$$

équations qui renferment évidemment la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

En substituant ces valeurs de X, Y, Z, dans l'équation (δ), et faisant, pour abréger, $\frac{a^2}{km} = \varepsilon$, il vient

$$(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz + \varepsilon(x\,dx + y\,dy) = 0;$$

d'où l'on tire, en intégrant et désignant par c la constante arbitraire,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \varepsilon(x^2 + y^2) = c.$$

Cette équation sera celle des surfaces de niveau dans un liquide tournant autour de l'axe des z, dont les points s'attirent en raison directe de la distance; elle fait voir que toutes ces surfaces seront concentriques et du second degré. De plus, si l'on transporte l'origine des coordonnées à leur centre commun, c'est-à-dire, au centre de gravité du fluide, les premières puissances des coordonnées courantes devront disparaître; ce qui ne peut avoir lieu, à moins qu'on n'ait $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$. L'équation précédente se réduit donc à

$$z^2 + (1 - \varepsilon)(x^2 + y^2) = c; \qquad (f)$$

par conséquent, les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes de révolution, selon qu'on a $\varepsilon < 1$ ou $\varepsilon > 1$; et, dans les deux cas, elles ont toutes le même axe de figure, qui est l'axe de rotation.

Le volume du liquide étant donné, l'hyperboloïde n'est possible que quand le fluide est contenu dans un vase, et alors l'équation (f) s'applique seulement à la partie libre de sa surface. Lors donc qu'on a $\varepsilon > 1$, la figure permanente d'un liquide libre de toutes parts est impossible, dans le cas des forces que nous considérons. Si l'on a $\varepsilon < 1$, toutes les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes qui diffèrent par les valeurs de c. Pour déterminer la valeur de cette quantité qui répond à la surface extérieure, on égalera le volume de l'ellipsoïde, dont l'expression est $\frac{4\pi c\sqrt{c}}{3(1-\varepsilon)}$, au volume donné du liquide. Il est remarquable que, dans cet exemple, la loi des densités des couches du fluide n'a aucune influence sur sa figure extérieure et sur celle de ses couches de niveau.

CHAPITRE III.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES PESANS

596. Soit ABCD (fig. 124) un vase ouvert à sa partie supérieure, et dont la base horizontale AB est posée sur un plan fixe. Supposons qu'un liquide pesant et homogène s'élève dans ce vase jusqu'en A'B'. Pour l'équilibre de ce liquide, il faudra que la surface libre A'B' soit horizontale ou perpendiculaire à la direction de la pesanteur, et cet équilibre ne sera pas troublé, si l'on exerce sur cette surface une pression constante et de grandeur quelconque.

La pression rapportée à l'unité de surface sera la même dans toute l'étendue de chaque section horizontale du liquide; en la désignant par p à la profondeur z au-dessous de A'B', et appelant ρ la densité constante du liquide, et g la gravité, on aura $dp = \rho g\,dz$, d'après l'équation (3) du n° 584.

En intégrant, on aura donc

$$p = \rho g z + \varpi;$$

ϖ étant la pression extérieure, qui sera généralement la pression atmosphérique qui répond à $z=0$. Cette pression constante se transmettra, sans altération, sur tous les élémens des parois du vase et des corps plongés dans le liquide; elle s'ajoutera, en chaque point (n° 579), à la pression variable due à la pesanteur du liquide. Il sera donc toujours facile d'y avoir égard; et, pour plus de simplicité, nous pouvons la supposer nulle, et réduire l'équation précédente à

$$p = \rho g z.$$

Soient b la base AB du vase, P la pression totale exercée sur cette base, h la distance de A'B' à cette même base, ou la hauteur du liquide; nous aurons à la fois

$$z = h, \quad P = bp = \rho g b h;$$

ce qui montre que la pression exercée sur la base horizontale du vase est égale au poids d'un cylindre rempli du liquide, qui aurait pour base celle du vase, pour hauteur celle du liquide, et dont le volume et la masse seraient, conséquemment, bh et ρbh.

Cette pression P est donc indépendante de la forme du vase; en sorte que pour les trois vases représentés par la figure 125, qui ont des bases équivalentes, posées sur un même plan horizontal, et dans lesquels un même liquide s'élève à une hauteur qui est aussi la même, les pressions exercées sur leurs bases sont égales, quoique l'un des vases soit un cylindre droit, qu'un autre s'élargisse en partant de la base, et que le troisième aille en se rétrécissant. Cette pression est, pour chacune des trois bases, le poids du liquide contenu dans le vase cylindrique; résultat très remarquable, qui est pleinement confirmé par l'expérience.

Dans le cas de plusieurs liquides superposés dans un vase, il suffira, et il sera nécessaire pour leur équilibre, que la surface de séparation de deux liquides consécutifs soit horizontale (n° 587); et, en effet, si cela est, chaque nouveau liquide superposé exercera sur tous les points de sa base une pression constante, qui ne troublera pas l'équilibre du liquide inférieur. Voici comment on pourra déterminer la pression totale exercée sur le fond du vase.

597. Versons sur le fluide en équilibre dans le vase ABCD (fig. 124) un nouveau liquide, dont la densité soit ρ', qui ait sa surface supérieure A''B'' horizontale, comme celle du premier, et qui s'élève à une hauteur h' au-dessus du niveau A'B' du premier; ces deux fluides demeureront en équilibre dans le vase. En appelant b' l'aire de A'B', qui est la base du second fluide, il exercera sur cette base une pression égale à $\rho' g h' b'$. Cette pression sera transmise, par l'intermédiaire du liquide inférieur, sur le fond AB du vase; et l'aire de AB étant b, il en résultera, sur cette surface plane, une pression exprimée par $\rho' g h' b$ (n° 578); par conséquent, la pression totale exercée par les deux fluides sur la base horizontale du vase, sera $\rho g h b + \rho' g h' b$.

Si l'on verse un troisième liquide dans le vase, dont la surface A'''B''' soit encore horizontale, l'équilibre ne sera pas troublé; ρ'' étant sa densité, h'' la hauteur de son niveau A'''B''' au-dessus de la surface supérieure A''B'' du second liquide, et b'' l'aire de cette dernière surface, ce troisième liquide exercera sur sa base A''B'', une pression égale à $\rho'' g h'' b''$, qui sera transmise par le second liquide, et deviendra $\rho'' g h'' b'$ sur la surface supérieure A'B' ou b' du liquide inférieur; cette pression sera transmise de même, par l'intermédiaire du liquide inférieur, et deviendra $\rho'' g h'' b$ sur le fond AB du vase; par conséquent, les trois liquides superposés exerceront sur le fond du vase une pression égale à $\rho g h b + \rho' g h' b + \rho'' g h'' b$, ou $(\rho h + \rho' h' + \rho'' h'') g b$.

En continuant ainsi, on voit que quand un nombre quelconque de liquides de différentes densités, sont superposés et en équilibre dans un vase, la pression qu'ils exercent sur la base horizontale de ce vase, ne dépend que de l'étendue de cette base, des épaisseurs des différens fluides, et de leurs densités. Dans le cas d'un vase cylindrique et vertical, elle sera égale à la somme des poids de tous les fluides; et elle ne variera pas quand on changera la forme du vase, pourvu que sa base ne change pas d'étendue, non plus que l'épaisseur et la densité de chaque liquide.

Ce résultat étant indépendant de l'épaisseur des couches horizontales, il subsiste encore lorsque ces couches sont infiniment minces, c'est-à-dire, lorsque la densité de la masse fluide varie par degrés continus dans le sens vertical, et convient, par conséquent, aux fluides compressibles. Il est également vrai quand la pesanteur varie d'une couche à l'autre avec la densité; ce qui arrive lorsque la hauteur du fluide n'est pas négligeable par rapport au rayon de la terre. C'est aussi ce que l'on peut déduire de l'équation $dp = \rho g dz$, qui convient à l'équilibre de tous les fluides pesans, compressibles ou non, et dans laquelle on peut supposer la gravité g et la densité ρ, fonctions de l'ordonnée verticale z.

598. Considérons actuellement l'équilibre des liquides pesans contenus dans plusieurs vases, et qui peuvent s'écouler de l'un dans l'autre par des ouvertures latérales. Si l'on ferme à la fois toutes ces ouvertures, l'équilibre ne sera pas troublé; il faudra donc d'abord que les liquides soient disposés, dans chaque vase, par couches horizontales; mais cette condition ne suffira pas; et il faudra encore, quand les ouvertures ne seront plus fermées, qu'il existe un certain rapport entre les élévations des liquides dans les vases différens, qui dépendra du rapport de leurs densités.

S'il n'y a qu'un seul liquide répandu dans plusieurs vases communiquans, il faudra que le niveau

de ce liquide soit le même dans tous ces vases. En effet, considérons un liquide homogène contenu dans deux vases, par exemple, qui communiquent latéralement par le canal EF (fig. 126), et qui sont posés sur des plans fixes horizontaux. Supposons que ce liquide s'élève jusqu'en AB dans l'un des vases, et jusqu'en CD dans l'autre, et que ces deux sections horizontales ne soient pas dans un même plan, de sorte qu'en prolongeant le plan de la section CD de l'un des vases, il vienne couper l'autre vase, suivant une section $\alpha\zeta$ située à une distance δ au-dessous de AB. Si l'équilibre existe dans cet état, il ne sera pas troublé en remplaçant la section ouverte CD par une paroi fixe : le fluide compris entre AB et $\alpha\zeta$, exercera sur $\alpha\zeta$ une pression égale à $\rho g\gamma\delta$, en appelant ρ sa densité, et γ l'aire de cette section $\alpha\zeta$; cette pression se transmettra, par l'intermédiaire du liquide contenu dans les deux vases, jusque sur la paroi CD; et il en résultera, sur ce plan horizontal, une pression dirigée de bas en haut et exprimée par $\rho g\gamma e$, en désignant par e l'aire de CD. Par conséquent, l'équilibre n'aura plus lieu dès que l'on enlèvera la paroi CD, à moins que la différence de niveau δ du liquide dans les deux vases, ne soit nulle; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Les deux sections AB et CD étant comprises dans un même plan, si l'on verse au-dessus de AB un liquide qui s'élève jusqu'en A'B', et dont la densité soit ρ', il exercera sur AB une pression égale à $\rho' gbh$; b et h étant l'aire de AB et la distance comprise entre les sections horizontales AB et A'B'. Cette pression se transmettra sur CD, où elle sera égale à $\rho' gch$, et s'exercera de bas en haut; et pour la détruire, il faudra fermer le vase en CD par une paroi fixe, ou verser au-dessus de CD un fluide dont la pression sur CD soit égale et contraire à $\rho' gch$. Dans ce dernier cas, si le fluide s'élève jusqu'en C'D', que l'on représente par $\rho_{,}$ sa densité, et par k la distance comprise entre C'D' et CD, la pression exercée par ce fluide sur CD, sera $\rho_{,} gkc$; et pour l'équilibre, il faudra qu'on ait $\rho_{,} k = \rho' h$.

On voit donc que pour l'équilibre des liquides différens contenus dans des vases communiquans, il est nécessaire que leurs densités soient en raison inverse de leurs élévations au-dessus des sections de ces vases, faites par un même plan horizontal. Si l'on verse de nouveaux liquides au-dessus de ceux qu'on vient de considérer, on verra de même qu'en désignant par h, h', h'', etc., les épaisseurs de ces liquides dans l'un des vases, et par ρ', ρ'', ρ''', etc., leurs densités, et en représentant par k, $k_{,}$, $k_{,,}$ etc., $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$, $\rho_{,,,}$, etc., les quantités analogues dans un autre vase, il faudra qu'on ait l'équation

$$\rho' h + \rho'' h' + \rho''' h'' + \text{etc.} = \rho_{,} k + \rho_{,,} k_{,} + \rho_{,,,} k_{,,} + \text{etc.};$$

d'où il résultera que les pressions rapportées à l'unité de surface seront égales sur les deux surfaces supérieures AB et CD du liquide homogène qui va d'un vase à l'autre, et qui peut être celui dont la densité est ρ', ou celui dont la densité est $\rho_{,}$, ou plus généralement un autre liquide quelconque, pourvu que les deux surfaces AB et CD, qui le terminent, soient comprises dans un même plan horizontal.

On peut remarquer que des couches infiniment minces, comprises dans des vases différens, et contenues entre les mêmes plans horizontaux, éprouveront la même pression rapportée à l'unité de surface; mais au-dessus du plan qui termine le liquide inférieur, elles pourront contenir des liquides différens; en sorte que les propriétés des couches de niveau, ou perpendiculaires à la direction de la pesanteur, ont bien lieu, quant à l'égalité des pressions, mais non plus quant à l'homogénéité du liquide (n° 587), lorsque ses couches sont interrompues par des parois fixes.

599. Les lois de l'équilibre des fluides pesans, dans des vases communiquans, sont susceptibles d'un grand nombre d'applications dont nous nous bornerons à indiquer les plus communes.

Celle qui se présente la première, et que nous ne ferons qu'énoncer, est la théorie des nivellemens et des instrumens qu'on appelle des *niveaux*.

Dans le *siphon*, dont les deux branches s'ouvrent à leur partie supérieure, et qui contient de l'eau ou un autre liquide, l'équilibre a lieu quand les deux extrémités du fluide sont comprises dans un même plan, quelle que soit la grandeur de la pression atmosphérique en ces deux points. L'équilibre peut aussi exister dans le siphon renversé, pourvu qu'alors la pression atmosphérique ait une grandeur convenable.

Soient ABC (fig 127.), ce tube renversé, B son point le plus haut, E et F les points où le liquide s'arrête dans ses deux branches, et qui sont situés dans un même plan horizontal. Si l'on appelle ρ la densité du liquide et h la hauteur du point B au-dessus de ce plan, la pression rapportée à l'unité de surface, exercée par le liquide en ces points E et F sera égale à ρgh; et en appelant ϖ la pression atmosphérique qui s'exerce de bas en haut en chacun de ces points, il faudra donc qu'on ait $\varpi > \rho gh$, ou tout au plus, $\varpi = \rho gh$, pour que cette pression empêche le liquide de s'écouler. Dans le second cas, la pression au point B sera nulle; dans le premier, elle sera égale à $\varpi - \rho gh$; et si l'on avait $\varpi < \rho gh$, la pression au point B serait négative, le liquide se diviserait en ce point, et s'écoulerait par les deux branches du siphon. Au reste, dans le siphon renversé, l'équilibre du liquide n'est qu'instantané, et ne peut s'observer qu'à raison de l'adhérence de ses molécules entre elles ou contre l'intérieur du tube; dès que son extrémité F est un peu au-dessous ou au-dessus de son extrémité E, l'excès de la pression atmosphérique sur la pression du liquide, est plus grand ou plus petit au point E qu'au point F, et le liquide s'écoule par la branche BC ou par la branche BA du siphon.

Dans l'usage ordinaire de ce tube renversé, la branche la plus courte BA est plongée dans un vase H, contenant un liquide qui s'élève jusqu'au point D du tube; on fait le vide, en aspirant l'air que ce tube renferme; le liquide s'élève au-dessus de son niveau primitif, jusqu'à ce qu'il ait atteint le sommet B du tube; il descend ensuite jusqu'au point C, puis il s'écoule par cette extrémité du tube. L'écoulement s'arrêterait, lorsque le point D, en s'abaissant dans la branche BA, se trouverait au-dessous du point C; ce qui ne peut arriver, puisqu'on suppose que AB est la plus courte des deux branches du tube.

La *presse hydraulique*, dont l'invention est attribuée à Pascal, consiste en une caisse prismatique et verticale H (fig. 128), ouverte à sa partie supérieure, et remplie d'eau jusqu'en AB. Un couvercle placé sur AB, ferme exactement la caisse, et peut cependant glisser le long de ses parois. Au-dessous de AB se trouve une ouverture C, à laquelle on adapte un tube coudé CDE, dont la branche verticale DE est ouverte à sa partie supérieure E. L'eau de la caisse s'écoule par l'orifice C; et, à cause du couvercle posé sur AB, ce liquide s'élève, dans le tube DE, jusqu'au point F, situé au-dessus du prolongement de cette section horizontale AB. Cela étant, si l'on ajoute au poids du couvercle un nouveau poids X, le liquide s'abaissera en A'B' dans la caisse H, et s'élevera en F' dans le tube DE. Par cette addition de X, la pression rapportée à l'unité de surface sera plus grande en A'B' qu'en AB, de la quantité $\frac{X}{b}$, en désignant par b l'aire de la section horizontale de H; en même temps, la pression, aussi rapportée à l'unité de surface, et due au poids de l'eau contenue dans le tube vertical DE, augmentera d'une quantité $\rho g z$ en désignant par ρ la densité du liquide, et par z l'élévation du point F' au-dessus du point F. Pour que l'équilibre subsiste, il faudra donc qu'on ait

$$X = \rho g b z;$$

équation qui fera connaître le poids X d'après l'observation de z. On a soin que b soit une très grande surface, afin que des élévations peu considérables de l'eau dans le tube vertical, puissent répondre à de très grandes charges du couvercle mobile, et servir à les mesurer. La section horizontale du tube est très petite par rapport à b, et il en résulte que les abaissemens du couvercle dans la caisse H sont très petits, par rapport aux élévations du liquide dans le tube; car si l'on appelle y la distance comprise entre AB et A'B', et c la section horizontale du tube, on aura $by = cz$, puisque le volume total de l'eau doit être invariable. Le tube DE pourrait, au reste, n'être ni vertical, ni cylindrique; et la formule précédente donnerait toujours la valeur de X, pourvu que z fût la distance comprise entre les deux niveaux du liquide en F et en F'.

Un *baromètre* est, en général, un tube ABC (fig. 129), dont les deux branches BA et BC sont verticales, et qui est fermé à l'extrémité A de BA, et ouvert à l'extrémité C de BC. On fait exactement le vide dans ce tube, puis on y verse du mercure, qui s'élève jusqu'en D dans la branche AB, et à une moindre hauteur, jusqu'en E, dans la branche ouverte CB. Si l'on mène par le point E un plan horizontal qui coupe en F la branche AB, le mercure situé au-dessous de ce plan sera de lui-même en équilibre; et, pour que cet état subsiste, il faudra que les pressions rapportées à l'unité de surface, qui sont exercées en F par le mercure FD, et en F par l'atmosphère, soient égales entre elles. D'après cela, j'appelle ϖ la pression atmosphérique, je désigne par m la densité du mercure, et par h la hauteur verticale du point D au-dessus du point E, c'est-à-dire, la différence des niveaux D et F du fluide dans les deux branches du baromètre; la pression du mercure au point F aura pour valeur le produit mgh, et l'on aura, conséquemment,

$$mgh = \varpi.$$

L'équilibre du mercure ne sera pas troublé, si l'on imagine que la branche BC se prolonge verticalement jusqu'à l'extrémité de l'atmosphère; par conséquent, la pression atmosphérique ϖ, qui fait équilibre à celle du mercure, n'est autre chose que le poids de l'air contenu dans un cylindre vertical ayant pour base l'unité de surface, et s'étendant indéfiniment dans l'atmosphère : il dépend du décroissement de la pesanteur, à mesure que l'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, de la densité et de la température des couches d'air, et des quantités de vapeur d'eau qu'elles peuvent contenir. Ce poids pouvant varier dans un même lieu de la terre, la hauteur barométrique h varie aussi; elle change encore de grandeur, à raison des vents verticaux, qui rendent la pression atmosphérique plus grande ou plus petite qu'elle ne serait dans l'état de repos de l'air : à Paris, la valeur la plus commune de h est 0^m; 76.

Si l'on remplaçait le mercure par un autre liquide dans le baromètre, la hauteur h changerait en raison inverse de la densité de ce liquide, comparée à celle du mercure, en supposant toujours qu'il y ait un vide sensiblement parfait, au-dessus du niveau D, dans la branche fermée du baromètre. Pour l'eau, cette élévation h est d'environ 10^m, 4; et c'est aussi la plus grande hauteur à laquelle l'eau puisse s'élever dans une *pompe*, au-dessus de son niveau extérieur. Quand il existe une couche d'air entre la surface du liquide et le *piston*, cet air se dilate; il exerce sur le liquide intérieur une pression moindre que celle de l'atmosphère, mais qui diminue l'élévation de l'eau, et la

réduit à une grandeur que nous déterminerons dans un autre chapitre.

600. Nous allons maintenant nous occuper du calcul des pressions exercées par les liquides pesans sur les parois inclinées ou courbes des vases qui les contiennent, et sur les surfaces des corps solides qui y sont plongés.

La pression exercée par un liquide homogène sur une paroi plane inclinée, est égale au poids d'un prisme de ce liquide qui aurait pour base cette paroi, et pour hauteur la distance de son centre de gravité au niveau du liquide. En effet, soient ω un élément de cette paroi, et z sa distance au niveau du liquide; la pression sur cet élément sera $p\omega$ ou $\rho g z \omega$, en mettant pour p sa valeur précédente (n° 596); et comme les pressions sur tous les élémens sont perpendiculaires à la paroi plane, la résultante de ces forces parallèles aura pour valeur le produit de ρg et de l'intégrale de $z\omega$, étendue à la paroi entière. Or, cette intégrale est égale à $bz_{,}$, en appelant b l'aire de la paroi, et $z_{,}$ la distance de son centre de gravité au niveau du liquide; la valeur de la pression sur le plan incliné sera donc $\rho g b z_{,}$, conformément à l'énoncé du théorème.

Dans le cas de plusieurs liquides superposés dans le vase, on déterminera séparément les pressions exercées ou transmises sur la paroi inclinée, par chacun de ces liquides; et leur somme sera la pression totale que cette surface plane aura à supporter. La pression ϖ de l'atmosphère augmentera cette pression totale d'une quantité égale à $b\varpi$.

Tous les points de la base horizontale du vase éprouvant des pressions égales, la résultante de ces forces parallèles passe par le centre de gravité de cette base; mais, dans le cas d'une paroi inclinée, les élémens inférieurs éprouveront des pressions plus grandes que celles des élémens supérieurs; et le point où la résultante totale vient percer la paroi, qu'on peut appeler le *centre de pression*, sera toujours plus bas que le centre de gravité de cette même surface. Quand une paroi plane, plongée dans un liquide homogène, tourne autour de son centre de gravité, la pression qu'elle éprouve ne change pas de grandeur, mais le point d'application de cette force normale et constante change de position sur cette surface.

601. Pour donner un exemple de la détermination du centre de pression, supposons que la paroi plane soit un trapèze ABCD (fig. 130), dont les deux bases AB et CD sont horizontales. Si nous partageons cette surface en élémens parallèles à ces bases et d'une hauteur infiniment petite, chacun de ces élémens éprouvera la même pression dans toute sa longueur, et son centre de pression sera situé à son milieu; or, si l'on prolonge les côtés AC et BD du trapèze, jusqu'en leur point de rencontre K, et qu'on mène la droite KH, qui va de ce point au milieu H de AB, cette droite passera aussi par le milieu G de CD, et par les milieux de tous les élémens du trapèze; elle renfermera donc le centre de pression demandé; et il ne s'agira que de déterminer la distance de ce point à AB.

Soient x' cette distance, x celle d'un élément quelconque à la même base AB, u la longueur MN de cet élément, z sa distance au niveau du fluide, h la hauteur du trapèze. L'aire de cet élément et la pression qu'il éprouve seront udx et $\rho g z u dx$; la pression totale aura pour valeur $\int_0^h \rho g z u dx$; et d'après la théorie des momens des forces parallèles, on aura

$$x' \int_0^h \rho g z u dx = \int_0^h x \rho g z u dx.$$

Soit aussi c la distance de AB au niveau du liquide; appelons α l'angle compris entre le plan vertical, qui va de cette droite au niveau du liquide, et le prolongement du plan du trapèze; on aura

$$z = c + x \cos \alpha;$$

et si l'on substitue cette valeur de z dans l'équation précédente, et qu'on supprime le facteur $g\rho$ constant et commun à ses deux membres, il en résultera

$$x' \left(c \int_0^h u dx + \cos \alpha . \int_0^h x u dx \right)$$
$$= c \int_0^h x u dx + \cos \alpha . \int_0^h x^2 u dx.$$

Je désignerai par a et b les longueurs des deux bases AB et CD, et par k la perpendiculaire abaissée du point K sur CD ou b. La perpendiculaire abaissée du même point sur AB ou a sera $k + h$, et sur MN ou u, elle sera $k + h - x$; et ces droites a, b, u, étant parallèles, on aura

$$u : b :: k + h - x : k,$$
$$a : b :: k + h : k.$$

Je tire la valeur de k, de la seconde proportion, puis je la substitue dans la première; ce qui donne

$$k = \frac{bh}{a - b}, \quad u = \frac{ah - (a - b)x}{h}.$$

En mettant cette valeur de u dans l'équation précédente, et effectuant les intégrations, on en déduit

$$x' = \frac{2hc(a + 2b) + h^2(a + 3b)\cos\alpha}{6c(a + b) + 2h(a + 2b)\cos\alpha}.$$

Par conséquent, si l'on mène à cette distance x', une parallèle EF à la droite AB, le point P, où elle coupera la ligne GH, qui va du milieu de AB à celui de CD, sera le centre de pression du trapèze.

La figure 130 suppose que la base supérieure AB soit la plus grande; si le contraire avait lieu, il est

aisé de voir qu'il suffirait de remplacer l'angle α par son supplément, ou de changer le signe de $\cos\alpha$, dans cette formule.

Dans le cas de $\alpha = 90°$, la paroi est horizontale, et la formule se réduit à

$$x' = \frac{h\,(a + 2b)}{3\,(a + b)},$$

ce qui coïncide, effectivement, avec la distance du centre de gravité du trapèze à sa base a.

Quel que soit l'angle α, si cette base est *à fleur d'eau*, on a $c = 0$, et la valeur générale de x' devient

$$x' = \frac{h\,(a + 3b)}{2\,(a + b)};$$

de sorte qu'elle est, dans ce cas, indépendante de l'inclinaison de la paroi. Le trapèze se changera en un parallélogramme, quand on suppose $b = a$; et l'on a alors

$$x' = \tfrac{2}{3}\,h.$$

Il se change en un triangle dans les deux cas de $b = 0$ et $a = 0$; pour lesquels on aura

$$x' = \tfrac{1}{2}\,h, \qquad x' = \tfrac{3}{4}\,h.$$

Dans le premier cas, c'est la base du triangle qui est *à fleur d'eau*, et x' est la distance du centre de pression à cette base; dans le second cas, x' est la distance au sommet qui se trouve à la surface du liquide.

602. Sur une portion de surface courbe, les pressions se détermineront en décomposant d'abord la pression normale à chaque élément, en trois forces parallèles aux axes des coordonnées, et calculant ensuite par des intégrales doubles, les composantes totales suivant ces trois directions, lesquelles composantes se réduiront au moins à deux forces, qui pourront, le plus souvent, n'être pas réductibles à une seule (n° 264). Mais quand il s'agira des pressions exercées sur la surface entière d'un corps plongé dans un fluide, la réduction à une seule force aura toujours lieu, et cette résultante unique sera verticale, ainsi qu'on va le voir.

Soit AMB (fig. 131) le corps dont il est question; désignons par x, y, z, les coordonnées rectangulaires du point quelconque M de sa surface, et prenons le niveau du fluide pour le plan des x et y, et l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Appelons ω l'élément différentiel de la surface, et p la pression rapportée à l'unité de surface, qui répondent au point M, de sorte que $p\omega$ soit la pression exercée sur cet élément, et dirigée suivant la normale intérieure MN. La valeur de p sera la même pour tous les points qui sont à la même distance z du niveau du liquide, soit que ce fluide stagnant soit homogène, ou qu'il soit seulement composé de couches horizontales dont la densité ne varie que d'une couche à une autre. Soient encore α, β, γ, les angles que fait la normale MN avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point M dans l'intérieur du corps. Enfin, projetons ω sur les trois plans des coordonnées, et désignons les projections de cet élément, par a sur le plan des y et z, par b sur celui des z et x, et par c sur celui des x et y. En observant que α, β, γ, sont aussi les inclinaisons du plan tangent en M sur ces trois plans, nous aurons (n° 10)

$$a = \omega\cos\alpha, \quad b = \cos\omega\beta, \quad c = \omega\cos\gamma;$$

et si l'on multiplie ces équations par p, il en résultera

$$pa = p\omega\cos\alpha, \quad pb = p\omega\cos\beta, \quad pc = p\omega\cos\gamma;$$

ce qui montre que les produits pa, pb, pc, sont les composantes parallèles aux axes des x, y, z, de la pression normale $p\omega$; en sorte que la composante perpendiculaire à chaque plan des coordonnées, et, généralement à un plan quelconque, se déduit de $p\omega$, en y remplaçant l'élément ω par sa projection sur ce plan.

Cela posé, le corps AMB étant terminé de toutes parts, il y a, au moins, un second élément de sa surface qui a la même projection sur chaque plan donné, que l'élément ω. Ainsi, en abaissant du point M, une perpendiculaire MP sur le plan des y et z, cette perpendiculaire, ou son prolongement, rencontrera la surface du corps en un point M', et la projection de l'élément ω' qui répond à ce point, sera égale à a sur ce plan, comme celle de ω. Les deux élémens étant situés à la même distance du niveau du liquide, éprouveront les pressions normales $p\omega$ et $p\omega'$, qui seront entre elles comme les aires ω et ω', dont le rapport peut avoir une grandeur quelconque. Mais leurs composantes parallèles à l'axe des x, auront une valeur commune pa, et les forces $p\omega$ et $p\omega'$ agissant suivant les normales intérieures MN et M'N', ces composantes égales agiront évidemment en sens contraire l'une de l'autre, savoir, de M vers M' au point M, et de M' vers M au point M'. Par conséquent la composante parallèle à l'axe des x, de la pression exercée sur ω, sera détruite par la composante suivant la même direction, de la pression exercée sur un autre élément ω'. On verra de même que la composante de $p\omega$, parallèle à l'axe des y, sera aussi détruite par la composante suivant cette direction, de la pression relative à un troisième élément, lequel répondra au point où la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan des x et z, rencontrera une seconde fois la surface du corps. Or, on conclut de là que ces composantes horizontales des pressions exercées sur les élémens de la surface du corps plongé, se détruisent dans chacune des sections horizontales et infiniment minces, et, conséquemment, sur sa surface entière. Il s'ensuit donc aussi que toutes ces pressions se réduisent à une seule force, qui est la résultante de leurs composantes

verticales, et qui provient de la prépondérance de valeur de p dans la partie inférieure du corps.

Si p résultait d'une pression exercée à la surface du liquide, sa valeur serait constante dans toute l'étendue de la surface AMB; et les composantes des pressions se détruiraient deux à deux, dans le sens vertical aussi bien que suivant les directions horizontales. Quelle que soit la forme d'un corps solide ou fluide, une pression constante et normale, exercée en tous les points de sa surface, ne peut donc produire ni un mouvement de translation, ni un mouvement de rotation, comme nous l'avons dit précédemment (n° 585).

603. Pour déterminer la résultante des pressions verticales exercées sur AMB, j'abaisse du point quelconque M une perpendiculaire sur le plan horizontal des x et y, qui rencontre en M_1 cette surface AMB. Les élémens ω et ω_{11}, qui répondent aux points M et M_{11}, auront une même projection ω sur ce plan; mais les pressions rapportées à l'unité de surface y seront différentes; et si on les désigne par p et p_{11}, le filet du corps que terminent ces deux élémens, et dont la longueur est MN, sera poussé verticalement de bas en haut par une force $p\omega - p_{11}\omega$. Je suppose, pour plus de simplicité, que le liquide dans lequel le corps est plongé soit homogène; je représente par ρ sa densité, et par l la longueur de MM_{11}, on aura $p - p_{11} = \rho l$, et la pression verticale $\rho l\omega$ sera le poids du volume $l\omega$ du liquide, c'est-à-dire, le poids du volume du liquide dont ce filet du corps occupe la place. En décomposant le corps en filets verticaux et infiniment minces, chacun de ces filets sera poussé de bas en haut par une semblable force; d'où l'on conclut que la résultante de toutes les pressions verticales ne différera du poids des filets fluides remplacés par ceux du corps plongé, que par le sens de son action; en sorte qu'elle sera égale au poids total du volume du fluide que déplace ce corps solide, et appliquée en sens contraire de la pesanteur, au centre de gravité de ce volume; lequel centre de gravité se confondra avec celui du corps même, lorsque celui-ci sera homogène.

Si le corps n'était pas entièrement plongé dans le liquide, on pourrait, dans le calcul de la pression qu'il éprouve, faire abstraction de sa partie située au-dessus du niveau du liquide; le point M_1 appartiendrait alors à la section du corps faite par le prolongement du plan de ce niveau; et, en prenant $p_1 = 0$, ce cas rentrerait dans le précédent. La résultante des pressions verticales, qui sera toujours celle de toutes les pressions, aura alors pour valeur le poids du volume du liquide déplacé par la partie plongée du corps flottant, et pour point d'application le centre de gravité de ce même volume.

604. Ces résultats ont encore lieu, lorsque le liquide est composé de couches horizontales. On y parvient aussi par une considération indirecte, qu'il est bon d'indiquer.

L'équilibre ayant lieu dans ce liquide, il ne sera pas troublé si l'on solidifie une partie quelconque du liquide, de sorte que cette partie devienne un corps plongé ou flottant. Or, pour que les pressions normales exercées sur la surface de ce corps par le liquide environnant, fassent équilibre au poids de cette partie solide, il faudra qu'elles se réduisent à une seule force égale et directement contraire à son poids. D'ailleurs, si l'on remplace la partie solidifiée du liquide par un autre corps qui ait exactement la même surface, il est évident que rien ne sera changé aux pressions du fluide environnant; par conséquent, les pressions exercées sur la surface d'un corps plongé en tout ou en partie dans un liquide stagnant, homogène ou hétérogène, se réduisent toujours à une force unique, égale au poids total des couches horizontales du liquide, dont ce corps occupe la place, et appliquée, en sens contraire de la pesanteur, au centre de gravité de ces mêmes couches.

On conclut de là que, pour l'équilibre d'un corps entièrement plongé dans un liquide, il faut que sa densité moyenne soit égale à celle du liquide dont il occupe la place, et que son centre de gravité, et celui de cette portion de liquide, soient situés sur une même verticale. La seconde condition est toujours remplie, quand le corps est homogène, ainsi que le liquide. Quant aux corps qui ne sont immergés qu'en partie, et qui flottent à la surface du liquide, nous examinerons les conditions de leur équilibre dans le chapitre suivant.

605. Ordinairement, on énonce le principe de l'Hydrostatique qu'on vient de démontrer, en disant qu'un corps plongé dans un liquide, y perd une partie de son poids, égale au poids du fluide qu'il déplace (n° 191).

Il en résulte que pour avoir le véritable poids d'un corps, il doit être pesé dans le vide. Deux corps pesés dans l'air, dans l'eau, ou dans tout autre fluide, et qui se font équilibre au moyen d'une balance exacte, ont des poids réellement différens, à moins que leurs volumes ne soient équivalens. Le poids le plus grand est celui du corps qui a le plus grand volume, puisque ayant éprouvé une plus grande perte dans le fluide, il y fait encore équilibre à l'autre.

Si un même corps est pesé successivement dans le vide et dans l'eau, et que P soit son poids dans le vide, et P′ son poids dans l'eau, P et P — P′ seront les poids absolus de ce corps et de l'eau sous un même volume; ils sont donc entre eux comme les densités de ces deux substances (n° 60). Par conséquent, si l'on prend pour unité la densité de l'eau, et qu'on appelle D celle du corps, on aura

$$D = \frac{P}{P - P'}.$$

C'est d'après cette formule qu'on détermine les densités des corps qui peuvent être pesés dans

l'eau, sans s'y dissoudre, au moyen de la balance hydrostatique.

606. La démonstration du n° 602 s'applique également aux parois latérales d'un vase qui contient un liquide; et l'on en conclura que les composantes horizontales des pressions exercées de dedans en dehors, sur toute la surface intérieure du vase, se détruisent deux à deux; en sorte que si le fond du vase est posé sur un plan fixe et horizontal, l'action des fluides qu'il contient ne pourra pas le mettre en mouvement; ce qui résulte aussi du principe de la conservation du mouvement du centre de gravité (n° 554). Mais si l'on fait une ouverture à l'une des parois latérales, au-dessous du niveau du liquide, celui-ci s'écoulera par cet orifice; et la pression n'ayant plus lieu sur la partie de la paroi qu'on a enlevée, celle qui est exercée à la partie opposée du vase ne sera plus détruite; par conséquent, ce vase sera mis en mouvement en sens contraire de l'écoulement du fluide. Ce principe est celui des différentes sortes de machines à réaction, et sur lequel est fondé le moyen proposé par D. Bernouilli, pour mouvoir les bateaux sans le secours des rames et du vent.

On verra aussi, par le même raisonnement que dans le n° 603, que la pression totale exercée sur le fond du vase et sur ses parois latérales, est toujours égale au poids du fluide qu'il contient, et appliquée, dans le sens de la pesanteur, au centre de gravité de ce fluide. Chaque filet vertical du fluide, qui va, sans interruption, de son niveau à un point quelconque du vase, exerce sur ce point une pression normale, dont la composante est égale au poids de ce même filet. Celui qui rencontre en deux points la surface intérieure du vase, comprenant le fond et les parois latérales, exerce en ces deux points des pressions dont les composantes verticales sont dirigées en sens contraire l'une de l'autre. La composante qui répond au point inférieur, est dirigée dans le sens de la pesanteur, et l'emporte sur l'autre d'une quantité égale au poids de ce filet; et, de cette manière, la résultante des pressions verticales de tous ces filets fluides, n'est autre chose que le poids même du fluide en question.

Il faut distinguer cette pression de celle qui a lieu seulement sur le fond du vase (n° 596), et qui n'est égale au poids du fluide que quand le vase est un cylindre ou un prisme droit. Elle est moindre que ce poids, lorsque le vase s'élargit en allant du fond à sa partie supérieure, parce que les filets verticaux du fluide, qui partent de son niveau, et sont interceptés par les parois latérales, ne pressent pas sur le fond du vase; elle est, au contraire, plus grande que le poids du liquide, quand le vase va en se rétrécissant, parce que les filets verticaux qui partent du fond du vase, et sont interceptés par les parois latérales, exercent néanmoins la même pression verticale sur le fond du vase, que s'ils s'étendaient jusqu'au niveau du liquide; ce qui manque au poids de chacun de ces filets incomplets, étant remplacé par la résistance de la paroi à laquelle ils viennent aboutir.

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES CORPS FLOTTANS.

607. Pour qu'un corps pesant puisse se tenir en équilibre à la surface d'un liquide stagnant, il est nécessaire que son poids soit moindre que celui d'un volume de ce fluide égal au sien; toutefois, il y a des cas où il se forme autour d'un corps flottant un espace vide de peu d'étendue, qui doit être ajouté à son volume, et qui diminue, conséquemment, sa densité moyenne; de sorte que des corps d'un petit volume peuvent surnager, quoique leur densité propre surpasse celle du liquide. Nous ferons abstraction de cette circonstance, qui se rapporte à la théorie des phénomènes capillaires, dont il ne sera pas question dans ce Traité (n° 589).

La densité du corps solide, s'il est homogène, ou sa densité moyenne, s'il ne l'est pas, étant moindre que celle du liquide, le corps s'enfonce dans le fluide, jusqu'à ce que le poids du liquide

qu'il déplace soit devenu égal à son poids entier; et quand cette égalité a lieu, le corps reste en équilibre, si son centre de gravité et celui du fluide déplacé sont situés sur une même verticale; car la pression du liquide qui doit faire équilibre au poids du corps, est égale au poids du liquide déplacé, et appliquée à son centre de gravité, en sens contraire de la pesanteur (n° 603).

Si le corps flottant est homogène, aussi bien que le liquide, le centre de gravité du liquide déplacé coïncide avec celui de la portion immergée du corps. Dans l'état d'équilibre, le volume de cette partie du corps est à celui du corps entier, comme la densité du corps est à celle du liquide; et la détermination des positions d'équilibre d'un corps flottant se réduit à un problème de géométrie, dont voici l'énoncé. Couper un corps par un plan, de manière que le volume d'un segment soit à celui du corps, dans un rapport donné, et que les centres de gravité du segment et du corps se trouvent sur une même perpendiculaire au plan coupant. Quand on a déterminé une section du corps qui satisfait à ces deux conditions, on la place au niveau du liquide, de manière que le segment dont on a considéré le volume, soit situé au-dessous, et l'on a une des positions d'équilibre du corps flottant.

Dans chaque cas particulier, on exprimera ces deux conditions par des équations, dont la solution complète fera connaître toutes les positions d'équilibre de ce corps. Quelquefois leur nombre sera infini, comme dans le cas des solides de révolution dont l'axe est horizontal; d'autres fois, ce nombre sera fini et déterminé; mais il serait difficile de démontrer, *à priori*, qu'il y a toujours une position d'équilibre, quelle que soit la forme du corps.

608. Je choisirai, pour exemple du problème qu'on vient d'énoncer, le cas d'un prisme droit et triangulaire, dont les arêtes sont horizontales. Le plan coupant leur sera évidemment parallèle; de plus, sa direction sera indépendante de la distance comprise entre les deux bases. On pourra donc faire abstraction de la longueur du prisme, et déterminer seulement l'intersection du plan coupant et de l'une des deux bases; de sorte que le problème se rapportera à la géométrie plane; ce qui aurait lieu également dans le cas d'un prisme ou d'un cylindre horizontal à base quelconque.

Soit ABC (fig. 132) l'une des bases du prisme donné. Il peut arriver que deux sommets de ce triangle soient plongés dans le liquide, ou qu'il n'y en ait qu'un seul au-dessus du niveau. J'examinerai d'abord le cas d'un seul sommet immergé; on verra ensuite comment l'autre cas se ramène à celui-là. Soient donc C ce sommet immergé, et MN l'intersection du plan coupant et de la base ABC, qu'il s'agit de déterminer, et qui représentera le niveau du liquide. J'appellerai a, b, c, les côtés donnés de ce triangle ABC, qui sont respectivement opposés aux angles A, B, C; et je désignerai par x et y les côtés inconnus CM et CN du triangle MNC; de sorte qu'on ait

$$BC = a,\ AC = b,\ AB = c,\ CM = x,\ CN = y.$$

L'aire d'un triangle quelconque est égale au produit de deux de ses côtés et du sinus de l'angle compris; on aura donc

$$ABC = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C,\quad MNC = \tfrac{1}{2}\, xy \sin C.$$

Le prisme entier et le prisme plongé dans le liquide sont entre eux comme leurs bases ABC et MNC; on doit donc avoir

$$MNC : ABC :: r : 1;$$

r étant une quantité plus petite que l'unité, qui représente le rapport de la densité du corps flottant à celle du liquide. En mettant pour ABC et MNC leurs valeurs précédentes, cette proportion donne

$$xy = rab. \qquad (1)$$

Maintenant, soit D le milieu de la base AB; menons la droite CD, et prenons sur cette ligne $DG = \frac{1}{3}\, DC$; le point G sera le centre de gravité du triangle ABC. De même, E étant le milieu de MN, si l'on prend sur CE une partie $EF = \frac{1}{3}\, CE$, le point F sera le centre de gravité de MNC. La droite GF devra donc être perpendiculaire à MN; mais, à cause que les lignes CD et CE sont coupées en parties proportionnelles aux points G et F, les droites DE et GF sont parallèles; par conséquent, la droite DE, qui joint les milieux des deux bases AB et MN, est aussi perpendiculaire à MN; et il en résulte que les deux obliques DM et DN sont égales.

Réciproquement si l'on a $DM = DN$, la droite DE sera perpendiculaire à MN, ainsi que sa parallèle GF; donc, pour que la droite qui joint les deux centres de gravité G et F soit perpendiculaire à l'intersection MN, il est nécessaire et il suffit que les valeurs de DM et DN soient égales.

Cela étant, faisons $CD = h$, et désignons par α et β les deux parties DCA et DCB de l'angle ACB. En considérant les deux triangles DCM et DCN, nous aurons

$$\overline{DM}^2 = h^2 + x^2 - 2hx \cos \alpha,$$
$$\overline{DN}^2 = h^2 + y^2 - 2hy \cos \beta;$$

et en égalant ces deux valeurs, il en résultera

$$x^2 - 2hx \cos \alpha = y^2 - 2hy \cos \beta. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont celles qui devront servir à déterminer x et y. Par l'élimination de y, on en déduit

$$x^4 - 2hx^3 \cos \alpha + 2hrabx \cos \beta - r^2 a^2 b^2 = 0. \qquad (3)$$

On tirera donc la valeur de x de cette équation du

quatrième degré; et l'on aura $y_1 = \frac{rab}{x}$ pour la valeur correspondante de y.

L'équation (3) étant d'un degré pair, et ayant son dernier terme négatif, il s'ensuit qu'elle a une racine positive et une négative. Les deux autres racines peuvent être réelles ou imaginaires. Si elles sont réelles, la règle de *Descartes* fait voir que l'équation (3) aura trois racines positives, et une racine négative; car en considérant les signes de ses termes, et soit qu'on donne le signe + ou le signe — au troisième terme, qu'on y peut comprendre avec un coefficient nul, on trouve toujours trois *variations* et une *permanence*. Les inconnues x et y, qui sont les côtés du triangle MNC, ne pouvant être que des quantités positives, respectivement moindres que les côtés CA et CB du triangle ABC, on rejettera donc, comme étrangères à la question, la racine négative de l'équation (3), les valeurs de x plus grandes que a, et celles qui donneraient une valeur de y plus grande que b. Ainsi, il y aura, au plus, trois positions d'équilibre pour lesquelles le sommet C est seul plongé dans le liquide.

609. Si l'on suppose ce sommet hors du fluide, et les deux points A et B au-dessous du niveau MN, le problème sera le même que dans le cas précédent, avec cette seule différence que la quantité r devra être remplacée par $1 - r$ dans les équations (1) et (3). En effet, le triangle ABC, et ses deux parties MNC et MNBA, ayant leurs centres de gravité sur une même droite, et ceux de ABC et de la seconde partie devant être situés sur une perpendiculaire à MN, il faudra toujours que les triangles ABC et MNC aient aussi leurs centres de gravité sur cette perpendiculaire; en sorte que l'on aura d'abord, sans aucun changement, l'équation (2), qui exprime cette condition. D'ailleurs, la proportion

$$\text{MNBA} : \text{ABC} :: r : 1,$$

qui doit avoir lieu maintenant, peut être changée en celle-ci :

$$\text{MNC} : \text{ABC} :: 1 - r : 1;$$

ce qui change aussi l'équation (1) en cette autre :

$$xy = (1 - r)\, ab.$$

En s'en servant pour éliminer y de l'équation (2), on retrouvera l'équation (3), dans laquelle le rapport r sera remplacé par $1 - r$, c'est-à-dire, que l'on aura

$$x^4 - 2hx^3 \cos \alpha + 2h\,(1 - r)\, abx \cos \zeta - (1 - r)^2 a^2 b^2 = 0. \quad (4)$$

En raisonnant comme précédemment, on conclura de cette équation, qu'il y a au plus trois positions d'équilibre, pour lesquelles les deux sommets A et B du solide sont plongés dans le fluide.

Si l'on considère successivement les trois sommets A, B, C, et si l'on examine, pour chaque sommet, les cas où il est seul plongé dans le fluide et seul hors du fluide, on déterminera toutes les positions horizontales d'équilibre du prisme donné; et il résulte de ce qui précède, que ce nombre ne pourra jamais être plus grand que dix-huit.

610. Lorsque le triangle ABC est isoscèle, on peut se passer de l'équation (3) ou (4), et résoudre directement les équations en x et y. Je suppose qu'on ait $b = a$, les triangles CAD et CBD seront rectangles et égaux; on aura

$$\zeta = \alpha, \quad h^2 = a^2 - \tfrac{1}{4} c^2, \quad a \cos \alpha = h;$$

et les équations (1) et (2) deviendront

$$xy = ra^2, \quad y^2 - x^2 - \frac{(4a^2 - c^2)}{2a}(y - x) = 0. \quad (5)$$

On y satisfait d'abord, en prenant

$$x = y = a\sqrt{r};$$

valeurs qui sont admissibles, à cause de $r < 1$ et $a\sqrt{r} < a$. Il en résulte une première position d'équilibre, dans laquelle le triangle MNC est isoscèle, et où la base AB du triangle ABC sera parallèle à MN ou horizontale. En changeant r en $1 - r$, on aura une seconde position, où le point C sera situé hors du liquide, et la base AB toujours horizontale. Mais il peut aussi exister d'autres positions d'équilibre, pour lesquelles cette base sera inclinée.

En effet, si l'on supprime le facteur $y - x$ de la seconde équation (5), il vient

$$y + x = \frac{4a^2 - c^2}{2a}.$$

Celle-ci et la première équation (5) donnant la somme et le produit de deux inconnues x et y, il s'ensuit que ces quantités seront les deux racines d'une même équation du second degré, lesquelles racines auront pour expression

$$\frac{1}{4a}\left[4a^2 - c^2 \pm \sqrt{(4a^2 - c^2)^2 - 16ra^4}\right].$$

On prendra successivement chacune d'elles pour x et l'autre pour y; et quand elles seront toutes deux réelles et moindres que a, il en résultera deux nouvelles positions d'équilibre, dans lesquelles la base AB sera située hors du liquide. En mettant $1 - r$ au lieu de r, et supposant toujours les racines réelles plus petites que a, on aura deux autres positions où cette base sera immergée.

Lorsque les deux racines qu'on vient d'écrire sont égales, la base AB est horizontale, et ces nouvelles positions d'équilibre doivent rentrer dans les

précédentes; et, effectivement, on a alors $4a^2 - c^2 = 4a^2\sqrt{r}$, ce qui donne $y = x = a\sqrt{r}$.

611. Dans le cas du triangle équilatéral, on fera $c = a$, dans les formules précédentes. Les valeurs égales de x et y ne seront pas changées; leurs valeurs inégales deviendront

$$\frac{a}{4}\left(3 \pm \sqrt{9 - 16r}\right),$$

dans le cas d'un seul sommet immergé, et

$$\frac{a}{4}\left(3 \pm \sqrt{16r - 7}\right),$$

dans le cas d'un seul sommet hors du liquide. Il s'agira donc de savoir quelle doit être la fraction r, pour que ces valeurs soient réelles et moindres que a.

Or, si l'on a $r < \frac{9}{16}$ et $> \frac{1}{2}$, la première formule sera réelle, et ses deux valeurs seront moindres que a; hors de ces limites, cette formule sera imaginaire, ou bien une de ses valeurs surpassera a; et de même, pour que les valeurs de la seconde formule soient réelles et plus petites que a, il est nécessaire et il suffit que l'on ait $r < \frac{1}{2}$ et $> \frac{7}{16}$. On voit donc que depuis $r = \frac{9}{16}$ jusqu'à $r = \frac{1}{2}$, la première formule sera seule admissible; que ce sera, au contraire, la seconde qui sera seule admissible depuis $r = \frac{1}{2}$ jusqu'à $r = \frac{7}{16}$; et que pour $r > \frac{9}{16}$ ou $r < \frac{7}{16}$, les deux formules devront être rejetées.

Comme tout est semblable par rapport aux trois sommets du triangle équilatéral, le nombre des positions d'équilibre sera toujours un multiple de trois, et ce nombre total pourra être six ou dix-huit, suivant la valeur de r.

612. Outre leurs positions horizontales d'équilibre, les prismes et les cylindres homogènes ont aussi des positions d'équilibre, dans lesquelles leurs arêtes sont verticales, et leurs bases, parallèles au niveau du liquide, et qui sont doubles pour chaque corps, parce que l'une ou l'autre des deux bases peut être plongée dans le fluide. Un prisme vertical et sa partie immergée ont leurs centres de gravité sur une même perpendiculaire au niveau; le rapport de leurs volumes est le même que celui de leurs hauteurs; et, par conséquent, la hauteur du prisme immergée est à celle du prisme entier, comme la densité du corps est à celle du liquide, ce qui suffit pour déterminer l'enfoncement du corps dans son état d'équilibre.

Les solides de révolution, et généralement tous les corps symétriques autour d'un axe, ont de même deux positions d'équilibre dans lesquels cette droite est verticale, et qu'on déterminera sans difficulté.

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'un ellipsoïde homogène, dont les trois demi-axes soient a, b, c; plaçons l'axe $2c$ verticalement, et soit u la distance du plan des deux autres axes à la section à *fleur d'eau*; u étant une inconnue positive ou négative, selon que cette section se trouvera au-dessous ou au-dessus du centre de l'ellipsoïde. Soit aussi Z l'aire de la section horizontale de ce corps, faite à une distance quelconque z de son centre; le volume du demi-ellipsoïde étant $\frac{2\pi}{3}abc$, on aura celui du segment plongé, en retranchant de $\frac{2\pi}{3}abc$, l'intégrale $\int_0^u Zdz$, qui exprime la valeur de la tranche comprise entre la section à *fleur d'eau* et la section horizontale faite par le centre du corps, et qui aura le même signe que u. Dans le cas d'équilibre, on aura donc

$$\frac{2\pi}{3}abc - \int_0^u Zdz = \frac{4\pi}{3}abcr;$$

r étant toujours le rapport de la densité du corps flottant à celle du liquide. Ce corps étant un ellipsoïde, on aura (n° 89)

$$Z = \frac{\pi ab}{c^2}\left(c^2 - z^2\right);$$

et l'équation d'équilibre deviendra

$$u^3 - 3c^2u - 2(2r - 1)c^3 = 0.$$

Elle aura toujours une seule racine réelle, comprise entre $\pm c$, qui sera positive ou négative, selon que l'on aura $r > \frac{1}{2}$ ou $r < \frac{1}{2}$. Dans les cas extrêmes de $r = 0$ et $r = 1$, cette racine sera $u = c$ et $u = -c$.

Un corps symétrique autour d'un axe vertical, étant plongé successivement et par la même partie, dans différens liquides, s'y enfoncera de quantités dont les volumes seront en raison inverse des densités de ces fluides. C'est sur ce principe qu'est fondé l'usage du *pèse-liqueur* ou *aréomètre*, pour comparer entre elles les densités de divers fluides.

613. Parmi les différentes positions d'équilibre d'un même corps solide flottant à la surface d'un liquide, il y en a qui sont stables, et d'autres qui ne le sont pas; et d'après ce qu'on a vu dans le n° 571, si l'on fait tourner ce corps autour d'un axe horizontal, pour fixer les idées, ses positions successives d'équilibre seront alternativement stables et instantanées. Il importe de distinguer avec soin les premières des dernières, qui ne subsistent assez de temps pour être observées, qu'à raison d'une petite adhérence du corps flottant, au liquide avec lequel il est en contact.

Supposons d'abord que le corps flottant soit parfaitement symétrique, pour la forme et pour la den-

sité de ses parties, de part et d'autre d'une section verticale ABCD (fig. 133). Soit G son centre de gravité, qui appartiendra à cette section. Dans son état d'équilibre, soit aussi AC la droite où cette section est coupée par le niveau du liquide, prolongé dans l'intérieur du corps, et H le centre de gravité du volume du fluide déplacé par le corps; ce point appartiendra aussi à la section ABCD, et se trouvera sur la perpendiculaire BGK, abaissée du point G sur la droite AC. Quand le corps sera homogène, H sera au-dessous de G, comme la figure le suppose; mais quand on aura *lesté* le corps flottant, c'est-à-dire, quand on aura augmenté la densité de sa partie inférieure, le point G pourra tomber au-dessous du point H.

Cela étant, concevons que l'on écarte un peu le corps flottant de sa position d'équilibre, en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire à ABCD, et l'abandonnant ensuite à lui-même sans vitesse initiale. Quel que soit le mouvement que le corps prendra, la section ABCD demeurera toujours verticale, et comprendra constamment le centre de gravité G. Dans cette nouvelle position, soit A'C' (fig. 134), la droite qui représente le niveau du liquide, et qui coupe AC au point E, de manière que le segment du corps qui répond à AEA', soit entré dans le liquide, et que celui qui répond à CEC', en soit sorti. Je supposerai égaux les volumes de ces deux segmens; il en résulte que le volume du liquide déplacé par le corps n'aura pas changé; le poids de ce volume de fluide sera donc encore égal à celui du corps, comme dans l'état d'équilibre; et, le centre de gravité G du corps flottant doit se mouvoir comme si la masse de ce corps y était réunie, et que le poids de ce corps et la pression du fluide y fussent appliquées (n° 438); et ces deux forces verticales agissant en sens contraire l'une de l'autre, et étant égales dans notre hypothèse, on n'aura point à considérer le mouvement du point G.

Soient H' le centre de gravité du volume du liquide déplacé, après que le corps a été écarté de sa position d'équilibre. Ce point appartiendra, comme le centre de gravité G, à la section ABCD; mais ils ne seront plus situés, en général, sur la même verticale; la pression du fluide fera donc tourner le corps autour d'une droite passant par le point G, et perpendiculaire à la section ABCD; et il s'agira de savoir si ce mouvement tendra à ramener le corps à sa position d'équilibre, ou à l'en écarter davantage, et à le faire *chavirer*.

Or, si l'on mène par le point H' la verticale H'M, qui rencontre la droite BGK perpendiculaire à AC, au point M, il est évident que la pression du fluide qui s'exerce de bas en haut suivant la direction H'M, tendra à ramener la droite BGK à sa position verticale, correspondante à l'équilibre, ou à l'en écarter davantage, selon que le point M sera situé au-dessus ou au-dessous du point G. Dans le premier cas, l'équilibre sera stable, et dans le second, il ne le sera pas. Quand le point M et le point G coïncideront, le corps restera encore en équilibre, dans la position voisine de la première, où on l'aura placé.

Si le centre de gravité G tombe au-dessous de celui du volume du liquide déplacé, qui était H, dans l'état d'équilibre, c'est-à-dire, si ce point G se trouve entre les points B et H, sur la ligne BK, le point M se trouvera au-dessus de G, et l'équilibre sera nécessairement stable. Si, au contraire, le point G est au-dessus de H, comme dans le cas d'un corps homogène, le point M pourra se trouver au-dessus ou au-dessous de G, et l'équilibre pourra être stable ou non stable. Le point M, dont la considération sert à distinguer l'un de l'autre, les deux états d'équilibre d'un corps flottant, symétrique par rapport à une section verticale, est ce qu'on appelle le *métacentre*. Mais nous allons donner une autre régle, déduite du principe des forces vives pour s'assurer, dans tous les cas, de la stabilité de cet équilibre.

614. Pour cela, considérons un corps d'une forme quelconque, homogène ou hétérogène, en équilibre à la surface de l'eau. Soient ABCD (fig. 135), la section de ce corps par le niveau de l'eau prolongé dans son intérieur, G le centre de gravité du mobile, H celui du volume d'eau déplacé par la partie immergée de ce corps, V le volume de cette partie, et M la masse du corps entier; puisqu'on le suppose en équilibre, la droite GH est perpendiculaire au plan ABCD, et la masse d'eau déplacée est égale à celle du corps, de sorte qu'en appelant ρ la densité de l'eau, on a

$$M = V\rho.$$

Supposons qu'on élève la section ABCD au-dessus du niveau de l'eau (fig. 136), ou qu'on l'abaisse au-dessous, d'une quantité très petite; qu'en même temps, on incline un tant soit peu le plan de cette section; et, pour plus de généralité, qu'on imprime aussi de petites vitesses aux points du mobile. L'équilibre sera troublé; et la question de la stabilité consistera à examiner si, par suite du mouvement que le corps prendra, la section ABCD, fixe dans l'intérieur du mobile, s'écartera de plus en plus du niveau de l'eau, ou si elle tendra à y revenir, en oscillant de part et d'autre de ce niveau. Pendant le mouvement qui aura lieu, le niveau naturel de l'eau coupe le corps flottant suivant une section variable dans son intérieur, qu'on appelle le *plan de flottaison*. A un instant quelconque, soient A'B'C'D' cette section; AB''CD'' une autre section variable de ce corps, faite par un plan horizontal qui passe par le centre de gravité de la section ABCD; AC l'intersection de ABCD et AB''CD'', variable sur ABCD; θ l'inclinaison mutuelle de ces deux sections; ζ la distance de AB''CD'' au plan de flottaison, laquelle distance sera regardée comme positive ou comme négative, suivant que cette section se trouvera au-dessous ou au-dessus du niveau de l'eau. Les quantités variables θ et ζ sont supposées très petites à l'origine du mouvement;

il s'agira de savoir si elles resteront très petites pendant toute sa durée.

615. En appelant u la vitesse variable d'un élément quelconque dm de la masse du mobile, la somme des forces vives de tous ses points sera donnée par l'intégrale $\int u^2 dm$ étendue à la masse entière, et l'équation qui résulte du principe général des forces vives, sera de la forme (n° 565)

$$\int u^2\, dm = c + 2\varphi; \qquad (a)$$

c étant une constante arbitraire, et φ une fonction dépendante des forces qui sont appliquées aux points du mobile.

Ces forces sont la gravité, qui agit sur tous ses points, et les pressions verticales que le fluide exerce sur la partie immergée de la surface du corps; or, on peut substituer à ces pressions des forces motrices agissant sur tous les élémens dm de sa masse, qui sont situés au-dessous du niveau de l'eau, en prenant pour chaque élément une force dirigée en sens contraire de la pesanteur, et égale au poids du volume d'eau qu'il remplace; car la résultante de ces forces motrices aura la même grandeur, la même direction et le même point d'application, que celle des pressions verticales (n° 603). De cette manière, en désignant par g la gravité et par dv l'élément du volume du mobile qui correspond à l'élément dm de sa masse, la force motrice de dm sera $gdm - g\rho dv$, si ce point matériel se trouve au-dessous du niveau de l'eau, et gdm s'il se trouve au-dessus. Soit de plus z la distance variable de dm au plan de flottaison, positive ou négative, suivant que dm sera au-dessous ou au-dessus de ce plan; il résulte de la valeur générale de la fonction φ, donnée dans le n° 565, que dans la question qui nous occupe, on devra avoir

$$\varphi = \int zgdm - \int zg\rho dv;$$

la première de ces deux intégrales s'étendant à la masse entière du corps flottant, et la seconde, seulement à la partie immergée de son volume.

En abaissant du centre de gravité G de la masse M, une perpendiculaire GE sur le plan A'B'C'D', et faisant $GE = z_1$, on aura d'abord

$$\int zgdm = gMz_1,$$

pour la valeur de la première intégrale. Je partage la seconde en deux parties, l'une relative au volume V situé au-dessous de ABCD, dans l'état d'équilibre, l'autre relative au volume comprise entre les sections ABCD et A'B'C'D'. J'ai alors $gV\rho z'$ pour la valeur de la première partie; z' étant la distance variable du centre de gravité H du volume V au plan de flottaison, c'est-à-dire, la longueur de la perpendiculaire HF abaissée du point H sur le plan A'B'C'D'. En représentant donc pour un moment par k la valeur de l'intégrale $\int zdv$, étendue à tous les élémens dv du volume contenu entre ABCD et A'B'C'D', $g\rho k$ sera la seconde partie de la seconde intégrale comprise dans l'expression de φ, et nous aurons

$$\varphi = gMz_1 - g\rho Vz' - g\rho k,$$

pour la valeur complète de cette quantité. Mais la droite GH étant perpendiculaire au plan ABCD, l'angle qu'elle fait avec la verticale GE est l'inclinaison θ du plan ABCD sur un plan horizontal; si donc on appelle a la longueur constante de GH, on aura

$$z_1 = z' \pm a \cos\theta;$$

le signe supérieur ayant lieu quand le point G est au-dessous du point H, et le signe inférieur dans le cas contraire. En substituant cette valeur de z' dans celle de φ, et observant que $M = V\rho$, il vient

$$\varphi = \pm g\rho a V \cos\theta - g\rho k;$$

et il ne restra plus qu'à déterminer la valeur de l'intégrale représentée par k.

616. Pour l'obtenir, je décompose l'aire de la section ABCD en élémens infiniment petits; je les projette tous sur le plan de flottaison A'B'C'D'; ce qui divise le volume compris entre ces deux sections du corps, en une infinité de cylindres verticaux qui ont pour bases les projections horizontales des élémens de ABCD. Je coupe ensuite un cylindre quelconque par une infinité de plans horizontaux, et je prends pour l'élément dv du volume que je considère, la partie de ce cylindre comprise entre deux plans consécutifs, dont les distances au plan de flottaison sont z et $z + dz$, de sorte que cet élément soit égal à la base du cylindre, multipliée par dz. Or $d\lambda$ étant l'élément différentiel de la section ABCD, la projection horizontale, ou la base du cylindre correspondant, sera $d\lambda \cos\theta$, puisque θ est l'inclinaison du plan de $d\lambda$ sur le plan de projection; on aura donc

$$dv = dzd\lambda . \cos\theta;$$

par conséquent, l'intégrale $\int zdv$, relative à l'un des cylindres verticaux, sera le produit de $d\lambda . \cos\theta$, et de $\int zdz$, ou égale à $\frac{1}{2} y^2 \cos\theta . d\lambda$, en appelant y la hauteur de ce cylindre, ou la perpendiculaire abaissée de $d\lambda$ sur le plan de flottaison. La quantité qu'on a représentée par k sera donc

$$k = \frac{1}{2} \cos\theta \int y^2\, d\lambda;$$

l'intégrale s'étendant à l'aire entière de ABCD.

La perpendiculaire y se compose de deux parties : l'une comprise entre les deux plans parallèles A'B'C'D' et AB''CD'', qu'on a représentée par ζ, l'autre comprise entre $d\lambda$ et le second plan, qui sera égale à $l \sin\theta$, en désignant par l la distance de cet élément à l'intersection AC des deux plans ABCD et AB''CD''; on aura donc

$$y = \zeta + l \sin\theta,$$

où l'on regardera l comme une quantité positive ou négative, selon que $d\lambda$ se trouvera au-dessous ou au-dessus du second plan. En substituant cette valeur dans l'équation précédente, et observant que ζ et θ sont constantes dans l'intégration indiquée, il vient

$$k = \frac{1}{2}\zeta^2 \cos\theta \int d\lambda + \sin\theta \cos\theta \int l d\lambda + \frac{1}{2}\sin^2\theta \cos\theta \int l^2 d\lambda.$$

J'appelle b l'aire de la section ABCD, où la valeur de $\int d\lambda$; la droite AC renfermant, par hypothèse, le centre de gravité de cette section, l'intégrale $\int l d\lambda$ est nulle; et si l'on fait

$$\int l^2 d\lambda = b\gamma^2,$$

de sorte que γ soit une ligne dépendante de la figure et de l'étendue de ABCD, on aura finalement

$$k = \frac{1}{2} b \cos\theta \left(\zeta^2 + \gamma^2 \sin^2\theta\right).$$

Cette formule n'est pas rigoureusement la valeur de k; pour qu'elle le fût, il faudrait que le volume compris entre les sections A'B'C'D' et ABCD fût un cylindre vertical, tronqué par le plan de la section ABCD; mais quelle que soit sa forme, on conçoit que la valeur exacte de k doit différer très peu de la précédente, tant que les variables ζ et θ sont très petites; et il est facile de s'assurer que la différence de ces valeurs est une quantité du troisième ordre à l'égard de ζ et θ. En substituant la valeur approchée de k dans l'expression de ρ, faisant aussi

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{2.3} + \text{etc.}, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \text{etc.},$$

et négligeant tous les termes du troisième ordre par rapport à ces variables θ et ζ, nous aurons donc

$$\rho = \pm g\rho V a \mp \frac{1}{2} g\rho V a \theta^2 - \frac{1}{2} g\rho b \left(\zeta^2 + \gamma^2 \theta^2\right),$$

ce qui change l'équation (a) en celle-ci :

$$\int u^2 dm + g\rho \left[b\zeta^2 + (b\gamma^2 \pm Va)\theta^2\right] = c, \quad (b)$$

en comprenant le terme $\pm 2g\rho Va$ dans la constante arbitraire c.

617. La valeur de cette constante se déterminera d'après les valeurs de u, ζ, θ, à l'origine du mouvement, qui sont supposées très petites; c est donc aussi une quantité très petite; et, de plus, l'équation (b) montre que sa valeur est positive, si le coefficient $b\gamma^2 \pm Va$ est positif, quand le mouvement commence. Si ce coefficient reste positif pendant toute la durée du mouvement, on peut conclure de cette même équation, par le raisonnement déjà employé dans le n° 571, que les variables ζ et θ demeureront constamment très petites; de manière qu'on aura à un instant quelconque,

$$\theta < \sqrt{\frac{c}{g\rho\left(b\gamma^2 \pm Va\right)}}, \quad \zeta < \sqrt{\frac{c}{g\rho b}};$$

ce qui fait voir que la stabilité de l'équilibre du corps flottant tient au signe de la quantité $b\gamma^2 \pm Va$, et que cet équilibre sera stable toutes les fois que cette quantité sera positive à l'origine et pendant toute la durée du mouvement.

L'intégrale $\int l^2 d\lambda$, qui est représentée par $b\gamma^2$, ne peut être qu'une quantité positive, puisque tous ses élémens sont positifs. Le terme $\pm Va$ doit être pris avec le signe $+$, quand le point G est plus bas que le point H; donc, dans ce cas, le coefficient $b\gamma^2 \pm Va$ est positif, et l'équilibre est stable. Lors donc que le centre de gravité de la masse entière d'un corps flottant est plus bas que celui du volume d'eau qu'il déplace dans sa position d'équilibre, on peut être certain de la stabilité de cet équilibre par rapport à tous les petits mouvemens qu'il est possible d'imprimer à ce corps.

Si, au contraire, le point H est plus bas que le point G, le terme $\pm Va$ doit être pris avec le signe $-$; il faut alors qu'on ait $b\gamma^2 > Va$, pour que le coefficient $b\gamma^2 \pm Va$ soit positif, et qu'on puisse assurer la stabilité de l'équilibre. Or, la grandeur de la ligne γ varie avec la position de la droite AC, qui passe toujours par le centre de gravité de la section ABCD, et peut tourner autour de ce point pendant la durée du mouvement; mais en faisant faire à la droite AC une révolution entière, il est évident qu'il y aura une position dans laquelle la ligne γ sera plus petite que dans toute autre position; si donc on calcule cette plus petite valeur de γ, et qu'on trouve $b\gamma^2 > Va$, il sera certain que le coefficient $b\gamma^2 \pm Va$ ne peut devenir négatif, et, par conséquent, que l'équilibre est stable.

Dans un vaisseau, par exemple, il est aisé de voir que la droite AC, à laquelle répond le *minimum* de l'intégrale $\int l^2 d\lambda$, est la ligne qui va de la *proue* à la *poupe*. On partagera donc l'aire de la section à *fleur d'eau* en élémens infiniment petits; puis on déterminera par le calcul intégral la somme de tous ces élémens, multipliés respectivement par le carré de leurs distances à cette ligne; et pourvu que cette intégrale surpasse le produit du volume d'eau déplacé par le vaisseau, et de la distance du centre de gravité de ce volume à celui du vaisseau, on pourra assurer que l'équilibre est stable, par rapport à tous les petits mouvemens du vaisseau, lors même que le second centre de gravité sera plus élevé que le premier.

618. Après nous être occupé de l'équilibre et de la stabilité des corps flottans, nous allons actuellement déterminer leur mouvement, lorsqu'on les a un peu écartés d'une position d'équilibre stable. Pour résoudre la question d'une manière complète, il faudrait avoir égard à la fois à ce mouvement et à celui du liquide; c'est ce que je tâcherai de faire dans un autre ouvrage. Maintenant, je ne

tiendrai pas compte du mouvement du fluide; et pour simplifier le problème, relativement au corps solide, je supposerai qu'il soit symétrique de part et d'autre d'un plan qui restera vertical pendant tout le mouvement.

Ce plan renferme les centres de gravité G et H du mobile et du volume de fluide qu'il déplace dans son état d'équilibre. Dans cet état, la droite GH est verticale; on l'incline en la faisant tourner dans ce plan autour du point G; puis on abaisse ou on élève, parallèlement à elle-même, cette droite dans ce même plan; on abandonne ensuite le mobile à l'action de la pesanteur et du fluide environnant, sans lui imprimer aucune vitesse initiale; et il est évident que la section du mobile faite par le plan dont il s'agit, et qui le coupe en deux parties symétriques, demeurera constamment verticale. L'intersection AC des sections ABCD et AB''CD'', restera toujours perpendiculaire à ce plan vertical; et comme la droite AC renferme, par hypothèse, le centre de gravité de ABCD, il s'ensuit que ce centre sera le point K où elle coupe ce même plan, et que la droite AC rencontrera toujours le contour de ABCD dans les mêmes points A et C. Indépendamment de la symétrie du corps par rapport au plan perpendiculaire à AC, je supposerai, en outre, pour simplifier encore plus la question, que la droite GK soit perpendiculaire au plan de la section ABCD; ce qui aura lieu, par exemple, lorsque le plan des deux droites GK et AC coupera aussi le mobile en deux parties symétriques.

Au bout du temps quelconque t, compté de l'origine du mouvement, je représenterai par $z_{,}$ la distance GE du point G au plan fixe A'B'C'D', par ζ la distance mutuelle des deux plans horizontaux AB''CD'' et A'B'C'D', par θ l'angle KGE compris entre la droite GK et la verticale GE, par y la distance de l'élément quelconque $d\lambda$ de la section ABCD au plan A'B'C'D', et par x sa distance au plan vertical mené par le point G et parallèle à la droite AKC. Je désignerai aussi par l la distance constante de cet élément à cette droite, et par h la longueur donnée de GK. Il est aisé de voir qu'on aura

$$z_{,}=\zeta+h\cos\theta,\ y=\zeta+l\sin\theta,\ x=l\cos\theta+h\sin\theta,$$

où l'on regardera l, h, ζ, comme des quantités positives ou négatives, selon que l'élément $d\lambda$ est à droite ou à gauche de la droite AKC, que la droite GK se trouve à droite ou à gauche de la verticale GE, et que le plan AB''CD'' est au-dessous ou au-dessus de A'B'C'D'. Enfin, b étant l'aire de la section ABCD, et γ la même ligne que précédemment, on aura aussi

$$\int d\lambda=b,\quad \int l\,d\lambda=0,\quad \int l^2\,d\lambda=b\gamma^2\ ;\quad (1)$$

les intégrales s'étendant à tous les élémens de b.

Les variables ζ et θ feront connaître la position du mobile à chaque instant. Pour $t=0$, on aura

$$\theta=\alpha,\quad \zeta=\zeta,\quad \frac{d\theta}{dt}=0,\quad \frac{d\zeta}{dt}=0,$$

parce qu'on suppose nulles les vitesses initiales de tous les points du corps, et en désignant par α et ζ des quantités très petites et données. Le problème consistera à déterminer les valeurs de θ et ζ en fonctions de t, en supposant que ces variables demeurent très petites pendant toute la durée du mouvement; supposition qui permet de négliger le carré de θ et le produit de θ et ζ, et de considérer comme un cylindre tronqué, le volume compris entre ABCD et A'B'C'D'.

619. Le centre de gravité G se mouvra comme si la masse M du mobile y était réunie, et que le poids Mg du corps et la résultante des pressions du fluide y fussent appliqués. Cette résultante est dirigée en sens contraire de Mg; elle est égale à $(V+U)\rho g$, en désignant par V le volume d'eau déplacé par le mobile dans son état d'équilibre, et par $V+U$ ce volume au bout du temps t. La force motrice du point G, dirigée dans le sens de la pesanteur, sera donc $Mg-(V+U)\rho g$, ou simplement $-U\rho g$, à cause de $M=V\rho$; sa vitesse initiale étant nulle, il ne sortira pas de la verticale où il se trouve à l'origine du mouvement, et l'équation de son mouvement sur cette droite sera

$$M\frac{d^2 z_{,}}{dt^2}=-\rho g U.$$

Abstraction faite du signe, U est le volume compris entre les deux sections ABCD et A'B'C'D'; de sorte qu'en décomposant ce volume en prismes verticaux, comme précédemment, on aura

$$U=\int y\cos\theta\,d\lambda\ ;$$

l'intégrale s'étendant à tous les élémens de b. En mettant pour y sa valeur précédente, on en conclut

$$U=b\zeta\cos\theta.$$

Si donc on prend l'unité pour $\cos\theta$ dans cette valeur et dans celle de $z_{,}$, qu'on les substitue ensuite dans l'équation du mouvement du point G, et qu'on y mette aussi $V\rho$ au lieu de M, il vient

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{gb\zeta}{V}=0.\quad (2)$$

En même temps, le mobile tournera autour du point G, comme s'il était fixe, et que les forces qui le sollicitent ne fussent pas changées (n° 438). Ce mouvement de rotation aura donc lieu autour de l'axe mené par le point G, et perpendiculaire au plan qui coupe le mobile en deux parties symétriques, et il sera dû uniquement aux pressions du fluide environnant, puisque le poids du corps passe

constamment par ce point; par conséquent, l'équation de ce mouvement sera (n° 392)

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \mu,$$

en désignant par Mk^2 le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation, par ω sa vitesse angulaire de rotation au bout du temps t, et par μ le moment total des pressions au même instant et par rapport au même axe. On regardera la vitesse ω comme positive ou comme négative, selon que le mouvement aura lieu dans le sens indiqué par la flèche s, ou dans le sens opposé; de sorte que l'on aura

$$\omega = -\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

et, cela étant, on devra prendre avec le signe + ou avec le signe —, dans la valeur de μ, les momens des pressions qui tendront à faire tourner dans le sens de la flèche s, ou dans le sens opposé.

Or, le moment total μ pourra se diviser en deux parties, l'une relative au volume constant V, et l'autre au volume variable U. La partie de la pression correspondante au premier volume est égale à $V\rho g$, appliquée au point H, et dirigée suivant HF; la perpendiculaire abaissée du point G sur cette droite prolongée, s'il est nécessaire, a pour valeur $a \sin\theta$, en désignant par a la distance GH : la première partie du moment μ sera donc $\pm Va\rho g \sin\theta$, où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le point H sera plus haut ou plus bas que le point G. Quant à la partie de μ qui répond à U, si l'on décompose toujours ce volume en prismes verticaux, et que l'on considère la pression correspondante au prisme quelconque $y\cos\theta d\lambda$, laquelle est égale et contraire au poids du volume d'eau qu'il déplace, on aura $\rho g xy \cos\theta d\lambda$ pour le moment de cette pression, et, par conséquent, $\rho g \int xy \cos\theta d\lambda$ pour la seconde partie de μ; l'intégrale s'étendant à l'aire b tout entière. En mettant pour x et y leurs valeurs, et ayant égard aux équations (1), cette quantité deviendra $(\gamma^2 \cos^2\theta + k\zeta)\rho g b \cos\theta \sin\theta$; par conséquent, la valeur complète de μ sera

$$\mu = (b\gamma^2 \cos^2\theta \pm Va + bk\zeta \cos\theta)\rho g \sin\theta.$$

Je réduis, dans cette valeur, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ à l'unité et à θ, et je néglige le produit de ζ et θ; puis je la substitue, avec les valeurs de M et de ω, dans l'équation du mouvement de rotation, qui devient, de cette manière,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(b\gamma^2 \pm Va)g\theta}{Vk^2} = 0. \quad (3)$$

Le problème dépend donc des deux équations différentielles (2) et (3); et comme les variables θ et ζ y sont séparées, il s'ensuit que le mouvement de rotation du corps flottant et celui de son centre de gravité seront indépendans l'un de l'autre; circonstance qui tient à ce qu'on a supposé la droite GK, qui va du centre de gravité du mobile à celui de ABCD, perpendiculaire à cette section.

En intégrant ces deux équations, et déterminant les constantes arbitraires d'après les valeurs initiales de ζ, θ, $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, on a

$$\zeta = \mathfrak{C} \cos t\sqrt{\frac{gb}{V}}, \quad \theta = \alpha \cos\left[\frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(b\gamma^2 \pm Va)}{V}}\right].$$

L'ordonnée verticale du centre de gravité étant égale à $h + \zeta$, quand on néglige le carré de θ, il s'ensuit que le mouvement de ce point sera le même que celui d'un pendule simple dont la longueur serait $\frac{V}{b}$. Pour que la valeur de θ ne croisse pas indéfiniment, c'est-à-dire, pour que l'équilibre, d'où l'on a écarté le corps flottant, soit stable, il faudra et il suffira que la quantité $b\gamma^2 \pm Va$ soit positive; ce qui s'accorde avec le théorème du n° 617. Cette condition étant remplie, les oscillations de la droite GK, de part et d'autre de la verticale GE, seront les mêmes que celles d'un pendule simple qui aurait $\frac{Vk^2}{\mathfrak{C}\gamma^2 \pm Va}$ pour longueur.

Si le corps flottant n'était pas symétrique de part et d'autre du plan des droites GK et AKC, et que la perpendiculaire abaissée du point G sur la section ABCD différât de la droite GK, les variables ζ et θ ne seraient plus séparées dans les équations (2) et (3); la première renfermerait un terme multiplié par $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et la seconde un terme qui aurait ζ pour facteur; les mouvemens de rotation et du point G ne seraient plus indépendans l'un de l'autre; et le mobile pourrait exécuter quatre sortes d'oscillations simples, dans lesquelles son mouvement se décomposerait toujours, conformément au principe de la coexistence des petites oscillations, et qui se réduisent à deux dans le cas particulier que nous venons de considérer.

CHAPITRE V.

DE LA MESURE DES HAUTEURS PAR L'OBSERVATION DU BAROMÈTRE.

620. D'après ce qu'on a vu dans le n° 599, l'équation d'équilibre du mercure contenu dans la branche fermée du baromètre, et de la pression atmosphérique qui a lieu dans la branche ouverte, est

$$mgh = \varpi; \qquad (1)$$

ϖ désignant cette pression rapportée à l'unité de surface, g la gravité, m la densité du mercure, et h la différence de niveau de ce fluide dans les deux branches du baromètre; et en supposant qu'il n'y ait aucune pression sensible au-dessus de son niveau dans la branche fermée.

De ce que l'équilibre ne doit pas être troublé, si l'on suppose que la branche ouverte du baromètre se prolonge jusqu'aux limites de l'atmosphère, nous avons conclu que la pression ϖ est le poids d'une colonne verticale et cylindrique de l'atmosphère, qui aurait pour base l'unité de surface et pour hauteur celle de ce fluide. Ce poids est donc celui d'un cylindre de mercure, de même base, et dont la hauteur est environ $0^m,76$; et il en résulte que la pression de l'atmosphère sur chaque mètre carré de la surface de la terre, est à peu près dix mille kilogrammes.

Quand on s'élève au-dessus de cette surface, la hauteur et le poids de la colonne d'air qui presse sur le mercure du baromètre, diminuent de plus en plus; la hauteur h doit donc aussi diminuer, et il doit exister un rapport entre cette hauteur et celle dont on s'est élevé, qui fera connaître l'une au moyen de l'autre. Cette détermination sera l'objet spécial de ce chapitre; mais auparavant, il convient de tirer quelques conséquences de l'équation (1), et d'exposer les lois de la pression de l'air ou d'un gaz quelconque, relativement à sa densité et à sa température.

621. En appelant S la surface totale de la terre, exprimée en mètres carrés, la masse de l'atmosphère sera égale à $mS\,(0^m,76)$; m étant toujours la densité du mercure. La masse de la terre est $\frac{1}{3}\delta S r$, en désignant par r son rayon, et par δ sa densité moyenne. Si donc la fraction f représente le rapport de la première masse à la seconde, on aura

$$f = \frac{3m\,(0^m,76)}{\delta r};$$

et comme on a

$$2\pi r = 40000000^m,\ m = 13^m,5975,\ \delta = 5^m,50,$$

on en conclura

$$f = 0,0000008854;$$

en sorte que la masse de l'atmosphère est un peu moindre qu'un millionième de celle de la terre.

Si l'air avait la même densité dans toute la hauteur de la colonne atmosphérique, la hauteur de cette colonne et la hauteur h du mercure dans le baromètre seraient en raison inverse des densités de l'air et du mercure; en appelant l la hauteur de l'atmosphère, dans cette hypothèse, et désignant par ρ la densité de l'air à la température zéro et sous la pression barométrique $0^m,76$, on aura donc

$$l = \frac{m}{\rho}\,(0^m,76);$$

et à cause de (n° 61)

$$\frac{m}{\rho} = 10462,$$

il en résulte, à très peu près,

$$l = 7950^m.$$

L'atmosphère doit évidemment s'étendre beaucoup plus haut, puisque la densité et le poids de ses couches diminuent à mesure qu'elles s'élèvent au-dessus de la surface de la terre. On fixera une limite qu'elle ne peut atteindre, en déterminant la hauteur à laquelle la force centrifuge est égale à la pesanteur; car au delà, la force centrifuge disperserait les molécules d'air dans l'espace. C'est à l'équateur que cette limite est le moins élevée; or, en ce lieu, la force centrifuge est $\frac{g}{289}$ (n° 178) à la surface de la terre; à une hauteur z au-dessus

de cette surface, elle devient $\frac{g(r+s)}{289r}$, et l'intensité de la pesanteur est $\frac{gr^2}{(r+s)^2}$, en désignant par r le rayon de la terre; la limite dont il s'agit sera donc déterminée par l'équation

$$\frac{r+s}{289r} = \frac{r^2}{(r+s)^2};$$

de laquelle on tire, pour cette limite,

$$s = r\,(\sqrt[3]{289} - 1),$$

c'est-à-dire, à peu près cinq fois le rayon de la terre. Mais il y a lieu de croire que, bien avant d'atteindre à une si grande hauteur, l'air est liquéfié par le froid, qui augmente rapidement à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère. Nous ne connaissons pas la loi de cette augmentation à l'air libre, qu'il ne faut pas confondre avec celle que l'on observe sur les montagnes, où la température de l'air et celle du sol s'influencent mutuellement; la seule donnée que nous ayons sur ce sujet, est celle qui résulte de l'ascension aérostatique de M. Gay-Lussac, dans laquelle il s'est élevé à une hauteur de 6980m : les températures de l'air à la surface de la terre et à cette hauteur étaient de 30°,75 et — 9°,50, du thermomètre centigrade; ce qui fait une diminution d'environ un degré pour 175m d'élévation, en supposant le décroissement de la chaleur uniforme.

622. Si l'on ferme en C (fig. 129), la branche ouverte du baromètre, ou, plus généralement, si l'on place cette branche dans un vase H fermé de toutes parts (fig. 137), l'équilibre du système ne sera pas troublé : ce sera alors la pression exercée en E par l'air contenu dans ce vase, qui fera équilibre à celle de la colonne DF du mercure, suspendue dans la branche fermée, au-dessus de son niveau E dans la branche ouverte. Cette pression rapportée à l'unité de surface, ou ce qu'on appelle la force élastique de l'air, aura donc pour mesure la pression mgh du mercure, et elle sera équivalente au poids ϖ de la colonne atmosphérique. Un baromètre qui s'ouvre ainsi dans un vase fermé, et qui sert à mesurer la force élastique de l'air ou d'un fluide quelconque, contenu dans ce vase, s'appelle alors un *manomètre*. Le poids mgh du mercure dépend de la nature, de la densité et de la température de ce fluide élastique.

Si l'on transporte un *manomètre* d'un lieu dans un autre, et que la température et la densité de l'air contenu dans le vase H soient les mêmes en ces deux endroits, il faudra que la hauteur du mercure varie en raison inverse de la gravité, afin que le poids de la colonne de mercure reste le même. L'observation de cette hauteur à des latitudes différentes pourrait donc servir à mesurer les variations de la pesanteur; mais, pour l'exactitude de cette mesure, il faudra avoir égard à l'augmentation du volume occupé par l'air contenu dans H, qui résultera d'une augmentation de hauteur du mercure dans la branche fermée.

Ainsi, supposons que g et h soient la gravité et la hauteur DF du mercure, en un lieu de la terre; le manomètre étant transporté en un autre lieu, et la température étant restée la même, supposons que le mercure se soit élevé de D en D' dans la branche fermée, et qu'il se soit abaissé, en même temps, de E en E' dans la branche ouverte; menons par le point E' un plan horizontal, qui coupe en F' la branche fermée; désignons par h' la différence D'F' de niveau du mercure dans les deux branches, et par g' la gravité correspondante. Les pressions barométriques seront entre elles comme gh et $g'h'$, dans les deux observations; elles seront proportionnelles aux densités du fluide contenu dans H, et, par conséquent, en raison inverse des volumes qu'il occupera dans ce vase; en appelant ces volumes V et V', on aura donc

$$\frac{g'h'}{gh} = \frac{V}{V'}.$$

Or, si l'on appelle c l'aire de la section horizontale du tube au point D, le volume du mercure compris entre D et D' sera $(h' - h)\,c$; mais, à cause de l'incompressibilité de ce fluide, il faudra, quelle que soit la forme du vase H, que le volume V' surpasse V de cette quantité $(h' - h)\,c$; on aura donc

$$V' = V + (h' - h)\,c;$$

et l'on conclura de l'équation précédente

$$\frac{g'}{g} = \frac{Vh}{[V + (h' - h)\,c]\,h'},$$

pour le rapport des intensités de la pesanteur dans les deux lieux des observations. Mais, quelque soin que l'on apporte dans la mesure des quantités que cette formule renferme, ce procédé sera toujours beaucoup moins susceptible d'exactitude que celui qui est fondé sur les expériences du pendule.

623. Maintenant, fermons en C (fig. 129) la branche ouverte du baromètre, et ouvrons en A la branche qui était fermée; la pression atmosphérique s'ajoutant à celle du mercure, l'air contenu dans EC va se comprimer, et, conséquemment, le niveau du mercure s'élèvera dans cette branche et s'abaissera dans l'autre. Ajoutons dans cette autre branche une nouvelle quantité de mercure, de manière que la différence de niveau dans les deux branches soit encore égale à h, comme auparavant. Dans cet état, si le mercure s'est élevé de D en D' et de E en E', et que l'on mène par le point E' un plan horizontal qui coupe l'autre branche en F', on aura D'F'=DF. Au point F', la pression du mercure sera mgh; en ajoutant la pression atmosphérique ϖ, qui a lieu au niveau D', on aura

$mgh+v$, ou $2mgh$; par conséquent, la force élastique de l'air contenu dans CE', qui s'exerce sur le niveau E' et qui fait équilibre à cette pression totale, sera double de celle qui avait lieu quand l'air occupait l'espace CE. Or, l'expérience prouve que l'espace CE' est moitié de CE; elle fait voir aussi que si l'on triple la pression par une addition convenable de mercure, l'espace occupé par l'air est réduit au tiers; et, généralement, on trouve que le volume du fluide varie en raison inverse de la pression qu'il éprouve, ou autrement dit, que la densité croît dans le même rapport que la force élastique.

Cette proportionnalité est ce qu'on appelle la *loi de Mariotte*, du nom du physicien qui l'a déduite de l'observation. Elle suppose que le fluide n'éprouve aucune variation de température; en sorte que, pour l'observer exactement, il faut donner à l'air contenu dans CE, le temps de perdre l'augmentation de température qu'il acquiert par la compression, et de revenir à sa température primitive. Elle a lieu pour tous les gaz, et aussi pour les vapeurs, en supposant la pression moindre que celle qui les réduit en liquides. Enfin, elle subsiste également pour les mélanges de différens fluides; et si, par exemple, deux gaz ont la même température et un même volume V, que p soit la force élastique de l'un et p' celle de l'autre, et qu'on les réunisse sous le volume V, la température du mélange sera encore la même, et la force élastique, ou la pression qu'il exerce sur l'unité de surface, deviendra $p+p'$.

624. Au moyen de la loi de Mariotte, on peut facilement calculer l'élévation de l'eau dans une pompe, lorsqu'il existe de l'air entre ce liquide et le piston; laquelle élévation serait $10^m,4$, comme nous l'avons dit précédemment (n° 599), si l'eau était en contact avec le piston.

Pour cela, soient ABCD (fig. 138) le tuyau cylindrique et vertical d'une pompe, plongé dans l'eau jusqu'en EF, et GH la base horizontale du piston. La pression atmosphérique s'exerce sur le niveau extérieur de l'eau, qui est le même que le niveau intérieur EF. Cette pression, rapportée à l'unité de surface, sera égale à gl, en prenant la densité de l'eau pour unité, et désignant par l la hauteur $10^m,4$ de la colonne d'eau qui lui ferait équilibre. L'espace contenu entre EF et GH est rempli d'air, dont la force élastique fait équilibre à la pression extérieure, et a aussi gl pour mesure. Dans cet état, j'appelle a la hauteur donnée de GH au-dessus de EF; je suppose ensuite qu'on élève le piston jusqu'en G'H', et je désigne par c la hauteur aussi donnée de G'H' au-dessus de GH. L'eau s'élèvera, dans l'intérieur de la pompe, jusqu'en E'F', à une hauteur x au-dessus de EF, et s'abaissera en dehors, au niveau d'une section $E_{,}F_{,}$ de pompe, située à une distance y au-dessous de EF. En appelant b la section horizontale de la pompe, et $\mathfrak{c}$ celle du réservoir dans lequel elle est plongée, on aura d'abord

$$y=\frac{bx}{\mathfrak{c}},$$

à raison de l'incompressibilité du liquide; et la question se réduira à déterminer la valeur de x.

Or, l'air qui occupait l'espace EFHG, occupera maintenant l'espace E'F'H'G'; et celui-ci étant à l'autre comme $a+c-x$ est à a, il s'ensuit que la force élastique gl du fluide sera diminuée dans le rapport inverse, et deviendra $\frac{gla}{a+c-x}$. Ce sera la pression rapportée à l'unité de surface qui aura lieu sur E'F'; en l'ajoutant à la pression de l'eau comprise entre E'F' et $E_{,}F_{,}$, dont la valeur est $g(x+y)$, on aura la pression totale exercée sur le niveau intérieur $E_{,}F_{,}$, qui devra faire équilibre à la pression extérieure gl; ce qui exige qu'on ait

$$\frac{la}{a+c-x}+x+\frac{bx}{\mathfrak{c}}=l,$$

en supprimant le facteur commun g, et substituant pour y sa valeur précédente. Cette équation est du second degré, et peut s'écrire ainsi :

$$x^2-x(lf+a+c)+clf=0,$$

en réduisant, et faisant, pour abréger,

$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}+b}=f.$$

En résolvant cette équation, on trouvera deux valeurs réelles et positives de x; mais il est aisé de voir que l'une d'elles sera toujours inadmissible. En effet, l'élévation $x+y$ de l'eau au-dessus du niveau extérieur, ne peut pas surpasser l; à cause de $x+y=\frac{x}{f}$, on a donc $x<fl$; d'ailleurs, il est évident qu'on doit aussi avoir $x<a+c$; or, la somme des deux racines de l'équation précédente étant $fl+a+c$, si l'une est plus petite que $a+c$, l'autre sera plus grande que fl, ou bien, si l'une est moindre que fl, l'autre surpassera $a+c$; par conséquent, l'une des deux racines sera seule admissible, et l'autre devra être rejetée comme étrangère à la question.

En vertu de l'équation d'équilibre, la force élastique $\frac{gla}{a+c-x}$, de l'air contenu entre E'F' et G'H', est égale à $gl-g(x+y)$. Il en résulte sur la base inférieure du piston, une pression dirigée en sens contraire de la pesanteur, et égale à $glb-g(x+y)b$. La base supérieure de ce corps est poussée en sens contraire par la pression atmosphérique, égale à glb; la charge que le piston supporte, ou l'excès de cette seconde force sur la première, est donc $g(x+y)b$, c'est-à-dire, le poids de l'eau contenue entre $E_{,}F_{,}$ et E'F', et élevée

au-dessus du niveau extérieur; ce qu'on peut regarder, *à priori*, comme évident.

625. Il nous reste actuellement à considérer la loi de la force élastique de l'air, relativement à sa température.

Si l'air et différens gaz, soumis à une pression constante, et la même pour tous, sont placés dans une enceinte dont la température varie d'un instant à l'autre, l'observation prouve que tous ces fluides se dilatent également. En prenant l'un d'eux, l'air par exemple, pour thermomètre, c'est-à-dire, en divisant sa dilatation totale en parties égales, qui marqueront les degrés de la température, il en résulte que les accroissemens de volume de tous ces gaz seront les mêmes pour des augmentations égales de température, et proportionnels à ces augmentations. L'observation prouve aussi que, dans une étendue très considérable, les indications du thermomètre à air diffèrent très peu de celles du thermomètre à mercure; en sorte que, dans cette étendue, la dilatation d'un gaz quelconque est proportionnelle à son accroissement de température, indiquée par les degrés du thermomètre ordinaire. Enfin, de zéro à 100°, c'est-à-dire, de la température de la glace fondante à celle de l'eau bouillante, M. Gay-Lussac a trouvé que le volume de l'air soumis à une pression constante, et, par conséquent, celui d'un gaz quelconque, augmentent dans le rapport de l'unité à 1,375; ce qui donne une dilatation de 0,00375, pour chaque degré du thermomètre centigrade.

D'après cela, soient V le volume d'un gaz quelconque, à la température zéro, ϖ sa force élastique, et D sa densité. La pression ϖ, rapportée à l'unité de surface, restant la même, et le nombre de degrés de la température devenant θ, désignons par V' et D' ce que deviendront le volume et la densité du gaz; nous aurons

$$V' = V\,(1 + \alpha\theta),$$

en faisant

$$\alpha = 0{,}00375;$$

et comme la densité varie en raison inverse du volume, nous aurons aussi

$$D' = \frac{D}{1 + \alpha\theta}.$$

Maintenant, supposons qu'on fasse varier la pression sans changer la température θ. Soient p et ρ ce que deviennent simultanément la pression et la densité, qui étaient ϖ et D'; d'après la loi de Mariotte, on aura

$$p = \frac{\rho\varpi}{D'};$$

et en mettant pour D' sa valeur précédente, et faisant

$$\frac{\varpi}{D} = k,$$

il en résultera

$$p = k\rho\,(1 + \alpha\theta), \qquad (2)$$

pour l'expression de la force élastique d'un gaz quelconque en fonction de sa densité et de sa température.

626. Cette formule convient aux gaz, aux vapeurs, et à leurs mélanges. La température θ étant indiquée par le termomètre à mercure, elle a lieu pour les valeurs négatives de θ, jusqu'à environ — 36°, ou un peu moindres que la température de la congélation de ce fluide. Elle a aussi été vérifiée pour des températures qui surpassaient beaucoup 100°; et la différence entre les lois de dilatation de l'air et du mercure, ne commence à devenir un peu considérable que quand ϖ s'élève à environ 300° *.

Le coefficient k est différent pour les différens fluides. Relativement à l'air atmosphérique, MM. Biot et Arago ont trouvé, à l'Observatoire de Paris,

$$\frac{m}{D} = 10462,$$

pour le rapport de la densité du mercure à celle de l'air, sous la pression barométrique de $0^m,76$, et à la température zéro (n° 61). En faisant donc, en même temps,

$$\varpi = mGh, \quad h = 0^m,76,$$

la valeur de k sera

$$k = (7951{,}12)\ G;$$

et, dans cette valeur, il faudra prendre pour G la gravité au lieu où le rappport $\frac{m}{D}$ a été déterminé, c'est-à-dire, à la latitude de Paris, pour laquelle on a

$$G = 9^m,80896.$$

Le coefficient de G se rapporte à l'air parfaitement sec; si l'air était humide, sa densité serait moindre, sous la même pression et à la même température, et la valeur de k varierait en raison inverse de cette densité. Sous la pression barométrique de $0^m,76$, et à la température zéro, soit, par exemple, δ le rapport de la densité de l'air au *maximum* d'humidité, à la densité de l'air parfaitement sec; on aura, comme on le verra plus loin,

$$\delta = \frac{0^m,76 - 0^m,00508}{0^m,76} + \frac{10}{16}\,\frac{0^m,00508}{0^m,76} = 0{,}99749;$$

par conséquent, en divisant la valeur précédente de k par cette valeur de δ, on aura la valeur de k qui répond au *maximum* d'humidité de l'air, savoir :

$$k = 7971^m,09.$$

* *Voyez*, sur ce point, le Mémoire de MM. Petit et Dulong, inséré dans le 18e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

627. Maintenant, nous formerons sans difficulté les différentes équations d'équilibre d'une colonne atmosphérique. Supposons que cette colonne soit cylindrique et verticale, et qu'elle ait sa base à la surface de la terre et s'étende jusqu'à la limite de l'atmosphère. Soit A l'aire de sa section horizontale. Divisons cette colonne en couches horizontales infiniment minces, et supposons la surface A assez peu étendue pour que la densité et la température ne varient pas sensiblement d'un point à un autre d'une couche quelconque. Appelons p, ρ, θ, la force élastique de l'air, sa densité et sa température, qui ont lieu à la distance z de la surface de la terre. Soit aussi g' la gravité à cette même distance; $Ag'\rho dz$ sera le poids de la couche dont l'épaisseur est dz, et dont les deux faces répondent à z et $z-dz$. La pression qu'elle éprouve sur sa face supérieure sera Ap; celle qui aura lieu sur sa face inférieure aura pour expression $A\left(p-\frac{dp}{dz}dz\right)$. Mais en passant de la première à la seconde face, la pression doit augmenter du poids $Ag'\rho dz$; il faudra donc qu'on ait

$$A\left(p-\frac{dp}{dz}\right)=Ap+Ag'\rho dz,$$

ou simplement

$$dp=-g'\rho dz\,; \qquad (3)$$

ce qui coïncide avec l'équation qu'on déduira de la formule (3) du n° 584, en y faisant

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-g'.$$

En éliminant ρ au moyen de l'équation (2), il vient

$$\frac{dp}{p}=-\frac{g'dz}{k(1+\alpha\theta)}.$$

Si l'on appelle r le rayon de la terre et g la pesanteur à sa surface, on aura

$$g'=\frac{gr^2}{(r+z)^2},$$

à la hauteur z, en négligeant la variation de la force centrifuge, ainsi que l'action de la masse d'air comprise entre les deux surfaces sphériques et concentriques dont les rayons sont r et $r+z$, laquelle action n'entre pas dans la valeur de g, et devrait s'ajouter à celle de g' (n° 101). Nous aurons, de cette manière,

$$\frac{dp}{p}=-\frac{gr^2\,dz}{k(1+\alpha\theta)(r+z)^2}.$$

Pour intégrer cette formule, il faudrait encore connaître l'expression de θ en fonction de z; mais la loi des températures étant inconnue, on est obligé de considérer θ comme une constante; et l'on prend dans chaque cas, pour sa valeur, la moyenne des températures qui répondent aux points extrêmes de la colonne d'air à laquelle on applique cette équation. Son intégrale est alors

$$\log p=\frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z)}+C;$$

C étant la constante arbitraire. En désignant par ϖ la pression atmosphérique qui a lieu à la surface de la terre, on aura à la fois

$$z=0,\quad p=\varpi,\quad \log\varpi=\frac{gr}{k(1+\alpha\theta)}+C;$$

et il en résultera, à une hauteur quelconque z au-dessus de cette surface,

$$\log\frac{p}{\varpi}=-\frac{grz}{k(1+\alpha\theta)(r+z)}. \qquad (4)$$

En vertu de cette équation et de la formule (2), et en désignant par e la base des logarithmes népériens, on aura maintenant

$$p=\varpi e^{\frac{-grz}{k(1+\alpha\theta)(r+z)}},\quad \rho=\frac{\varpi}{k(1+\alpha\theta)}\,e^{\frac{-grz}{k(1+\alpha\theta)(r+z)}},$$

pour les expressions de la force élastique et de la densité de l'air, depuis la surface du globe jusqu'à la hauteur où ce fluide a perdu par le froid toute son élasticité.

D'après ce qu'on a dit dans le n° 620, le poids de la colonne atmosphérique qui a pour base l'unité de surface, doit être équivalent à la pression ϖ relative au point le plus bas; et, en effet, ce poids est donné par l'intégrale $\int_0^\infty \rho g'dz$, dont la valeur est ϖ, d'après les expressions de ρ et de g'.

628. La force motrice d'un ballon qui s'élève verticalement dans l'atmosphère, est l'excès du poids de l'air qu'il déplace à chaque instant, sur son propre poids. En appelant μ sa masse et V son volume, cette force sera donc $V\rho g'-\mu g'$, à la hauteur z au-dessus de la terre; par conséquent, on aura

$$\mu\frac{d^2z}{dt^2}=V\rho g'-\mu g',$$

pour l'équation différentielle du mouvement vertical de ce corps, au bout du temps quelconque t. Si l'on appelle c sa densité moyenne, de sorte qu'on ait $\mu=cV$, et qu'on substitue pour ρ et g' leurs valeurs précédentes, cette équation deviendra

$$c\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\varpi gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z)^2}\,e^{\frac{-grz}{k(1+\alpha\theta)(r+z)}}-\frac{cgr^2}{(r+z)^2}.$$

En multipliant par $2ds$, intégrant et désignant par C la constante arbitraire, il vient

$$\frac{cds^2}{dt^2} = C - 2ae^{\frac{-grs}{k(1+\alpha t)(r+s)}} + \frac{2cgr^2}{r+s}.$$

Si l'on suppose que le mobile soit parti de la surface de la terre avec une vitesse nulle, on aura à la fois $s = 0$ et $\frac{ds}{dt} = 0$; il faudra donc qu'on ait

$$C = 2a - 2cgr;$$

et il en résultera

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2a}{c}\left[1 - e^{\frac{-grs}{k(1+\alpha t)(r+s)}}\right] - \frac{2grs}{r+s},$$

pour le carré de la vitesse à une hauteur quelconque. En résolvant cette équation par rapport à dt, on déterminera ensuite, par la méthode des quadratures, le temps que le mobile emploiera à parvenir à une hauteur donnée.

En égalant à zéro la valeur de $\frac{d^2 s}{dt^2}$, on déterminera la hauteur à laquelle le mobile demeurerait en équilibre, s'il y parvenait sans vitesse acquise; et de même l'équation $\frac{ds^2}{dt^2} = 0$, fera connaître la plus grande hauteur à laquelle le ballon s'élèverait dans l'atmosphère, en supposant que sa masse et son volume ne varient pas. La première de ces deux hauteurs s'exprimera au moyen d'un logarithme; la seconde dépendra d'une équation transcendante, et ne pourra se calculer que par approximation.

629. Proposons-nous maintenant d'appliquer l'équation (4) à la mesure des hauteurs verticales.

Soient h et h' les hauteurs du mercure dans le baromètre, à la station inférieure et à la station supérieure; T et T' les températures correspondantes du mercure; t et t' celles de l'air, qui seront différentes de T et T', lorsque le mercure du baromètre n'aura pas eu le temps de se mettre, pendant les observations, en équilibre de température avec l'air environnant. Si m est la densité du mercure à la station inférieure, $\left(1 + \frac{T - T'}{5550}\right)m$ sera sa densité à la station supérieure, parce que la densité de ce fluide augmente de $\frac{1}{5550}$ pour chaque degré de diminution dans la température. Pour plus de simplicité, nous comprendrons le facteur $1 + \frac{T - T'}{5550}$ dans la hauteur h', qui sera alors la hauteur observée, multipliée par cette quantité, et nous supposerons ensuite que m soit la densité du mercure aux deux stations. De cette manière, nous aurons

$$a = mgh, \quad p = mg'h' = \frac{mgr^2 h'}{(r+s)^2};$$

au moyen de quoi l'équation (4) deviendra

$$\log \frac{h}{h'} + 2 \log \frac{r+s}{r} = \frac{grs}{k(1+\alpha t)(r+s)}. \quad (5)$$

Ainsi qu'on l'a dit plus haut, il faudra prendre $\frac{1}{2}(t + t')$ pour t. La valeur de α est 0,00375 pour l'air sec, aussi bien que pour celui qui renferme la vapeur d'eau en quantité constante, et dans une proportion quelconque. Mais il faut observer que, quand la température s'élève, la quantité de vapeur augmente, en général, dans l'atmosphère; et comme la densité de la vapeur serait à celle de l'air comme 10 est à 16, sous la pression ordinaire $0^m,76$, il s'ensuit que la densité de l'air libre, dont la température augmente, doit diminuer dans un plus grand rapport que celui qui répond au coefficient 0,00375. Pour tenir compte, autant qu'il est possible, de la quantité de vapeur qui se trouve dans l'atmosphère, nous augmenterons donc le coefficient α; et pour la commodité du calcul, nous le ferons égal à 0,004; en sorte que nous aurons

$$\alpha t = \frac{2(t + t')}{1000}.$$

Les logarithmes qui entrent dans le premier membre de l'équation précédente, sont népériens; pour les convertir en logarithmes ordinaires, je multiplie cette équation par le module de ceux-ci, que j'appelle M, et dont la valeur est

$$M = 0,4342945.$$

La gravité g que renferme son second membre, est celle qui répond à la station inférieure et à la latitude du lieu de l'observation. En désignant cet angle par ψ, et comparant la gravité g à celle qui entre dans les valeurs de k du n° 626 et qui répond à la latitude de Paris, on aura

$$g = \frac{(1 - 0,002588 \cos 2\psi)\, G}{1 - 0,002588 \cos 2\,(48^\circ\ 50'\ 14'')}.$$

D'ailleurs, les coefficiens de G dans ces deux valeurs de k répondant, l'un à l'extrême sécheresse de l'air, et l'autre à son extrême humidité, on peut prendre la demi-somme de ces deux quantités, ou $7961^m,10$, pour le coefficient qui convient à l'état ordinaire de l'atmosphère. On aura alors

$$\frac{k}{M}\left[1 - 0,002588 \cos 2\,(48^\circ\ 50'\ 14'')\right] = (18337^m,46)\ G;$$

et, au moyen de cette valeur, jointe à celle de g, on tirera de l'équation (5)

$$z = \frac{(18337^m,46)\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right]}{1 - 0,002588 \cos 2\psi}\left[\log\frac{h}{h'} + 2\log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right]\left(1+\frac{z}{r}\right) \quad (6)$$

formule dans laquelle les logarithmes sont actuellement ceux qui ont pour base le nombre 10.

Pour faire usage de cette équation, on négligera d'abord la fraction $\frac{z}{r}$ contenue dans son second membre; ce qui fera connaître une première valeur approchée de z : en la substituant dans ce second membre, on obtiendra une seconde valeur de z, plus approchée que la première, et à laquelle on pourra toujours s'arrêter.

En remplaçant le nombre 18337,46 par un coefficient inconnu a dans cette équation, et déterminant a d'après la moyenne d'un grand nombre de hauteurs z, mesurées trigonométriquement, on trouve

$$a = 18336^m;$$

ce qui diffère très peu du coefficient 18337,46, que nous avons calculé directement.

630. Si l'on veut employer la formule (6) à déterminer l'élévation d'un lieu de la terre, au-dessus du niveau de la mer, on supposera que T', t', h', se rapportent à ce lieu, et T, t, h, au bord de la mer qui en est le moins éloigné; et, pour plus d'exactitude, on devra prendre pour ψ une latitude moyenne entre celles de ces deux points. D'après la remarque du n° 255, il faudra aussi avoir égard, dans l'expression de la pesanteur g', à l'action de la couche de la terre dont la hauteur est z; en supposant sa densité égale à la moitié de la densité moyenne de la terre, on a alors

$$g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2} + \frac{3gz}{4r};$$

et, à cause de la petitesse de la fonction $\frac{z}{r}$, on trouvera qu'en faisant usage de cette pesanteur g', la quantité $1+\frac{z}{r}$, contenue dans la formule (6), devra être remplacée par $1+\frac{5z}{8r}$.

Pour donner un exemple du calcul de cette formule, ainsi modifiée, je prends celui qui est cité dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, et qui se rapporte à la hauteur de Guanaxuato au-dessus du niveau de la mer.

Les données de cet exemple sont :

$$h = 0^m,76315, \quad T = t = 25^\circ\,3,$$
$$h' = 0^m,60095, \quad T' = t' = 21^\circ\,3, \quad \psi = 21^\circ.$$

La hauteur h', corrigée et multipliée par le facteur $1+\frac{T-T'}{5550}$, qui doit être employée dans la formule (6), devient

$$h' = 0^m,60138.$$

En négligeant la fraction $\frac{z}{r}$ dans cette formule, on trouve

$$z = 2077^m,98,$$

pour la première valeur approchée de z; et en substituant cette valeur dans la même formule, prenant $1+\frac{5z}{8r}$ au lieu de $1+\frac{z}{r}$, comme il vient d'être dit, et observant qu'on a

$$r = 6366198^m,$$

on obtient

$$z = 2081^m,96,$$

pour la hauteur demandée, laquelle est moindre que celle de l'*Annuaire*, d'à peu près 2 mètres et demi.

631. Lorsque la hauteur z n'est pas très considérable, on peut négliger la fraction $\frac{z}{r}$ dans la formule (6), et remplacer en même temps le nombre 18337^m,46, par un coefficient plus grand. Celui qui résulte d'observations nombreuses que Ramond a faites dans le midi de la France, est 18393 mètres. La latitude correspondante est à peu près $\psi = 45^\circ$; et, cela étant, l'équation (6) se réduit à

$$z = 18393^m\left[1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right]\log\frac{h}{h'};$$

ce qui est la formule barométrique dont on fait le plus communément usage.

Dans un même vase, et sous la même pression atmosphérique, l'ébullition de l'eau distillée commence toujours à une même température, et cette température s'abaisse à mesure que la pression

extérieure diminue. Si donc on avait formé, par l'expérience, une table des températures où l'eau commence à bouillir, sous des pressions décroissantes par des différences très petites, et qu'on portât un vase contenant de l'eau, à différentes hauteurs au-dessus de la terre, les températures où cette eau commencerait à bouillir, feraient connaître, au moyen de la table que nous supposons, les hauteurs barométriques correspondantes, que l'on pourrait employer dans la formule précédente. C'est de cette manière qu'on a proposé de déterminer les différences de hauteur au-dessus de la terre, par l'observation de l'ébullition de l'eau, et sans recourir explicitement aux mesures du baromètre.

632. Je terminerai ce chapitre par quelques remarques relatives au poids et à la force élastique des vapeurs, laquelle force est aussi ce qu'on appelle la *tension* de ces fluides.

Si un vase fermé renferme un liquide en quantité suffisante pour fournir toute la vapeur qui peut s'y former, celle qui s'élève de ce liquide atteint, plus ou moins vite, un *maximum* qui ne dépend que de la température, et qui est le même quand le vase est vide d'air, ou quand il contient de l'air ou un gaz quelconque, condensé ou dilaté. Soit que cette quantité de vapeur ait atteint son *maximum*, ou qu'elle soit encore au-dessous, sa tension s'ajoute à la force élastique du gaz sec, et la somme forme la force élastique du mélange. A la même température, la tension *maxima* est différente pour les différentes vapeurs; et la loi qu'elle suit, pour une même vapeur, n'est pas encore connue en fonction de la température. Relativement à la vapeur d'eau, les expériences les plus étendues qu'on a faites, jusqu'à présent, sont celles des commissaires de l'Académie des Sciences, dont il est rendu compte dans les tomes X et XI de ses Mémoires.

La force élastique *maxima* de la vapeur d'eau, formée dans le vide, à la température de 18°,75, par exemple, est mesurée par une hauteur barométrique de $0^m,016$. Quand elle se produit dans l'air sec, à cette température et sous la pression ordinaire $0^m,76$, sa force élastique s'ajoute à cette pression, et l'expérience donne effectivement $0^m,776$ pour la pression exercée par le mélange.

Si l'on pouvait, sans liquéfier la vapeur isolée, élever sa tension de $0^m,016$ à $0^m,76$, sa densité, d'après la détermination de M. Gay-Lussac, serait à celle de l'air sec, sous la même pression et à la même température, dans le rapport de 10 à 16. En vertu de la loi de Mariotte, la densité de la vapeur que nous prenons pour exemple est donc $\frac{10}{16}\cdot\frac{0,016}{0,76}$; celle de l'air, à la température de 18°75 et sous la pression de $0^m,76$, étant prise pour unité. Par conséquent, si l'on appelle P le poids d'un litre de cet air, et P' celui d'un litre de la vapeur d'eau, on aura

$$P' = \frac{P}{76}.$$

A la température zéro, P serait égal à 1000 grammes, divisé par 769,4 (n° 61); pour obtenir sa valeur à la température de 18°,75, il faut diviser ce quotient par $1+(18,75)(0,00375)$, d'après la loi de la densité de l'air; il en résulte

$$P = 1^{gr},21433,$$

et l'on en déduit

$$P' = 0^{gr},01597.$$

Le poids d'un litre de vapeur, à la température de 18°,75, et à son *maximum* de densité, doit aussi être celui de la plus grande quantité de vapeur que peut contenir un litre d'air à cette température, et quelle que soit sa densité. Or, par une expérience directe, Saussure a trouvé 10 grains pour le plus grand poids de la vapeur d'eau qui peut se former dans un pied cube d'air, sous la pression ordinaire et à la température donnée; d'où il résulte (0,01546) grammes pour le décimètre cube; ce qui diffère peu du résultat précédent.

Généralement, sous une pression barométrique h, et à une température quelconque, si l'on appelle Δ la densité de l'air sec, Δ' celle de l'air mouillé, et a la tension de l'air qu'il renferme, on aura

$$\Delta' = \frac{\Delta}{h}\left(h - a + \frac{10}{16}a\right);$$

car un volume quelconque A d'air mouillé se composera d'un pareil volume d'air sec, dont la force élastique serait réduite à $h-a$, et la densité à $\frac{\Delta}{h}(h-a)$, joint à un égal volume de vapeur qui aurait $\frac{10}{16}\frac{a}{h}\Delta$ pour densité; par conséquent, la somme de ces deux densités, multipliées par A, exprimera la masse $A\Delta'$ du mélange; et en supprimant le facteur commun A, on aura l'équation précédente. Cette équation servira à déterminer le poids d'un volume donné d'air mouillé, d'après le poids de ce volume d'air sec à la même température, et la tension de la vapeur contenue dans l'air mouillé. En y faisant $h = 0^m,76$, supposant que la température soit zéro, et observant qu'à cette température la tension *maxima* de la vapeur d'eau est $0^m,00508$, on en déduira la valeur de δ du n° 625.

633. Si l'atmosphère qui nous enveloppe n'existait pas, elle serait remplacée par une autre atmosphère formée de la vapeur d'eau qui s'élèverait de la mer. La loi des densités de ses couches et sa hauteur totale dépendraient de la loi de la tempé-

rature, qui aurait lieu dans cette atmosphère de vapeur aqueuse, et que nous ne pouvons aucunement connaître; mais, quelle qu'elle soit, le poids total d'une colonne verticale cylindrique de cette vapeur, ayant pour base l'unité de surface, sera toujours égal à sa force élastique qui répond à son point le plus bas (n° 627); et quand sa densité en ce point aura atteint son *maximum*, cette force ne dépendra plus que de la température correspondante. A la vérité, nous ignorons aussi quelle pourrait être cette température; et il y a lieu de croire qu'elle serait beaucoup inférieure à celle qui a lieu maintenant à la surface de la terre, parce que le fluide qui se trouverait en contact avec cette surface, aurait une densité beaucoup moindre que celle de l'air ordinaire. Pour fixer les idées, supposons que la température dont il s'agit soit encore 18°,75. Le poids de la colonne d'atmosphère aqueuse ayant pour base un décimètre carré, ne pourra pas excéder celui d'un prisme de mercure qui aurait la même base, et 0m,016 pour hauteur, c'est-à-dire, le poids de 16 centièmes d'un litre de mercure, ou à peu près 2300 grammes. Le poids de toute la vapeur d'eau qui peut être contenue dans une colonne d'air de notre atmosphère, dépend de la loi de décroissement de la température dans le sens vertical, et ne saurait être calculé; mais si la base de la colonne est un décimètre carré, et la température inférieure 18°,75, on s'assurera aisément que ce poids doit surpasser 2300 grammes, en observant que, dans toute la partie de cette colonne dont la température différera peu de 18°,75, et jusqu'à la hauteur où la pression ne sera pas réduite à 0m,016, chaque litre d'air peut renfermer environ 16 milligrammes de vapeur.

Ainsi, l'atmosphère qui presse sur la surface de la terre, n'est pas, comme on le disait autrefois, la cause qui empêche les liquides de se vaporiser et de se disperser dans l'espace; au contraire, sa présence permet aux vapeurs de se maintenir, au-dessus de la terre, en plus grande quantité que si l'atmosphère n'existait pas.

CHAPITRE VI.

DE LA FORCE ÉLASTIQUE ET DE LA CHALEUR DES GAZ.

634. La loi de Mariotte suppose, comme nous l'avons dit (n° 623), qu'on a laissé au fluide dilaté ou condensé, le temps de revenir à sa température primitive. Si l'on ne prend pas cette précaution, la température augmente ou diminue en même temps que la densité, et la force élastique croissant ou décroissant ainsi, à raison de la densité et à raison de la température, on concoit qu'elle doit varier, pour un même fluide, dans un plus grand rapport que sa densité. Lorsque le fluide est contenu dans un vase dont les parois sont imperméables à la chaleur, il conserve tout son calorique, en se condensant ou en se dilatant, et sa température augmente ou diminue en conséquence. Il en est de même toutes les fois que ses variations de densité sont assez rapides pour que sa chaleur propre n'ait pas le temps, dans le cas de la condensation, de s'échapper sous forme rayonnante, ou de se communiquer, par le contact, aux corps voisins, et pour que, dans le cas de la dilatation, ces corps ne puissent communiquer au fluide, par le rayonnement ou par le contact, une quantité sensible de calorique. C'est ce qu'on suppose, par exemple, comme on l'expliquera par la suite, relativement aux variations de densité qui ont lieu dans les ondes sonores, et dont la durée n'est que de quelques millièmes de seconde. Dans cette question, et dans beaucoup d'autres, il serait important de connaître l'expression de la force élastique d'un gaz, en fonction de la densité, et l'élévation ou l'abaissement correspondant de la température, lorsque la quantité de chaleur de la masse fluide demeure invariable. Mais nous manquons, dans l'état actuel de la science, des données nécessaires pour la solution complète de ce problème; et je vais exposer, dans ce chapitre, ce que le calcul et l'expérience nous ont appris, jusqu'à présent, sur cette matière.

635. Soient ρ la densité d'un gaz, θ sa tempéra-

ture en degrés du thermomètre centigrade, et p la pression qu'il exerce sur chaque unité de surface, ou la mesure de sa force élastique; on aura (n° 625)

$$p = k\rho\,(1 + \alpha\theta); \qquad (1)$$

α et k étant deux coefficiens indépendans de ρ et θ, dont le premier est le même pour tous les gaz et égal à 0,00375, et dont le second doit être donné pour chaque gaz en particulier.

La quantité totale de chaleur contenue dans un poids donné d'un corps, dans un gramme, par exemple, ne saurait être calculée; on la regarde comme inépuisable, et comme extrêmement grande par rapport aux quantités dont elle varie quand ce corps change de densité ou de température; et ce sont ces quantités additives ou soustractives que l'on compare entre elles, et que l'on soumet au calcul. Ainsi, nous désignerons par q l'excès de la quantité de chaleur contenue dans un gramme du gaz que nous considérons, sur celle que ce gramme renferme, lorsque le gaz a une température et une densité choisies arbitrairement, qui seront, pour fixer les idés, la température zéro et la densité correspondante à la pression ordinaire de $0^m,76$. Cette quantité q sera une fonction de p, ρ, θ, ou simplement de p et ρ, puisque ces trois variables sont liées entre elles par l'équation précédente. On aura donc

$$q = f(p, \rho);$$

f indiquant une fonction dont il s'agira de déterminer la forme.

La chaleur spécifique de ce gramme de fluide est la quantité de chaleur qu'il faudrait lui communiquer pour élever sa température d'un degré, ou, pour ainsi dire, la vitesse de l'accroissement de q par rapport à θ, dont l'expression sera $\frac{dq}{d\theta}$. Mais on pourra la considérer sous deux points de vue différens : en supposant la pression p constante, et laissant au gaz la liberté de se dilater, ou bien en le tenant sous un volume constant, et supposant que la pression p augmente avec la température. En vertu de l'équation (1), on a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\alpha\rho}{1 + \alpha\theta},$$

quand on regarde p comme une constante, et

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{\alpha p}{1 + \alpha\theta},$$

lorsqu'on suppose ρ invariable. Si donc on appelle c la chaleur spécifique du gaz à pression constante, et c_1 sa chaleur spécifique à volume constant, de sorte qu'on ait

$$c = \frac{dq}{d\rho}\frac{d\rho}{d\theta}, \qquad c_1 = \frac{dq}{dp}\frac{dp}{d\theta},$$

il en résultera

$$c = -\frac{dq}{d\rho}\frac{\alpha\rho}{1 + \alpha\theta}, \qquad c_1 = \frac{dq}{dp}\frac{\alpha p}{1 + \alpha\theta}, \qquad (2)$$

et, par conséquent,

$$\rho\frac{dq}{d\rho} + \gamma p\frac{dq}{dp} = 0, \qquad (3)$$

en désignant par γ le rappport des deux chaleurs spécifiques, c'est-à-dire, en faisant

$$\gamma = \frac{c}{c_1}.$$

Il est évident, *à priori*, que ce rapport γ doit surpasser l'unité; car il faut plus de chaleur pour augmenter la température d'un gaz, et le dilater en même temps, que pour augmenter sa température d'une même quantité, sans écarter ses molécules. Mais l'expérience peut seule faire connaître la valeur de γ pour les différens gaz, et comment cette valeur dépend de la pression et de la densité. Cette valeur se déduit, comme on le verra tout à l'heure, de l'accroissement de la température correspondant à une petite condensation du gaz, sans aucune perte de chaleur.

636. Représentons toujours par θ la température du gaz; et soit $\theta + \omega$ ce qu'elle devient après que la densité du fluide a été augmentée par une compression très rapide, dans le rapport de $1 + \delta$ à l'unité; δ étant une très petite fraction. Si la perte de chaleur, pendant la durée de cette compression, a été insensible, l'accroissement de température ω correspondant à la très petite condensation δ, est la quantité qu'il s'agira d'abord de déterminer par l'expérience suivante.

Pour cela, supposons que le gaz soit de l'air atmosphérique contenu dans un vaisseau fermé, et dont la pression, la densité et la température soient les mêmes qu'à l'extérieur, où nous supposerons qu'elles sont représentées par p, ρ, θ, pendant toute la durée de l'observation. On enlève une petite portion de l'air intérieur; et, après que l'air restant a repris sa température primitive, on désigne par p' et ρ' sa pression et sa densité. On rétablit ensuite la communication avec l'air extérieur; la pression, la densité et la température augmentent en même temps; en sorte qu'après un temps très court, la pression intérieure est égale à la pression qui a lieu au dehors. A cet instant, on interrompt la communication, et l'on désigne par ρ'' et $\theta + \omega$ la densité et la température intérieures. Enfin, cet accroissement ω de la température se dissipe; et, sans que la densité ρ'' varie, la pression intérieure diminue, et devient p''.

La densité de l'air intérieur ayant passé très rapidement de ρ' à ρ'', si l'on prend,

$$\delta = \frac{\rho'' - \rho'}{\rho'},$$

et qu'on fasse abstraction de la petite quantité de chaleur qui a pu être absorbée par le vase, pendant le temps de ce passage, l'accroissement de température ω sera celui qui répond à la condensation δ, et dont on cherche la valeur. L'indication d'un thermomètre plongé dans l'air intérieur, serait trop lente pour faire connaître cette augmentation de température, qui ne subsiste que pendant un temps très court; mais on peut conclure la valeur de ω, des trois pressions p, p', p'', ou des trois hauteurs barométriques correspondantes, que l'on a le temps d'observer.

En effet, il y a deux époques, dans l'expérience qu'on vient de décrire, où la même température θ répond à des densités différentes ρ' et ρ'', et aux pressions données p' et p''. D'après la loi de Mariotte, on a donc

$$\frac{\rho''}{\rho'} = \frac{p''}{p'},$$

et, conséquemment,

$$\delta = \frac{p'' - p'}{p'};$$

ce qui fait connaître la condensation δ. De plus, il y a aussi deux époques où la même densité ρ'' a lieu pour les températures $\theta + \omega$ et θ, sous les pressions p et p''. D'après la loi des forces élastiques à égale densité, on aura donc aussi

$$\frac{p}{p''} = \frac{1 + \alpha(\theta + \omega)}{1 + \alpha\theta}; \qquad (4)$$

d'où l'on tirera la valeur de ω correspondante à la condensation δ.

Dans une expérience faite par MM. Desormes et Clément, où le passage de la densité ρ' à la densité ρ'' s'est effectué en moins d'une demi-seconde, on a eu

$$p = 0^m,7665, \quad p' = 0^m,7527, \quad p'' = 0^m,7629;$$

ce qui donne

$$\delta = 0,0133.$$

On avait aussi $\theta = 12^\circ,5$; et, à cause de $\alpha = 0,00375$, on déduit de l'équation (4)

$$\omega = 1^\circ,3173;$$

d'où il résulte que pour une condensation de 0,0133, sans perte de chaleur, la température de l'air augmenterait de $1^\circ,3173$, ou d'à peu près un degré pour une condensation

$$\delta = \frac{0,01331}{1,3173} = 0,0101.$$

Cet accroissement de température peut aussi se déduire de la vitesse du son; et de cette manière j'avais trouvé, autrefois, un accroissement d'un degré pour une condensation $\frac{1}{116}$, sans perte de chaleur; résultat dont l'expérience que nous citons ne s'écarte pas beaucoup.

637. Maintenant, je dis que le rapport γ du n° 635 a pour expression

$$\gamma = 1 + \frac{\alpha\omega}{(1 + \alpha\theta)\,\delta}. \qquad (5)$$

Supposons, en effet, que la force élastique et la température d'un gaz étant, comme précédemment, p et θ, la condensation δ soit équivalente à celle que le fluide éprouve, lorsqu'on diminue un tant soit peu sa température, sans changer la pression. En désignant par ι cette petite variation de température, on aura

$$\delta = 1 + \frac{\alpha\iota}{1 + \alpha\theta}.$$

Appelons Γ la quantité de chaleur qu'il faudrait communiquer à un gramme du gaz que l'on considère, pour élever sa température, de $\theta - \iota$ à θ, sans changer la pression p; la chaleur spécifique, à pression constante, étant c, on aura aussi

$$\Gamma = c\iota.$$

Après cette communication de chaleur, supposons que l'on comprime subitement ce fluide, de manière à le ramener à son volume primitif; il éprouvera alors la condensation δ; et s'il n'a perdu aucune quantité de chaleur, sa température aura augmenté de ω, et sera devenue $\theta + \omega$. Dans cet état, la pression du fluide sera devenue plus grande que p; mais, sans changer le volume, si on laisse la température s'abaisser jusqu'à $\theta - \iota$, cette pression diminuera aussi, et redeviendra égale à p. Pendant cet abaissement, le gaz perdra une quantité de chaleur proportionnelle à la petite diminution de température $\iota + \omega$, et exprimée par $c_1(\iota + \omega)$, puisque c_1 est sa chaleur spécifique à volume constant. Le volume, la température et la pression étant les mêmes, après cette perte de chaleur, qu'ils étaient avant que la quantité de chaleur Γ eût été communiquée au fluide, il est nécessaire que la perte $c_1(\iota + \omega)$ de chaleur soit égale à Γ; on a donc

$$c\iota = c_1(\iota + \omega);$$

d'où l'on tire

$$\gamma = \frac{c}{c_1} = 1 + \frac{\omega}{\iota};$$

et, en ayant égard à la valeur précédente de δ, cette valeur de γ coïncide avec la formule (5).

638. Si nous mettons, dans cette formule $\frac{p'' - p'}{p'}$ au lieu de δ, et pour ω sa valeur tirée de l'équation (4), nous aurons

$$\gamma = 1 + \frac{(p - p'')\,p'}{(p'' - p')\,p''};$$

ce qui fera connaître la valeur de γ, d'après les pressions p, p', p'', ou les hauteurs barométriques correspondantes, qui résultera de l'expérience ci-dessus décrite.

En faisant usage des valeurs numériques de p, p', p'', précédemment citées, on trouve

$$\gamma = 1{,}3482,$$

pour la valeur du rapport des deux chaleurs spécifiques c et $c_{,}$, dans le cas de l'air atmosphérique.

MM. Gay-Lussac et Welter ont obtenu, par un procédé analogue, une valeur de ce rapport un peu différente, savoir :

$$\gamma = 1{,}3748;$$

et ils se sont assurés que cette quantité est indépendante de la température et de la pression de l'air; en sorte que dans l'équation (3), appliquée à ce fluide, on pourra considérer γ comme une quantité constante. Par un procédé différent, M. Dulong a trouvé, pour l'air parfaitement sec *,

$$\gamma = 1{,}421,$$

et une valeur sensiblement égale à celle-ci pour le gaz oxigène et pour le gaz hydrogène. Mais pour d'autres fluides, tels que l'acide carbonique et le gaz oléfiant, ce procédé, que nous indiquerons par la suite, a donné des valeurs très inégales de γ, et moindres que la précédente; de manière que ce rapport dépend, en général, de la nature du gaz auquel il répond.

639. En regardant γ comme une quantité constante, l'intégrale de l'équation (3) aux différences partielles est

$$q = f\left(\frac{p}{\rho}^{\frac{1}{\gamma}}\right);$$

f désignant la fonction arbitraire. On aura réciproquement

$$p = \rho^{\gamma}\,\varphi q,$$

et, à cause de l'équation (1),

$$\theta = \frac{1}{ak}\,\rho^{\gamma-1}\,\varphi q - \frac{1}{a};$$

φ étant une fonction inverse de f.

La quantité q restant la même, si p, ρ, θ, deviennent p', ρ', θ', on aura de même

$$p' = \rho'^{\gamma}\,\varphi q, \quad \theta' = \frac{1}{ak}\,\rho'^{\gamma-1}\,\varphi q - \frac{1}{a}.$$

On a $\frac{1}{a} = 266{,}67$; et pour que θ et θ' soient des degrés centigrades, il faudra que ce facteur de leurs expressions exprime de semblables degrés.

* *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome X.

En éliminant, en outre, φq entre ces dernières équations et les précédentes, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} p' &= \rho\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{\gamma}, \\ \theta' &= (266^{\circ},67 + \theta)\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{\gamma-1} - 266^{\circ},67 \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Ces équations (6) contiennent les lois de la force élastique et de la température des gaz, comprimés ou dilatés sans aucune variation dans leur quantité de chaleur; elles sont fondées sur la seule hypothèse que le rapport γ des deux chaleurs spécifiques ne varie pas, pour un même fluide, avec la pression et la température; hypothèse qui a été vérifiée, quant à l'air atmosphérique, par les expériences citées dans le numéro précédent.

640. Il faut faire une seconde supposition pour déterminer la fonction arbitraire f que renferme la valeur de q. La plus simple est d'admettre que, sous une pression constante, un gaz se dilate uniformément pour des augmentations égales de quantité de chaleur; ce qui revient à dire que la chaleur spécifique c est constante, lorsque l'accroissement d'un degré de température auquel elle répond (n° 635) est mesuré par un thermomètre à air. Dans cette hypothèse, q devra être une fonction linéaire de θ; or, si l'on substitue, dans la fonction f, la valeur de ρ tirée de l'équation (1), on a

$$q = f\left[akp^{\frac{1}{\gamma}-1}\left(\frac{1}{a} + \theta\right)\right];$$

on aura donc

$$q = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,(266^{\circ},67 + \theta)\,p^{\frac{1}{\gamma}-1}; \quad (7)$$

A et B étant des quantités indépendantes de p et θ, et relatives à la nature du gaz que l'on considère.

D'après les équations (2), on aura

$$c = \mathrm{B}p^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad c_{,} = \frac{\mathrm{B}}{\gamma}\,p^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

et pour connaître la chaleur spécifique d'un gaz, à pression constante ou à densité constante, sous toutes les pressions, il suffira qu'elle soit connue sous une pression déterminée. Selon MM. Laroche et Bérard, on a, par exemple, $c = 0{,}2669$ pour l'air sec, sous la pression de $0^{m},76$; la chaleur spécifique de l'eau étant prise pour unité. En appelant ϖ la pression correspondante à cette hauteur barométrique, on aura donc

$$0{,}2669 = \mathrm{B}\varpi^{\frac{1}{\gamma}-1};$$

et si l'on appelle aussi h la hauteur du baromètre, exprimée en mètres, et qui répond à la pression

quelconque p, de sorte qu'on ait $\frac{p}{\varpi} = \frac{h}{0,76}$, il en résultera

$$c = 0,2669. \left(\frac{0,76}{h}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

d'où l'on déduira la valeur de $c_{\prime\prime}$, en divisant par la constante γ. Comme cette constante est plus grande que l'unité, ce qui rend positif l'exposant $1 - \frac{1}{\gamma}$, on voit que la chaleur spécifique d'un gramme d'air diminuera, quand sa force élastique ou la hauteur h augmentera.

Si l'on désigne par m la quantité de chaleur perdue par un gramme d'air, quand sa température s'abaissera de n degrés, sans que la force élastique varie, on aura

$$m = n(0,2669)\left(\frac{0,76}{h}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}};$$

A volume égal, et pour une même température primitive, le poids de cet air sera augmenté dans le rapport de h' à h, sous une pression mesurée par une autre hauteur h' du baromètre. En appelant m' la quantité de chaleur perdue par ce même volume sous cette autre pression, et pour l'abaissement n de température, nous aurons donc

$$m' = \frac{h'n}{h}(0,2669)\left(\frac{0,76}{h'}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{m'}{m} = \left(\frac{h'}{h}\right)^{\frac{1}{\gamma}};$$

pour le rapport des quantités de chaleur perdue par un même volume d'air, sous des pressions différentes.

Dans un cas où l'on avait

$$h' = 1^m,0058, \quad h = 0^m,7405,$$

MM. Laroche et Bérard ont trouvé

$$\frac{m'}{m} = 1,2396;$$

en prenant la moyenne de deux observations. Pour ces valeurs de h et h', et en faisant $\gamma = 1,421$, la formule donne

$$\frac{m'}{m} = 1,2405;$$

ce qui ne diffère pas sensiblement du résultat de l'expérience.

641. Si l'on veut appliquer la formule (7) à la vapeur d'eau, il faudra supposer :

1° Que quand un gramme de vapeur est formé, et qu'il ne s'en précipite aucune partie, ni ne s'en ajoute de nouvelle, le rapport représenté par γ, de sa chaleur spécifique à pression constante, à sa chaleur spécifique sous un volume constant, ne varie pas avec la température et la densité ;

2° Que la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de ce gramme de vapeur, d'un nombre quelconque de degrés, soit sous une pression constante, soit sous un volume invariable, est proportionnelle à ce nombre, la température étant marquée par un thermomètre à air.

Cela posé, si l'on appelle C la quantité de chaleur nécessaire pour convertir en vapeur, sous la pression barométrique de $0^m,76$, et à une température de 100°, un gramme d'eau dont la température primitive était zéro ; que l'on désigne par q la quantité de chaleur qu'il faudrait employer pour vaporiser ce même gramme d'eau, et donner à la vapeur une température θ sous la pression quelconque p ; enfin, que l'on désigne par c la chaleur spécifique de la vapeur d'eau sous la pression constante de $0^m,76$, et que l'on remplace dans l'équation (7), la pression p par la hauteur barométrique qui lui sert de mesure, et que nous représenterons par h, il faudra que cette formule donne $q = C$, quand $h = 0^m,76$ et $\theta = 100°$, et $\frac{dq}{d\theta} = c$, lorsque $h = 0^m,76$. Or, en déterminant, d'après ces conditions, les deux constantes arbitraires A et B qu'elle renferme, elle devient ensuite

$$q = C + c\left[(266°,67 + \theta)\left(\frac{0^m,76}{h}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 366°,67\right]. \quad (8)$$

Il serait à désirer que le degré d'exactitude de cette formule fût vérifié par l'expérience, et que les trois constantes C, c, γ, qu'elle renferme, fussent déterminées avec précision. Si l'on prend pour unité la chaleur spécifique d'un gramme d'eau à la température zéro, on a

$$C = 550,$$

en adoptant pour C la moyenne des valeurs de cette quantité, que différens physiciens ont obtenues. En même temps, on aura

$$c = 0,347,$$

d'après une expérience assez peu concluante, et qui mériterait d'être répétée. Quant à la valeur de γ, elle nous est, jusqu'à présent, tout-à-fait inconnue.

642. Soit que la densité ρ de la vapeur d'eau correspondante à la pression p et à la température θ, ait atteint son *maximum*, ou qu'elle soit au-des-

sous, l'équation (1), qui convient aux vapeurs et aux gaz permanens, fera toujours connaître la valeur de ρ, quand celles de p et θ seront données. En appelant D la densité à la température de 100° et sous la pression ordinaire de $0^m,76$, et désignant, comme précédemment, par h la hauteur barométrique qui répond à p, on déduira de cette équation (2)

$$\rho = \frac{Dh}{0^m,76} \cdot \frac{366^\circ,67}{266^\circ,67 + \theta}.$$

Le poids d'un litre d'air sec, à la température zéro et sous la pression du $0^m,76$, étant $1^{gr},21433$ (n° 632), il deviendra $\frac{1^{gr},21433}{1,375}$, ou $0^{gr},883$, à la température de 100°; et le poids d'un litre de vapeur d'eau, à la même température et sous la même pression, sera $\frac{10}{16}(0^{gr},883)$, ou $0^{gr},55$; par conséquent, on aura

$$\frac{v\rho}{D}(0^{gr},55) = \frac{vh}{0^m,76} \cdot \frac{201^{gr},66}{266,67 + \theta},$$

pour le poids d'un volume v de vapeur, à la température θ et sous la pression quelconque h. Donc, en appelant V la quantité de chaleur nécessaire pour former ce poids de vapeur, l'eau étant primitivement à la température zéro, V sera le produit de ce nombre de grammes et de la quantité q donnée par la formule (8); en sorte que nous aurons

$$V = \frac{vhq}{0^m,76} \cdot \frac{201\ ,66}{266,67 + \theta},$$

L'unité à laquelle cette quantité V se trouve rapportée, est la quantité de chaleur nécessaire pour élever, de zéro à un degré, la température d'un gramme d'eau; et cette unité est, comme on sait, égale à soixante-quinze fois la quantité de chaleur qu'il faut employer pour liquéfier un gramme de glace à la température zéro, sans élever cette température.

Diverses observations ont porté plusieurs physiciens à penser que quand la vapeur d'eau a atteint le *maximum* de densité, correspondant à sa température, la quantité de chaleur que nous avons désignée par q ne varie plus avec cette température. C'est à cet état que l'on emploie ce fluide dans les machines à vapeur : le rapport de la quantité de chaleur produite V à sa tension h, serait donc alors, toutes choses d'ailleurs égales, en raison inverse de $266^\circ,67 + \theta$; par conséquent, le rapport de la dépense de chaleur à l'effort exercé sur le piston, qui a h pour mesure, diminuerait quand la température deviendrait plus grande, et ce rapport serait le moindre dans les machines à haute pression. Mais l'économie de combustible qui en résulterait en leur faveur serait loin de répondre à celle que l'expérience paraît indiquer; et c'est sans doute à d'autres circonstances que ces machines doivent leur avantage relatif.

643. Concevons que la partie du cylindre vertical ABCD (fig. 138), qui est comprise entre la surface EF de l'eau et la base GH d'un piston, soit remplie par de la vapeur d'eau au *maximum* de densité, correspondant à la température θ de cette vapeur, de l'eau inférieure, du cylindre et du piston. Dans cet état, supposons que la force élastique de la vapeur fasse équilibre au poids du piston, de sorte qu'en appelant p cette force, P ce poids, y compris la pression extérieure que le piston supporte, et λ l'aire de sa base horizontale, on ait

$$P = \lambda p.$$

Si l'on augmente le poids P, et qu'il devienne $P + \Pi$, le piston descendra, et l'espace occupé par la vapeur diminuera; mais comme on l'a supposé à son *maximum* de densité, une partie se liquéfiera; et si la température θ est invariable, la pression p le sera aussi. A la vérité, dans le premier moment de la compression, la température θ augmentera, de telle sorte que la liquéfaction pourra n'avoir pas lieu d'abord, et la pression p pourra augmenter. Mais si le mouvement du piston n'est pas extrêmement rapide, cette augmentation de température disparaîtra avant que le déplacement de ce mobile soit appréciable, et l'on devra considérer θ et p comme constantes pendant tout son mouvement. Il faut aussi remarquer que la condensation du fluide, qui le réduit en eau, et qui est produite immédiatement à la partie supérieure GH en contact avec le piston, se transmet jusqu'en EF, dans un temps extrêmement court, pendant lequel le déplacement du piston est insensible; d'où il suit que la densité du fluide est sensiblement la même dans toute sa hauteur, pendant la chute du piston. Cela étant, la force motrice de ce corps sera constante et égale à l'excès de $P + \Pi$ sur λp, ou à Π; abstraction faite du frottement contre les parois du cylindre, son mouvement sera donc uniformément accéléré; et si l'on fait aussi abstraction du mouvement communiqué à la vapeur, c'est-à-dire, si l'on néglige sa masse par rapport à celle du poids Π, la force accélératrice de ce mouvement sera la pesanteur diminuée dans le rapport de Π à $P + \Pi$. Par conséquent, si l'on appelle l la hauteur de GH au-dessus de EF, la force vive produite par la chute totale du piston, aura $2\,\Pi\,l$ pour valeur.

Le piston étant d'abord arrêté en GH, supposons que la température de l'eau inférieure soit subitement abaissée et devienne θ', moindre que θ. La couche de vapeur en contact avec EF se liquéfiera par le froid; elle sera remplacée par une autre qui se liquéfiera de même; et, si la masse d'eau est assez grande pour que ces couches successives de vapeur ne fassent pas varier sensiblement sa température, les liquéfactions continueront jusqu'à ce

que la masse entière de la vapeur ait la force élastique p', qui répond à la température θ' et à son *maximum* de densité relatif à cette température. Cependant, la température de la colonne de vapeur ne sera pas la même, non plus que la densité, dans toute sa hauteur; et ce serait un problème curieux que de déterminer les lois de sa température et de sa densité d'après les températures θ et θ', qui ont lieu constamment à ses deux extrémités, et en regardant la densité de chaque couche comme une fonction de sa température, telle que la force élastique soit constante et égale à p'. Cette constance de la pression dans toute la hauteur de la colonne de vapeur est évidemment la condition d'équilibre de ses couches successives; et quand l'équilibre s'est établi, il est également évident que la valeur de la pression constante ne peut pas excéder celle qui répond à la plus petite des deux températures θ et θ', tandis qu'elle peut être moindre que la force élastique correspondante à la plus grande. L'expérience montre, au reste, que la vapeur parvient, dans un temps extrêmement court, à l'état d'équilibre dont il s'agit; en sorte que si une vapeur d'eau, à son *maximum* de densité et de pression, est contenue dans un espace fermé dont les parois aient partout sa propre température, et qu'on vienne à abaisser inégalement la température d'une partie de ces parois, une partie de la vapeur se liquéfiera, et la partie restante prendra dans toute son étendue, avec une très grande rapidité, la force élastique *maxima* qui répond à la moindre température.

Cela posé, lorsque le piston ne sera plus retenu, il descendra, et l'on verra, comme dans le cas précédent, que son mouvement sera uniformément accéléré, sa force motrice égale à $P - \lambda p'$ ou $\lambda(p - p')$, sa force accélératrice égale à la pesanteur multipliée par le rapport $\frac{p-p'}{p}$, et enfin, la force vive produite par la chute totale, égale à $2\lambda(p-p')\,l$. Quand le piston est parvenu en EF, si l'on élève la température de l'eau inférieure, et que ce liquide produise une vapeur dont la pression constante sur la base du piston soit plus grande que le poids de ce corps, il remontera d'un mouvement uniformément accéléré, et la force vive produite, quand il aura parcouru une longueur l', sera égale au double de l' multiplié par l'excès de cette pression sur ce poids, en faisant toujours abstraction du frottement.

C'est d'après ces considérations que l'on calcule la force vive due à la chute ou à l'ascension du piston dans les machines à vapeur; laquelle force se distribue ensuite dans le système auquel la machine est appliquée, et s'y trouve en partie détruite par les frottemens, et en partie employée à produire un effet utile. Le calcul serait différent, si la densité de la vapeur contenue dans le corps de pompe n'était pas au *maximum*; ce qui arrive, en effet, pendant ce qu'on appelle la *détente* de la vapeur, c'est-à-dire, pendant qu'on interrompt la communication de ce fluide avec la chaudière, et que la vapeur se dilate, sans qu'il s'en ajoute de nouvelle : le mouvement du piston est alors celui que nous avons considéré dans le n° 358; et d'après ce que nous avons vu dans le numéro suivant, la force vive produite pendant qu'il parcourt une longueur quelconque, a pour valeur $2pv \log \frac{p'}{p}$, en désignant par v le volume primitif du fluide, et par p et p' ses forces élastiques au commencement et à la fin du mouvement.

644. Il nous reste maintenant à considérer les forces élastiques et les quantités de chaleur des mélanges de plusieurs gaz, comparées à celles de ces fluides.

Supposons qu'on ait deux gaz différens, à la même température θ et sous la même pression p, dont les volumes soient a et a'. Si on les superpose dans un vase fermé, dont la capacité soit $a + a'$, il est évident qu'ils pourront s'y tenir en équilibre, puisqu'ils ont la même température, et qu'ils exerceront l'un contre l'autre la même pression; mais l'expérience prouve que cet équilibre n'est pas stable : elle fait voir que ces deux fluides se pénètrent graduellement jusqu'à ce qu'ils soient parfaitement mêlés; et elle montre aussi que, dans cette opération, il n'y a aucune variation de température, ni aucune perte ou absorption de chaleur; en sorte qu'après un certain temps, différent pour les différens fluides, on a un mélange homogène dans lequel la proportion des deux gaz est partout la même, et dont la température et la force élastique sont toujours θ et p. De ces faits, constatés par l'observation, on peut conclure un autre résultat que l'expérience vérifie également.

Si l'on a deux gaz mêlés ensemble et remplissant un volume v, à la température θ, et si l'on désigne par p et p' les pressions rapportées à l'unité de surface, que ces deux gaz supportent séparément à la même température et sous ce volume v, la force élastique du mélange sera $p + p'$. En effet, supposons d'abord que les deux gaz soient séparés, et qu'on ait $p' > p$. Si l'on dilate le gaz soumis à la pression p', sans changer sa température, et de manière que sa force élastique se réduise à p, son volume sera alors $\frac{vp'}{p}$, d'après la loi de Mariotte. Supposons ensuite qu'on superpose les deux gaz dans un vase fermé, dont la capacité soit $v + \frac{vp'}{p}$, ou $\frac{v}{p}(p + p')$; ces gaz se mêleront sans variation de température, d'après ce qu'on vient de dire; et il en résultera un mélange homogène à la température θ et sous la pression p. Or, la loi de Mariotte

s'appliquant aux mélanges des gaz, aussi bien qu'aux gaz simples, si l'on comprime ce mélange sans changement de température, jusqu'à ce que son volume $\frac{v}{p}(p+p')$ soit réduit à v, sa force élastique p deviendra $p+p'$; ce qu'il s'agissait de démontrer. Le même principe aura également lieu pour trois ou un plus grand nombre de gaz, et pour un mélange de gaz et de vapeurs : la pression du mélange sera toujours la somme des pressions que ces fluides supporteraient isolément, à la même température et sous le même volume que le mélange.

645. Soient actuellement n et n' les nombres de grammes de deux gaz, mêlés ensemble et remplissant un volume v, à la température t et sous la pression p ; désignons par c et c' les chaleurs spécifiques d'un gramme de ces gaz, sous une pression constante et égale à p, et par c'' la chaleur spécifique d'un gramme du mélange sous la même pression ; on aura

$$(n + n')\, c'' = nc + n'c'. \qquad (9)$$

En effet, je suppose que les deux gaz, au lieu d'être parfaitement mêlés, ne soient que superposés, de sorte qu'ils occupent des portions séparées a et a' du volume v ; d'après ce qu'on a dit tout à l'heure, la quantité de chaleur sera la même dans les deux gaz séparés et dans le mélange de ces deux gaz ; et cette égalité de chaleur subsistera encore, si l'on augmente d'un degré la température t des deux gaz et du mélange. Or, pour cette augmentation, il faudra communiquer, la pression p restant la même, une quantité $(n+n')\,c''$ de chaleur au mélange, et des quantités nc et $n'c'$ aux deux gaz. La première quantité devra donc être égale à la somme des deux autres ; ce qui donne l'équation (9), que l'on étendra sans peine à un nombre quelconque de fluides élastiques. Elle donnera la chaleur spécifique d'un mélange, lorsque celles de tous les gaz ou vapeurs qui le composent, et les proportions de ces fluides, seront connues ; réciproquement, on pourra s'en servir pour déterminer la chaleur spécifique de l'un des composans, d'après celles de tous les autres et du mélange ; et l'on peut remarquer qu'elles ne supposent pas que les chaleurs spécifiques des gaz mélangés soient indépendantes de leur commune température.

Au lieu de considérer les chaleurs spécifiques c, c', c'', des gaz et du mélange sous une pression constante, on aurait pu considérer, de la même manière, leurs chaleurs spécifiques à volume constant ; et en les désignant par c_1, c_1', c_1'', on serait parvenu à une équation semblable à la précédente, savoir :

$$(n + n')\, c_1'' = nc_1 + n'c_1'. \qquad (10)$$

Or, si l'on fait

$$\frac{c}{c_1} = \gamma, \quad \frac{c'}{c_1'} = \gamma', \quad \frac{c''}{c_1''} = \gamma'',$$

on tirera des équations (9) et (10)

$$\gamma'' = \frac{n\gamma c_1 + n'\gamma' c_1'}{nc_1 + n'c_1'}; \qquad (11)$$

équation qui fera connaître le rapport γ'' relatif au mélange, quand les quantités semblables γ et γ', et les valeurs de c_1 et c_1', seront connues pour les deux gaz mélangés. Soit qu'on prenne $\gamma = 1{,}375$ ou $\gamma = 1{,}421$ (n° 638) pour la valeur de γ relative à l'air sec, et quelle que soit la valeur inconnue de γ' qui répond à la vapeur d'eau, la valeur de γ'' relative à l'air ordinaire différera peu de γ, à cause de la petite proportion de vapeur que cet air renferme.

D'après ce qu'on a vu dans le n° 640, si les rapports γ et γ' sont indépendans de la pression p, mais différens pour les deux gaz, les quantités c_1 et c_1' seront exprimées par des puissances inégales de p ; d'où il résultera, en vertu de l'équation (11), que le rapport γ'' relatif au mélange ne pourra pas être aussi indépendant de la pression. L'hypothèse de l'invariabilité du rapport de la chaleur spécifique d'un même fluide sous une pression constante, à sa chaleur spécifique sous un même volume, et les formules que nous en avons déduites, ne peuvent donc convenir en même temps aux gaz simples, pour lesquels ce rapport n'est pas le même, et à leurs mélanges en proportion quelconque ; et si ce rapport a paru constant dans les expériences faites sur l'air à différentes pressions (n° 638), c'est parce qu'il est sensiblement le même pour l'air et l'oxygène, et, par conséquent aussi pour l'oxygène et l'azote dont l'air est composé.

LIVRE SIXIÈME.

HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

646. Les équations de l'équilibre des fluides que nous avons trouvées dans le n° 583, sont fondées sur la propriété caractéristique commune aux liquides et aux fluides aériformes, de transmettre également en tous sens les pressions appliquées à leur surface, et d'exercer autour de chaque point de leur masse, en vertu de l'action moléculaire, des pressions égales suivant toutes les directions. Cette propriété, comme nous l'avons dit précédemment (n° 577), tient à ce que les molécules d'un fluide qu'on a comprimé ou dilaté reviennent très promptement à une disposition semblable à celle qui avait lieu primitivement autour d'un point quelconque, de telle sorte qu'après sa compression ou sa dilatation, un fluide est un système de points matériels semblable à ce qu'il était auparavant, et seulement construit sur une plus petite ou une plus grande échelle. Le temps de ce retour à un état semblable n'influe pas sur les lois de l'équilibre, que l'on n'observe jamais qu'après qu'il est écoulé; mais, quelque petit qu'il soit, on comprend qu'il peut influer sur les lois de leur mouvement, surtout dans le cas où les vibrations des molécules fluides s'exécutent avec une grande rapidité; de manière que le principe de l'égalité de pression en tous sens peut convenir à l'Hydrostatique, et n'être pas toujours applicable à l'*Hydrodynamique*, c'est-à-dire, à la partie de la Mécanique qui traite du mouvement des fluides.

Une différence analogue entre l'état d'équilibre et l'état de mouvement, a déjà été remarquée par Laplace, relativement à la loi de Mariotte. Cette loi exige que la température du fluide soit redevenue la même, après la compression, qu'elle était auparavant; et le principe de l'égalité de pression en tous sens suppose, de même, que les molécules du fluide ont eu le temps de revenir à une disposition respective semblable à leur disposition première. Elle n'a plus lieu, ou doit être modifiée, dans les vibrations très rapides des gaz, où la température primitive n'a pas le temps de se rétablir; et, de même, le principe de l'égalité de pression en tous sens n'est pas rigoureusement et toujours applicable aux mouvemens des liquides et des fluides aériformes. On a reconnu dans la vitesse de propagation du son, l'influence de cette modification de la loi de Mariotte; et il y a sans doute aussi des phénomènes du mouvement des fluides, en général, qui dépendent de la non-égalité parfaite de pression en tous sens, résultant de la cause que nous indiquons. Cette circonstance introduit dans les équations générales du mouvement des fluides, des termes qui ne peuvent se déduire de leurs équations d'équilibre; j'y ai eu égard dans le Mémoire déjà cité (n° 577), et je me propose de revenir, par la suite, sur cette importante considération. Mais dans ce Traité, je supposerai, suivant la méthode qu'on suit ordinairement, la propriété de l'égalité de pression en tous sens, commune à l'état d'équilibre et à l'état de mouvement;

et, dans cette hypothèse, les équations de l'Hydrostatique, fondées sur cette propriété, s'étendront immédiatement à l'Hydrodynamique, au moyen du principe de D'Alembert, qui est applicable à tous les systèmes de points matériels.

647. Considérons de nouveau la masse fluide ABCD (fig. 121), dont nous avons déterminé les équations d'équilibre; supposons maintenant qu'elle soit en mouvement, et que toutes les notations du n° 582 répondent à la fin du temps quelconque t, compté depuis l'origine de ce mouvement. Ainsi, la masse fluide est homogène ou hétérogène, liquide ou aériforme; x, y, z, sont, au bout du temps t, les coordonnées d'un élément quelconque dm de cette masse; ρ représente la densité du fluide qui a lieu en ce point et à cet instant; et Xdm, Ydm, Zdm, sont les composantes parallèles aux axes des x, y, z, de la force motrice de dm à ce même instant. Les quantités X, Y, Z, seront des fonctions données de x, y, z, quand elles proviendront d'attractions ou de répulsions qui émanent de centres fixes; ces fonctions données renfermeront le temps explicitement, quand les centres des forces seront en mouvement. Lorsque ces points seront ceux du fluide, X, Y, Z, seront des fonctions de x, y, z, t, dépendantes de sa figure à chaque instant, et de la loi des densités dans son intérieur.

Les coordonnées x, y, z, varieront avec le temps; elles varieront aussi d'un point à un autre du fluide; et si l'on désigne par x', y', z', leurs valeurs initiales, c'est-à-dire, les coordonnées du point de l'espace qu'occupait l'élément dm à l'origine du mouvement, les coordonnées x, y, z, de ce même élément au bout du temps t, seront des fonctions inconnues de x', y', z', t : la solution complète du problème consisterait à déterminer ces trois fonctions de quatre variables indépendantes.

Si l'on appelle u, v, w, les composantes parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, de la vitesse dont l'élément dm est animé au bout du temps t, on aura

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}; \qquad (1)$$

on pourra regarder u, v, w, comme des fonctions inconnues, soit de t, x', y', z', soit de t, x, y, z; c'est sous ce second point de vue que nous considérerons ces trois quantités; et alors, pour avoir leurs accroissemens dans l'instant dt, il faudra les différentier par rapport à t et par rapport aux coordonnées x, y, z. Or, si l'on désigne par q une fonction quelconque de t, x, y, z, et par $q'dt$ sa différentielle prise par rapport à t et aux variables x, y, z, considérées comme des fonctions de t, on aura, par la règle connue de la différentiation des fonctions de fonctions,

$$q' = \frac{dq}{dt} + \frac{dq}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dq}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dq}{dz}\frac{dz}{dt},$$

ou bien, en ayant égard aux équations (1),

$$q' = \frac{dq}{dt} + u\frac{dq}{dx} + v\frac{dq}{dy} + w\frac{dq}{dz}.$$

En désignant les accroissemens de u, v, w, par $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$, nous aurons donc

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

$$v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$

$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz};$$

et, de cette manière, les composantes de la vitesse d'un même élément dm, dans les deux positions qu'il occupe successivement, seront u, v, w, et $u + u'dt$, $v + v'dt$, $w + w'dt$.

Quant à la densité ρ, ce sera une constante donnée, si le fluide est homogène et considéré comme incompressible; s'il s'agit d'un liquide hétérogène, la densité ρ, qui répond à un élément déterminé dm, sera une fonction donnée de ses trois coordonnées initiales x', y', z'; enfin, si le fluide est compressible, cette densité ρ sera une fonction inconnue de t, x', y', z', dont la valeur initiale sera seulement donnée. Excepté le cas où ρ est une constante, cette densité, rapportée à la position de dm au bout du temps t, devra toujours être considérée comme une fonction inconnue de x, y, z, t. Si l'on désigne alors par $\rho'dt$, son accroissement pendant l'instant dt, on aura, d'après la formule (2),

$$\rho' = \frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz};$$

et dans le cas d'un fluide incompressible, homogène ou hétérogène, cette valeur de ρ' devra se réduire à zéro.

648. Les composantes de la force perdue par l'élément dm pendant l'instant dt, seront

$$(X - u')\,dm, \quad (Y - v')\,dm, \quad (Z - w')\,dm;$$

en substituant donc $X - u'$, $Y - v'$, $Z - w'$, à la place de X, Y, Z, dans les équations (2) du n° 583, il en résultera ces trois équations de son mouvement :

$$\frac{dp}{dx} = \rho\,(X - u'), \quad \frac{dp}{dy} = \rho\,(Y - v'), \quad \frac{dp}{dz} = \rho\,(Z - w');$$

p étant la pression rapportée à l'unité de surface, qui a lieu au bout du temps t, au point qui répond aux coordonnées x, y, z, et qu'on suppose la même suivant toutes les directions.

Si ce point appartient à une paroi fixe, p exprimera la pression normale que cette surface aura à supporter, et qui devra être détruite par sa résistance. Si ce point appartient à la surface libre d'un liquide, il faudra qu'on ait $p = 0$, ou plus généralement, $dp = 0$; en sorte que l'équation différentielle de la surface libre du liquide en mouvement, sera

$$(X - u')\,dx + (Y - v')\,dy + (Z - w')\,dz = 0.$$

D'après la remarque du n° 586, il faudra que la valeur de p, quand on l'aura déterminée, soit constamment positive dans l'intérieur de ce liquide, si l'on veut que sa masse ne se divise pas pendant le mouvement : quand elle sera négative en un point d'une paroi, ce qui ne pourra avoir lieu que pour un liquide, cette surface cessera d'être pressée de dehors en dedans, et le liquide s'en détachera.

Au moyen des valeurs de u', v', w', les équations précédentes deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz},\\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz},\\
\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Comme la quantité p qu'elle renferme est, ainsi que chacune des vitesses u, v, w, une fonction inconnue de x, y, z, t, il y faudra joindre une quatrième équation, lorsque la quantité ρ sera une constante donnée, et deux autres équations, dans le cas général où cette quantité est aussi une fonction inconnue de x, y, z, t. Ces équations s'obtiendront de la manière suivante.

649. Chacun des élémens dx de la masse fluide changera de forme pendant l'instant dt, et il changera même de volume, si le fluide est compressible; mais comme sa masse devra toujours rester la même, il s'ensuit que le produit de son volume au bout du temps $t + dt$, et de sa densité $\rho + \rho' dt$ qui répond au même instant, devra être le même qu'au bout du temps t; par conséquent, la variation de ce produit dans l'instant dt sera égale à zéro; ce qui fournira une nouvelle équation générale du mouvement.

Pour la former, considérons le parallélipipède rectangle dont le volume était $dx\,dy\,dz$, à la fin du temps t, et cherchons la forme que prendra cet élément du fluide à la fin du temps $t + dt$. Soit M (fig. 139) le sommet de ce parallélipipède qui répond aux coordonnées x, y, z; soient aussi MA, MB, MC, les trois côtés adjacens à ce sommet et respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz; en sorte qu'on ait

$$MA = dx, \quad MB = dy, \quad MC = dz;$$

supposons que D, E, F, G, sont les quatre autres sommets, et que pendant l'instant dt, les huit points M, A, B, C, D, E, F, G, soient transportés en M', A', B', C', D', E', F', G'; je dis que le polyèdre dont ces derniers points sont les sommets, sera un parallélipipède obliquangle; et pour le prouver, je vais déterminer et comparer entre elles les longueurs de ses douze côtés M'A', M'B', etc.

Les coordonnées x, y, z, du point M deviennent

$$x + u\,dt, \quad y + v\,dt, \quad z + w\,dt,$$

au bout de l'instant dt; ces quantités sont donc les coordonnées du point M'; on en déduira celles de tout autre sommet, en y remplaçant x, y, z, par les coordonnées primitives de ce sommet; ainsi, l'on aura les coordonnées de C', en y conservant x et y, et mettant $z + dz$ à la place de z, parce que x, y, $z + dz$ sont les coordonnées de C. De cette manière, les coordonnées de C' seront

$$x + u\,dt + \frac{du}{dz}\,dz\,dt,$$

$$y + v\,dt + \frac{dv}{dz}\,dz\,dt,$$

$$z + dz + w\,dt + \frac{dw}{dz}\,dz\,dt;$$

et, en les comparant à celles de M', on en conclura

$$M'C' = \sqrt{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 dz^2\,dt^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz^2\,dt^2 + \left(dz + \frac{dw}{dz}\,dz\,dt\right)^2};$$

en extrayant la racine carrée et négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on aura donc

$$M'C' = dz + \frac{dw}{dz}\,dz\,dt.$$

Les coordonnées de D' se déduiront de celles de M', et les coordonnées de G' de celles de C' en y mettant $x + dx$ et $y + dy$ à la place de x et y; par conséquent, la longueur du côté D'G' se déduira de même de celle du côté M'C'; ce qui donne

$$D'G' = dz + \frac{dw}{dz}\,dz\,dt + \frac{d^2 w}{dx\,dz}\,dx\,dz\,dt + \frac{d^2 w}{dy\,dz}\,dy\,dz\,dt;$$

donc en négligeant les deux derniers termes, qui sont du troisième ordre, la valeur de D'G' sera la même que celle de M'C'. On trouvera de la même manière, que les côtés A'E' et B'F' sont égaux au côté M'C', aux quantités près du troisième ordre; en sorte que l'on aura

$$M'C' = A'E' = B'F' = D'G'.$$

Si l'on change z en y, et w en v, dans la valeur de M'C', elle deviendra celle de M'B', savoir :

$$M'B' = dy + \frac{dv}{dy}\, dy\, dt;$$

en changeant de même z en x et w en u, on aura la valeur de M'A', qui sera

$$M'A' = dx + \frac{du}{dx}\, dx\, dt;$$

et l'on trouvera aussi

$$M'B' = A'D' = C'F' = E'G',$$
$$M'A' = B'D' = C'E' = F'G'.$$

Nous voyons donc que les côtés égaux entre eux dans le parallélipipède primitif, sont encore restés égaux après son changement de forme : le parallélisme de ses côtés est une conséquence de leur égalité; par conséquent, l'élément de volume que nous considérons conserve, à la fin de dt, la forme d'un parallélipipède, mais qui n'est pas rectangle, comme au commencement de cet instant.

On aura le volume de ce parallélipipède obliquangle en multipliant l'une de ces faces, par exemple, la face M'A'D'B', par la perpendiculaire C'P', abaissée du point C' sur cette face; l'aire du parallélogramme M'A'D'B' est égale au produit de ses deux côtés M'A' et M'B', multiplié par le sinus de l'angle A'M'B'; et la perpendiculaire C'P' se déduit du côté C'M', en le multipliant par sin C'M'P'; par conséquent, le volume du nouveau parallélipipède sera pour valeur

$$M'A' \,.\, M'B' \,.\, M'C' \,.\, \sin A'M'B' \,.\, \sin C'M'P'.$$

Or, les angles A'M'B' et C'M'P' étaient droits dans le parallélipipède primitif; chacun d'eux ne peut donc maintenant différer d'un angle droit, que d'une quantité infiniment petite; le sinus de chacun de ces angles ne différera donc de l'unité, que d'un infiniment petit du second ordre; par conséquent, si l'on néglige les infiniment petits du cinquième ordre, il faudra faire sin A'M'B'=1 et sin C'M'P'=1, dans le produit précédent; ce qui le réduit à

$$M'A' \,.\, M'B' \,.\, M'C'.$$

Donc, en mettant pour chacun des facteurs sa valeur précédente, effectuant la multiplication, et négligeant toujours les infiniment petits du cinquième ordre, ce produit sera

$$\left(1 + \frac{du}{dx}\, dt + \frac{dv}{dy}\, dt + \frac{dw}{dz}\, dt\right) dx dy dz.$$

Tel est donc, à la fin du temps $t + dt$, le volume de l'élément qui était $dxdydz$, à la fin du temps t. En même temps la densité ρ est devenue $\rho + \rho' dt$; en multipliant donc ce volume par $\rho + \rho' dt$, et retranchant du produit la masse primitive $\rho dx\, dy\, dz$, on aura la variation de cette masse pendant l'instant dt; et cette variation devant être nulle, il en résultera l'équation

$$\rho' + \rho\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

en négligeant les infiniment petits du cinquième ordre, et supprimant ensuite le facteur $dt\, dx\, dy\, dz$, commun à tous les termes. Par conséquent, d'après la valeur de ρ' du numéro précédent, la quatrième équation du mouvement qu'il s'agissait de former, sera

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0. \quad (4)$$

650. Cette équation appartiendra aux liquides et aux fluides aériformes; mais la quantité ρ' étant nulle, dans le cas des liquides regardés comme incompressibles, cette équation se partagera en deux autres, savoir :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} &= 0, \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

En les joignant aux trois équations (3), on aura un nombre d'équations égal à celui des cinq inconnues ρ, p, u, v, w, qu'elles doivent servir à déterminer en fonction de x, y, z, t. Quand le liquide est homogène, la densité ρ est une constante donnée; ce qui réduit les inconnues à quatre, et fait en même temps disparaître la première équation (5).

Relativement aux fluides élastiques, on n'a aussi que quatre équations, savoir, les équations (3) et (4); mais alors la densité est liée à la pression; ce qui réduit à une seule les deux inconnues ρ et p. Si l'on suppose que la température soit la même dans toute la masse du fluide à l'état de repos, les dilatations ou compressions des élémens de ce fluide, qui auront lieu pendant son mouvement, feront varier cette température, et la pression p ne sera plus proportionnelle à la densité ρ, dans l'état de mouvement, comme elle l'est dans l'état d'équilibre. On verra, dans la suite, comment on peut avoir égard à cette circonstance, dans le cas d'un mouvement très rapide. Maintenant je supposerai qu'il s'agisse d'un mouvement assez lent pour qu'elle n'ait aucune influence sensible; en sorte que l'expression de p en fonction de ρ, soit celle qui convient à l'état d'équilibre, savoir (n° 625),

$$p = k\rho(1 + \alpha t); \quad (6)$$

θ désignant la température commune à tous les points du fluide, α le coefficient 0,00375 de la dilatation des gaz, et k une constante relative à la matière du fluide que l'on considère.

Lorsque les valeurs de ρ, p, u, v, w, auront été déterminées, soit au moyen des cinq équations (3) et (5), soit d'après les cinq équations (3), (4), (6), on en déduira les valeurs des x, y, z, en fonctions de t, et de leurs valeurs initiales x', y', z', au moyen des équations (1). Les intégrales de toutes ces équations aux différences partielles renfermeront des fonctions arbitraires, qui resteront encore à déterminer, d'après l'état initial du fluide, et au moyen de certaines conditions relatives à sa surface dont il sera question plus bas.

651. Quand la température n'est pas la même dans toute la masse fluide à l'origine du mouvement, elle varie ensuite d'un point à un autre, et, pour un même point, d'un instant à l'autre; en sorte que si l'on désigne, au bout du temps t, par θ, la température qui répond aux points dont x, y, z, sont les coordonnées, cette quantité θ est une fonction inconnue de t, x, y, z, et pour la déterminer il faut joindre une nouvelle équation aux précédentes. Cette équation sera différente dans les deux cas d'un liquide et d'un fluide aériforme, que nous allons successivement considérer.

1° Supposons qu'il s'agisse d'un liquide homogène, tel que l'eau, pour fixer les idées. La température θ variant d'un point à un autre, la densité ρ variera de même, et sera une fonction déterminée de θ, que je représenterai par $f\theta$ *. La quantité ρ' ne sera plus nulle, et l'équation (4) ne se décomposera plus dans les deux équations (5). La chaleur spécifique du liquide et la mesure de sa conductibilité seront aussi des fonctions déterminées de θ; mais si l'on suppose que la communication de la chaleur dans l'intérieur de l'eau, ait lieu comme dans un corps solide, par un rayonnement à distance insensible, l'équation relative au mouvement de la chaleur dans un corps hétérogène, que j'ai trouvée autrefois, s'appliquera à la masse d'eau que nous considérons; car elle fait connaître l'accroissement instantané de température qui a lieu en un point quelconque d'un corps, dans lequel la chaleur spécifique et la conductibilité varient arbitrairement d'un point à un autre; et d'après la manière dont elle a été formée, elle ne dépend pas du mouvement du point matériel que l'on considère, non plus que du mouvement des points circonvoisins. Ainsi, en appelant $\theta' dt$ l'accroissement de θ pendant l'instant dt, on aura **

$$g\theta' = \frac{d.h\frac{d\theta}{dx}}{dx} + \frac{d.h\frac{d\theta}{dy}}{dy} + \frac{d.h\frac{d\theta}{dz}}{dz} \qquad (7)$$

* Pour la forme de cette fonction, voyez le *Traité de Physique* de M. Biot, tome 1er, chapitre XI.

** *Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier, page 87.

équation dans laquelle on fera, d'après la formule (2),

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} + u\frac{d\theta}{dx} + v\frac{d\theta}{dy} + w\frac{d\theta}{dz},$$

et où g et h sont des fonctions de θ, qui représentent la chaleur spécifique rapportée à l'unité de masse, et la mesure de la conductibilité. Chacune de ces fonctions est censée connue, ainsi que $f\theta$, de manière que les équations (3), (4), (7), seront en nombre égal à celui des inconnues θ, p, u, v, w, qu'elles renferment. Dans le cas d'un liquide hétérogène, les trois quantités ρ, g, h, relatives au point de sa masse dont les coordonnées sont x, y, z, dépendraient de la température θ et de la matière du fluide en ce point, et seraient, par conséquent des fonctions données de θ et des coordonnées initiales x', y', z', de ce même point.

2° Si le fluide que l'on considère est une masse d'air ou d'un gaz quelconque, dont la température θ varie d'un point à un autre, et que dans l'état de mouvement, la pression soit toujours supposée proportionnelle à la densité, comme dans le n° précédent, l'équation (6) aura toujours lieu; mais l'équation (7) ne subsistera plus; car elle est fondée sur l'hypothèse que la communication de la chaleur dans l'intérieur du corps se fait par un rayonnement à distance insensible; et, au contraire, la chaleur rayonnante traverse les fluides aériformes, dans de très grandes épaisseurs; en sorte qu'il y a échange de chaleur entre des molécules très éloignées l'une de l'autre. Cette équation devra donc être remplacée par une autre, que l'on joindra aux équations (3), (4), (6), afin d'en avoir un nombre égal à celui des inconnues ρ, p, θ, u, v, w. Dans le problème des vents alisés, par exemple, qui sont produits par les différences de température des couches atmosphériques, on formera cette sixième équation de la manière suivante, qu'il nous suffira maintenant d'indiquer.

La quantité de chaleur reçue pendant l'instant dt, par l'élément quelconque dm de la masse fluide, et qu'on peut supposer proportionnelle à $dmdt$, se compose de la chaleur solaire absorbée par dm pendant cet instant dt, à laquelle il faut d'abord ajouter la chaleur rayonnante que cet élément reçoit, dans ce même instant, d'une partie de la surface de la terre et de la partie de l'atmosphère dont la communication avec dm n'est point interrompue par cette surface, et, en outre, la portion de chaleur qui peut être communiquée à dm par les élémens circonvoisins, comme dans les corps solides. En retranchant de cette somme la quantité de chaleur émise au dehors par l'élément dm, pendant l'instant dt, soit par communication, soit par rayonnement à grande distance, on aura l'augmentation instantanée de la chaleur de dm, que l'on peut représenter par $\Delta dmdt$; Δ étant un coefficient dont je me borne à indiquer l'origine. D'un

autre côté, cette augmentation de chaleur est égale à $g\theta' dt dm$, en désignant toujours par g et $\theta' dt$, la chaleur spécifique rapportée à l'unité de masse, et l'accroissement instantané de température ; on aura donc $\delta dm dt = g\theta' dm dt$, ou $\Delta = g\theta'$, pour l'équation demandée, qu'on devra substituer à l'équation (7).

652. Avant d'aller plus loin, il y a une remarque importante à faire relativement à l'équation (4).

D'après la manière dont elle a été formée, elle exprime que la masse de l'élément différentiel dm du fluide ne varie pas pendant l'instant dt; mais c'est pour abréger que l'on a considéré le volume de cette partie du fluide comme infiniment petit; et si l'on divise le volume total en parties de grandeur finie, mais insensible, dont chacune renferme néanmoins un nombre extrêmement grand de molécules, l'équation (4) exprime réellement que chacune de ces parties renferme toujours les mêmes molécules, et que, par conséquent, sa masse est invariable. C'est pour cela qu'elle est désignée sous la dénomination d'*équation de la continuité du fluide*. Or, il existe des mouvemens dans lesquels cette continuité n'a pas lieu, et où l'on ne doit plus faire usage de l'équation qui s'y rapporte.

Supposons, par exemple, que de l'eau soit contenue dans un cylindre vertical, ouvert à sa partie supérieure. Si l'on échauffe le liquide par en haut, la température sera croissante, et la densité décroissante, en allant du fond à la surface; la masse fluide s'allongera, les couches horizontales se remplaceront successivement, et l'équation de la continuité s'appliquera à ce mouvement. Mais si le liquide est échauffé par en bas, la densité sera croissante, et la température décroissante de bas en haut : à la rigueur, les couches horizontales pourront encore se remplacer successivement; mais un pareil mouvement ne serait pas stable; et l'observation montre que les molécules d'eau s'élèvent du fond vers la surface, en traversant les couches supérieures. Toutes les parties très petites du liquide ne sont pas constamment formées des mêmes molécules ; l'équation (4) n'a donc pas lieu dans ce genre de mouvement ; et il est même douteux que les équations (3), fondées sur le principe de l'égalité de pression en tous sens, puissent s'y appliquer; en sorte que, dans l'état actuel de la science, nous n'avons aucun moyen de déterminer le mouvement d'un liquide dont les couches se traversent mutuellement, les unes en montant, les autres en descendant. La même remarque s'applique aux mouvemens verticaux qui peuvent exister dans chaque colonne atmosphérique, dont les couches inférieures, échauffées par le contact avec la terre, et devenues plus légères, s'élèvent en traversant les couches supérieures. La détermination de ces mouvemens, d'un genre différent de ceux qu'on a considérés jusqu'à présent, et leur influence sur les variations diurnes du baromètre, sont des questions sur lesquelles il importe d'appeler l'attention des géomètres.

653. Dans les mouvemens des fluides que l'on soumet au calcul, on a coutume de supposer que les points qui se trouvent, à une époque déterminée, sur une paroi fixe ou mobile, ou qui appartiennent à la surface libre d'un liquide, demeureront sur cette paroi, ou appartiendront à cette surface, pendant toute la durée du mouvement; en sorte que l'on exclut les mouvemens très compliqués dans lesquels des points d'un fluide, après avoir appartenu à sa superficie, rentreraient dans l'intérieur de la masse, ou réciproquement; et l'on exclut même les cas où des points d'un liquide passeraient alternativement de la surface libre à la surface en contact avec une paroi fixe ou mobile. Ces conditions particulières auxquelles on assujettit les mouvemens que l'on considère, s'expriment par les équations suivantes.

Soient toujours x, y, z, les coordonnées variables d'un point du fluide, et

$$f(t, x, y, z) = 0,$$

l'équation d'une surface fixe ou mobile qui passe par ce point au bout du temps t, et que nous appellerons S, pour abréger. Désignons aussi par x', y', z', les coordonnées initiales du même point; de sorte que x, y, z, soient des fonctions de t, x', y', z', Si l'on substitue leurs valeurs dans l'équation donnée, elle se changera en

$$F(t, x', y', z') = 0;$$

et tous les points du fluide dont les coordonnées initiales satisferont à cette équation, seront ceux qui appartiennent, au bout du temps t, à la surface S; par conséquent, pour que ces points soient constamment les mêmes, il faudra que la fonction F ne renferme pas la variable t. Si donc S est la surface libre, ou celle d'une paroi fixe ou mobile, il faudra que la fonction $f(t, x, y, z)$ soit indépendante de t, en y regardant x, y, z, comme des fonctions de ces variables; sa différentielle complète par rapport à t devra donc être nulle; et d'après la formule (2), on aura

$$\frac{df}{dt} + u\frac{df}{dx} + v\frac{df}{dy} + w\frac{df}{dz} = 0, \quad (8)$$

pour exprimer la condition ci-dessus énoncée.

Dans le cas d'une paroi fixe, la fonction f ne renfermera pas explicitement le temps t; en la représentant par L, de sorte que $L = 0$ soit l'équation donnée par la paroi, l'équation (8) deviendra

$$u\frac{dL}{dx} + v\frac{dL}{dy} + w\frac{dL}{dz} = 0. \quad (9)$$

Si l'on désigne par ζ la résultante des vitesses u, v, w, et par α, β, γ, les angles qu'elle fait avec les directions des x, y, z; si l'on appelle aussi a, b, c,

les angles que fait la normale à la paroi avec les mêmes directions, et qu'on fasse

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2 = \lambda^2,$$

on aura, en même temps,

$$u = \zeta \cos\alpha, \quad v = \zeta \cos\beta, \quad w = \zeta \cos\gamma,$$

$$\frac{dL}{dx} = \lambda \cos a, \quad \frac{dL}{dy} = \lambda \cos b, \quad \frac{dL}{dz} = \lambda \cos c;$$

et, en substituant ces valeurs dans l'équation (9), et supprimant ensuite le facteur commun $\zeta\lambda$, elle deviendra

$$\cos\alpha \cos a + \cos\beta \cos b + \cos\gamma \cos c = 0.$$

Cette équation (9) signifie donc que la vitesse de chaque point de fluide adjacent à une paroi fixe, est normale à cette surface; et, en effet, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que ce point ne se détache pas de la paroi, et ne fasse que glisser sur sa surface.

A la surface libre d'un liquide, la pression p est, en général, une quantité constante; mais elle pourrait dépendre de t et être seulement indépendante de x, y, z, si la pression extérieure, commune à tous les points de cette surface, variait avec le temps; en la désignant par T, l'équation de la surface libre sera donc $p - T = 0$; et en mettant $p - T$ à la place de f dans l'équation (8), on aura

$$\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = \frac{dT}{dt}, \quad (10)$$

pour l'équation qui aura lieu en même temps que $p - T = 0$, ou en même temps que l'équation différentielle de la surface libre, qui a été donnée dans le n° 648.

Nous ferons remarquer que les équations (8), (9), (10) auront encore lieu, sans erreur sensible, lorsque les points du fluide ne s'écarteront de sa superficie, que de quantités insensibles. Par conséquent, si l'on considère, comme dans le numéro précédent, une portion du fluide dont les dimensions soient de grandeur finie, mais insensibles, et qui contienne néanmoins un nombre immense de molécules, et si l'on suppose qu'une partie de sa surface appartienne à celle du fluide, à une époque déterminée, ces équations exprimeront, en réalité, que cela aura lieu pendant toute la durée du mouvement. Cette partie commune aux deux surfaces, pourra, d'ailleurs, varier en étendue dans des rapports quelconques; et la petite portion de fluide dont il s'agit, en se déplaçant à la superficie du fluide, pourra s'étendre ou se rétrécir sans que son volume change dans le cas d'un liquide, ou sa masse dans le cas d'un fluide quelconque. Ainsi, par exemple, lorsqu'un liquide pesant oscille dans un vase ouvert à sa partie supérieure, l'étendue de sa surface libre et celle de sa surface de contact avec les parois du vase varient pendant le mouvement, de sorte que le nombre des points matériels du liquide, qui sont situés à l'une ou l'autre de ces deux surfaces, n'est pas constamment le même; mais les équations (9) et (10) peuvent avoir lieu néanmoins, si l'on considère qu'elles ne répondent pas seulement à des points isolés, mais qu'elles se rapportent à de petites portions du liquide, de grandeur insensible et de forme variable.

Ces équations particulières que Lagrange a introduites dans la théorie des fluides, concourront, dans chaque cas, avec l'état initial du système, à déterminer les fonctions arbitraires qui seront contenues dans les équations du mouvement.

654. Dans un cas très étendu, on peut réduire les trois équations (3) à une équation aux différences partielles du premier ordre, et faire dépendre d'une seule quantité, les trois inconnues u, v, w. Ce cas a lieu, lorsque la formule $udx + vdy + wdz$ est une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, regardées comme des variables indépendantes, et que le fluide dont on s'occupe est homogène et partout à la même température, dans son état d'équilibre.

Soit alors

$$udx + vdy + wdz = d\varphi;$$

φ désignant une fonction inconnue des quatre variables t, x, y, z, mais la différentielle $d\varphi$ étant prise seulement par rapport à x, y, z, de sorte qu'on ait

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (a)$$

D'après la nature des forces X, Y, Z, qui proviennent toujours d'attractions ou de répulsions, dont les centres sont des points fixes ou mobiles, ou les points mêmes du fluide, on a aussi

$$Xdx + Ydy + Zdz = dV,$$

et, par conséquent,

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz};$$

V étant une fonction de t, x, y, z, qui n'est différentiée que par rapport à x, y, z. Dans le cas d'un fluide élastique dont la densité est constante à l'état de repos, l'intégrale $\int \frac{dp}{\rho}$ s'exprimera par un logarithme, si l'on suppose que la loi de Mariotte ait encore lieu à l'état de mouvement; si l'on tient compte des variations de température qui accompagnent celle de la densité pendant le mouvement, cette intégrale sera une autre fonction de p; et dans le cas d'un liquide homogène,

elle se réduira à $\frac{1}{\rho}p$, abstraction faite de la constante arbitraire. Pour comprendre tous ces cas en un seul, je ferai

$$\int \frac{dp}{\rho} = \mathrm{P};$$

il en résultera

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{d\mathrm{P}}{dx}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{d\mathrm{P}}{dy}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \frac{d\mathrm{P}}{dz},$$

et au moyen de ces valeurs et des précédentes, les équations (3) deviendront

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx} = \frac{d\mathrm{V}}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dxdt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dxdy} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dxdz},$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy} = \frac{d\mathrm{V}}{dy} - \frac{d^2\varphi}{dydt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dydx} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dydz},$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dz} = \frac{d\mathrm{V}}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dzdt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dzdx} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dzdy} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Je les ajoute après les avoir multipliées par dx, dy, dz; il vient

$$d\mathrm{P} = d\mathrm{V} - d.\frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}d.\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

et tous les termes de cette équation étant des différentielles exactes à trois variables x, y, z, on en déduit immédiatement

$$\mathrm{V} - \mathrm{P} = \frac{d\varphi}{dt} + \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]. \qquad (b)$$

La constante arbitraire qu'on devrait ajouter dans cette intégration, peut être censée contenue dans la quantité inconnue φ, et l'on peut regarder les intégrales V et P comme des quantités entièrement déterminées.

Cette équation, qui remplacera les trois équations (3), fera connaître la valeur de p, quand celle de φ sera déterminée; les équations (a) détermineront aussi les trois inconnues u, v, w; et quant à la valeur de φ, elle se déduira de l'équation (4), qui devient

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.\rho\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.\rho\frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0. \quad (c)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, cette équation se réduira à

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0;$$

dans le cas d'un fluide aériforme, on y mettra pour ρ sa valeur en fonction de p, et pour p sa valeur tirée de l'équation (b).

655. Pour que la formule $udx + vdy + wdz$ soit une différentielle exacte pendant toute la durée du mouvement, il faut qu'elle le soit à l'origine, et que les valeurs initiales de u, v, w, qui sont données arbitrairement en fonctions de x, y, z, satisfassent aux conditions d'intégrabilité. Réciproquement, on admet qu'il suffit que cette formule soit une différentielle exacte relativement à une valeur déterminée de t, pour qu'elle le soit aussi pour toutes les valeurs de cette quantité; mais cette proposition n'a pas toute la généralité qu'on lui suppose. Voici comment on la démontre.

Soit t_1 une valeur particulière de t; supposons que pour cette valeur on ait

$$udx + vdy + wdz = d\varphi_1;$$

φ_1 étant une fonction de x, y, z. Si l'on désigne par ϵ un intervalle de temps infiniment petit, et que le temps t devienne $t_1 + \epsilon$, les quantités u, v, w, varieront aussi; et en supposant que leurs expressions en fonctions de t soient développables, suivant les puissances de ϵ, on aura

$$u = \frac{d\varphi_1}{dx} + \epsilon u_1, \quad v = \frac{d\varphi_1}{dy} + \epsilon v_1, \quad w = \frac{d\varphi_1}{dz} + \epsilon w_1,$$

et, par conséquent,

$$udx + vdy + wdz = d\varphi_1 + \epsilon(u_1dx + v_1dy + w_1dz),$$

en désignant par u_1, v_1, w_1 des fonctions de x, y, z. Pour avoir les valeurs des différences partielles $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, qui entrent dans les équations (3), il faudra différentier ces valeurs de u, v, w, par rapport à ϵ; ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = u_1, \quad \frac{dv}{dt} = v_1, \quad \frac{dw}{dt} = w_1.$$

En les substituant avec celles de u, v, w, et de leurs différences partielles relatives à x, y, z, dans ces équations, et supprimant ensuite les termes multipliés par ε, il vient

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - u_{,} - \frac{d\varphi_{,}}{dx}\frac{d^2\varphi_{,}}{dx^2} - \frac{d\varphi_{,}}{dy}\frac{d^2\varphi_{,}}{dxdy} - \frac{d\varphi_{,}}{dz}\frac{d^2\varphi_{,}}{dxdz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - v_{,} - \frac{d\varphi_{,}}{dx}\frac{d^2\varphi_{,}}{dydx} - \frac{d\varphi_{,}}{dy}\frac{d^2\varphi_{,}}{dy^2} - \frac{d\varphi_{,}}{dz}\frac{d^2\varphi_{,}}{dydz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - w_{,} - \frac{d\varphi_{,}}{dz}\frac{d^2\varphi_{,}}{dzdx} - \frac{d\varphi_{,}}{dy}\frac{d^2\varphi_{,}}{dzdy} - \frac{d\varphi_{,}}{dz}\frac{d^2\varphi_{,}}{dz^2};$$

d'où l'on tire, d'après les notations précédentes,

$$u_{,}dx + v_{,}dy + w_{,}dz$$
$$= dV - dP - \frac{1}{2}d.\left[\left(\frac{d\varphi_{,}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_{,}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_{,}}{dz}\right)^2\right];$$

et d'où il résulte que la quantité $(u_{,}dx + v_{,}dy + w_{,}dz)\varepsilon$, dont s'accroît la formule $udx + vdy + wdz$ pendant le temps ε, sera une différentielle exacte. Par conséquent, cette formule sera une différentielle exacte au bout du temps $t_{,} + \varepsilon$, puisqu'on suppose qu'elle l'est au bout du temps $t_{,}$; elle le sera au bout du temps $t_{,} + 2\varepsilon$, puisqu'elle l'est au bout du temps $t_{,} + \varepsilon$; et ainsi de suite. Et comme on peut prendre ε positif ou négatif, on en conclut que cette formule $udx + vdy + wdz$ est une différentielle exacte pour toutes les valeurs de t, si l'on s'est assuré qu'elle le soit pour telle valeur qu'on voudra de cette variable.

Mais cette démonstration suppose que les valeurs de u, v, w, qui répondent à $t + \varepsilon$, peuvent se développer suivant les puissances de ε, ou, ce qui revient au même, elle suppose que les expressions de u, v, w, en fonctions de t, satisfont aux équations du problème et à toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations relatives à t. Or, cela n'a pas toujours lieu à l'égard des expressions de u, v, w, en séries d'exponentielles et de sinus ou cosinus, dont les exposans et les arcs sont proportionnels à t; et la démonstration étant en défaut, la proposition peut aussi être, et elle est effectivement en défaut dans certains cas dont j'ai rencontré des exemples. Dans chaque problème, les expressions de u, v, w, dont il s'agit, satisfont aux équations relatives à la masse et à la surface du fluide en mouvement; en y déterminant convenablement les coefficiens des exponentielles et des sinus ou cosinus, elles représentent l'état initial et donné de tous les points du fluide; et si les séries qui en résultent sont d'ailleurs convergentes, cela suffit pour qu'elles renferment la solution de la question, quoiqu'un de leurs caractères particuliers soit de ne pas toujours satisfaire aux équations qui se déduisent de celles du mouvement, par de nouvelles différentiations.

656. La condition d'intégrabilité de la formule $udx + vdy + wdz$ n'a pas lieu dans le mouvement d'un fluide qui tourne, sans changer de forme, autour d'un axe fixe. En effet, les composantes de la vitesse d'un point quelconque sont alors les mêmes que dans le cas d'un corps solide; en prenant donc l'axe fixe pour celui des z, et désignant par ω la vitesse angulaire de rotation, on aura (n° 388)

$$u = -y\omega, \quad v = x\omega, \quad w = 0;$$

d'où il résulte

$$udx + vdy + wdv = \omega(xdy - ydx);$$

quantité qui n'est point une différentielle exacte, puisque le facteur ω est indépendant des coordonnées x et y.

Il en résulte que pour déterminer la pression p en un point quelconque, il faudra recourir, dans cet exemple, aux équations (3). Or, en y mettant les valeurs de u, v, w, et considérant ω comme une quantité constante par rapport à t, aussi bien que par rapport à x, y, z, il vient

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\rho}dp = Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2(xdx + ydy);$$

équation qui coïncide avec celle qu'on a trouvée dans le n° 590, par la considération de l'équilibre des forces données qui agissent sur tous les points du fluide, et de leurs forces centrifuges résultant de son mouvement de rotation.

CHAPITRE II.

DE LA PROPAGATION DU SON.

657. Il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage, de faire connaître les résultats nombreux qui ont été déduits des équations générales du mouvement des fluides qu'on vient de donner; je me contenterai d'indiquer les ouvrages dans lesquels on peut les trouver. Dans le chapitre suivant, je déterminerai le mouvement d'un fluide qui s'écoule dans un vase, d'après une hypothèse particulière et approximative, généralement suffisante pour la pratique; et, dans celui-ci, je prendrai pour exemples de l'application des équations générales, les cas les plus simples de la théorie du son.

1° On trouvera, dans les tomes II et V de la *Mécanique céleste*, tout ce qui est connu jusqu'à présent sur les oscillations de la mer et de l'atmosphère, produites par les attractions de la lune et du soleil.

2° Le tome II de la *Mécanique analytique* renferme la détermination, par le moyen de séries convergentes, du mouvement d'un liquide pesant, soit dans un canal très étroit, soit dans un vase très profond.

3° Relativement aux oscillations de ce liquide dans un vase d'une profondeur quelconque, je renverrai au Mémoire que j'ai inséré, sur ce sujet, dans le tome XIX du Journal de M. Gergonne.

4° Pour le problème de la propagation des ondes à la surface et dans l'intérieur d'une eau stagnante, je renverrai de même à mon Mémoire inséré dans le tome Ier de l'Académie des Sciences.

5° Sur l'écoulement des fluides élastiques dans les vases et dans les tuyaux, on pourra consulter le Mémoire de M. Navier, qui fait partie du tome IX de cette Académie.

6° Enfin, pour tout ce qui concerne la théorie du son, et, généralement, la propagation du mouvement dans un milieu élastique ou dans plusieurs milieux superposés, j'indiquerai les Mémoires que j'ai écrits sur ce sujet, et qui font partie du 14e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et des tomes II et X de l'Académie des Sciences.

658. Pour donner une application des équations générales, considérons un fluide élastique homogène, dont la température et la densité soient partout les mêmes dans son état d'équilibre, et qu'on ait écarté un tant soit peu de cet état, de sorte que pendant tout le mouvement qui en résultera, les vitesses de ses différens points soient très petites, et les condensations ou dilatations dont elles seront accompagnées soient aussi de très petites fractions. Nous négligerons, en conséquence, les carrés et les produits de ces quantités; ce qui réduira les équations du mouvement à la forme linéaire, et permettra d'en obtenir les intégrales sous forme finie. Nous ferons aussi les forces X, Y, Z, égales à zéro, afin que la densité du fluide, dans l'état d'équilibre, soit constante, comme nous le supposons.

Soit D cette densité; ρ étant celle qui a lieu dans l'état de mouvement, au bout du temps t et au point dont les coordonnées sont x, y, z, on aura

$$\rho = D\,(1 + s),$$

en désignant par s une fraction positive ou négative, qu'on suppose très petite. Soient aussi h et gmh la hauteur et la pression barométriques qui répondent à la densité D; g représentant la gravité et m la densité du mercure. Dans l'état de mouvement, la pression p, qui répond à la densité ρ, serait $gmh\,(1 + s)$, d'après la loi de Mariotte, si la température du fluide était invariable; mais, à raison de la condensation positive ou négative s, la température augmente ou diminue; et si le mouvement est assez rapide pour que le fluide n'ait pas le temps de revenir à sa température primitive, la pression variera dans un plus grand rapport que la densité. Nous supposerons donc qu'on ait, en général,

$$p = gmh\,(1 + s + \sigma);$$

σ désignant une quantité de même signe que s, et qui en est une certaine fonction. A cause de la petitesse de s, on peut supposer cette quantité σ proportionnelle à s, et faire

$$\sigma = \mathrm{C}s;$$

C étant un coefficient positif et indépendant de s.

Au moyen de ces valeurs, on aura

$$dp = gmh\,(1 + \mathrm{C})\,ds;$$

et il en résultera

$$\int \frac{dp}{\rho} = a \log (1 + s),$$

en supposant que l'intégrale s'évanouisse avec s, et faisant, pour abréger,

$$\frac{gmh\,(1 + \epsilon)}{D} = a^2 .$$

Si l'on néglige le carré de s et qu'on prenne cette intégrale pour la valeur de la quantité P comprise dans l'équation (b) du n° 654, on aura

$$P = a^2 s;$$

en négligeant aussi les carrés des vitesses $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, et supprimant le terme V qui provient des forces X, Y, Z, cette équation (b) deviendra

$$s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}; \qquad (1)$$

et en la joignant aux équations (a), savoir,

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}, \qquad (2)$$

ces quatre équations feront connaître la condensation, la grandeur et la direction de la vitesse du fluide, au bout du temps t et au point dont les coordonnées sont x, y, z, lorsque la fonction φ aura été déterminée en fonction des x, y, z, t.

Si les déplacemens des points du fluide sont aussi supposés très petits, c'est-à-dire, si les points du fluide ne font que de très petites oscillations, et n'ont pas un mouvement commun de translation ou de rotation, les variables x, y, z, différeront très peu des coordonnées initiales x', y', z', du point auquel elles répondent; on pourra les regarder comme égales à x', y', z', en intégrant les valeurs de udt, vdt, wdt, pour en déduire, à un instant quelconque, les déplacemens de ce point suivant les trois axes des coordonnées; et alors, on aura

$$x - x' = \int udt, \quad y - y' = \int vdt, \quad z - z' = \int wdt;$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent quand $t = 0$.

Quant à la quantité φ, pour obtenir l'équation dont elle dépend, je mets $D(1 + s)$ à la place de ρ dans l'équation (c) du numéro cité; et en négligeant les produits de s et de $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, il vient

$$\frac{ds}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

ou bien, en substituant pour s sa valeur précédente,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \qquad (3)$$

Ces équations (1), (2), (3), sont celles de la théorie du son dans un air dont la température et la densité sont constantes. Elles supposent que la formule $udx + vdy + wdz$ soit une différentielle exacte; ce qui a lieu, effectivement, dans les deux cas particuliers auxquels nous allons les appliquer.

659. Supposons, d'abord, que l'air soit contenu dans un tuyau cylindrique, et que ses points se meuvent parallèlement à l'axe, qui sera horizontal, afin que la pesanteur ne fasse pas varier la densité. En prenant l'axe des x dans cette direction, on aura $v = 0$ et $w = 0$; la quantité φ ne sera fonction que de x et t; et l'équation (3) se réduira à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

On en déduira les mêmes conséquences que de l'équation (1) du n° 495, relative aux vibrations longitudinales d'une verge élastique. Quand le tuyau se prolongera infiniment, a sera la vitesse de la propagation du son suivant sa longueur; quand il sera terminé, et d'une longueur l, le nombre des vibrations du fluide, dans l'unité de temps, correspondant au son le plus grave, sera en raison inverse de l; quand le ton s'élèvera, ce nombre croîtra dans le même rapport que celui des nœuds de vibrations; et en désignant par λ la distance comprise entre deux nœuds consécutifs, et par n le nombre correspondant des vibrations, on aura

$$n = \frac{a}{2\lambda}.$$

En ces points, la vitesse des molécules d'air est nulle, et la condensation s ne l'est pas; il y a, au contraire, d'autres points où cette condensation est zéro, et où le fluide est en mouvement. Les distances qui séparent ces autres points sont les mêmes que pour les premiers, comme on peut le voir par les formules du n° 496. Ils jouissent d'une propriété qui sert à les déterminer par l'expérience, et qui n'appartient qu'à eux. Si l'on fait une ouverture à la paroi du tuyau en l'un de ces points où la condensation est nulle, et qu'on établisse la communication avec l'air extérieur, le mouvement du fluide intérieur n'est aucunement changé, non plus que le ton qu'il fait entendre. En prenant pour λ la distance de deux de ces points consécutifs, et pour n le nombre correspondant au ton observé, l'équation précédente fera connaître la valeur de a, et par suite celle de la quantité ϵ contenue dans l'expression de cette vitesse. L'usage, pour cet objet, du ton élevé qui répond à une partie aliquote de l, est préférable à celui du ton

fondamental, qui peut être influencé par le mode d'insufflation du tuyau et par les circonstances relatives à l'embouchure. C'est de cette manière que M. Dulong a déterminé, pour l'air et différens gaz, les valeurs de la quantité γ du n° 638; laquelle quantité est égale à $1 + \epsilon$, comme on le verra tout à l'heure.

660. Pour second exemple, je supposerai que la masse d'air s'étende indéfiniment en tous sens, et qu'elle soit ébranlée semblablement, suivant toutes les directions, autour d'un point fixe que je prendrai pour origine des coordonnées. Si l'on appelle r, au bout du temps t, le rayon vecteur du point qui répond à x, y, z, et ζ sa vitesse, elle sera dirigée suivant ce rayon, et sa grandeur sera une fonction de r et t, ainsi que la condensation s; car il est évident que tout doit être symétrique autour de l'origine des coordonnées, pendant toute la durée du mouvement. On aura

$$u = \frac{\zeta x}{r}, \quad v = \frac{\zeta y}{r}, \quad w = \frac{\zeta z}{r};$$

et à cause de

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad xdx + ydy + zdz = rdr;$$

il en résultera

$$udx + vdy + wdz = \zeta dr;$$

en sorte que cette formule sera la différentielle exacte d'une fonction de r et t. Cette fonction étant la quantité φ, déterminée par l'équation (3), on aura

$$\zeta = \frac{d\varphi}{dr},$$

pour la résultante des vitesses u, v, w.

En la différentiant par rapport à x, y, z, on aura aussi

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{z}{r};$$

en différentiant une seconde fois, il vient

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{y^2+z^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{z^2+x^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{x^2+y^2}{r^3};$$

et, d'après ces valeurs, l'équation (3) devient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{d^2 . r\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2 . r\varphi}{dr^2}. \qquad (4)$$

Son intégrale complète est (n° 486)

$$r\varphi = f(r + at) + F(r - at);$$

f et F désignant les deux fonctions arbitraires. Si donc on fait

$$\frac{dfz}{dz} = f'z, \quad \frac{dFz}{dz} = F'z,$$

pour une variable quelconque z, on déduira de cette intégrale

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{r}\left[f'(r+at) + F'(r-at)\right] \\ &\quad - \frac{1}{r^2}\left[f(r+at) + F(r-at)\right], \\ s &= \frac{1}{ar}\left[F'(r-at) - f'(r+at)\right]; \end{aligned}\right\} (5)$$

et ces formules feront connaître la vitesse et la condensation en un point et à un instant quelconques, après qu'on aura déterminé les fonctions f et f' pour toutes les valeurs de $r + at$, qui est une variable positive, et les fonctions F et F' pour toutes les valeurs positives ou négatives de $r - at$.

661. Tout étant semblable, par hypothèse, autour de l'origine des coordonnées, il faut que le centre de l'ébranlement du fluide demeure immobile pendant toute la durée du mouvement; il est donc nécessaire que la première formule (5) s'évanouisse avec r; ce qui exige que, quand ce rayon est infiniment petit, on ait

$$f(r + at) + F(r - at) = Tr,$$
$$f'(r + at) + F'(r - at) = T;$$

T désignant une fonction inconnue de t. En faisant le rayon r tout-à-fait nul dans la première de ces équations et dans sa différentielle par rapport à at, savoir,

$$f'(r + at) - F'(r - at) = \frac{r}{a}\frac{dT}{dt},$$

et mettant z au lieu de at, on aura donc

$$fz + F(-z) = 0, \quad f'z - F'(-z) = 0, \quad (6)$$

mais seulement pour les valeurs positives de z. Ces équations feront connaître les valeurs de $F(-z)$ et $F'(-z)$, d'après celle de fz et $f'z$; en sorte qu'il ne restera plus qu'à déterminer les valeurs de fz, $f'z$, Fz, $F'z$, pour toutes les valeurs positives de z.

Pour cela, soient ψr et $\frac{1}{a}\Psi r$ les valeurs initiales de ζ et s, de sorte que ψr et Ψr désignent des fonctions données depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \infty$, dont la première devra être nulle pour $r = 0$, et qui sont toutes deux de certaines vitesses. En faisant $t = 0$,

dans les équations (5), nous aurons

$$\psi r = \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr} + \frac{d.\frac{1}{r}Fr}{dr},$$

$$r\Psi r = \frac{dFr}{dr} - \frac{dfr}{dr};$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}fr + \frac{1}{r}Fr &= \psi_1 r + b, \\ Fr - fr &= \Psi_1 r + c; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

en représentant par b et c deux constantes arbitraires, et faisant

$$\int \psi r dr = \psi_1 r, \quad \int r\Psi r dr = \Psi_1 r:$$

on pourra supposer que ces deux intégrales s'évanouissent pour telle valeur qu'on voudra de r; nous prendrons tout à l'heure $r = \infty$ pour cette valeur.

Si l'on a seulement égard aux constantes b et c, les équations précédentes donneront

$$fr = \tfrac{1}{2}br - \tfrac{1}{2}c, \quad f'r = \tfrac{1}{2}b,$$

$$Fr = \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}c, \quad F'r = \tfrac{1}{2}c;$$

on en conclut

$$f(r + at) = \tfrac{1}{2}b(r + at) - \tfrac{1}{2}c,$$

$$f'(r + at) = \tfrac{1}{2}b;$$

pour $r > at$, on aura aussi

$$F(r - at) = \tfrac{1}{2}b(r - at) + \tfrac{1}{2}c,$$

$$F'(r - at) = \tfrac{1}{2}b;$$

pour $r < at$, on aura

$$f(at - r) = \tfrac{1}{2}b(at - r) - \tfrac{1}{2}c,$$

$$f'(at - r) = \tfrac{1}{2}b;$$

et en vertu des équations (6) il en résultera

$$F(r - at) = \tfrac{1}{2}b(r - at) + \tfrac{1}{2}c,$$

$$F'(r - at) = \tfrac{1}{2}b,$$

comme dans le cas de $r > at$. Or, en substituant ces différentes valeurs dans les formules (5), on trouvera qu'elles se réduisent à zéro; de sorte que les deux constantes arbitraires b et c disparaissent des expressions de ζ et s.

En en faisant donc abstraction, et mettant z au lieu de r dans les équations (7) et dans leurs différentielles, il vient

$$\left.\begin{aligned} fz &= \tfrac{1}{2}z\psi_1 z - \tfrac{1}{2}\Psi_1 z, \\ f'z &= \tfrac{1}{2}\psi_1 z + \tfrac{1}{2}z(\psi z - \Psi z), \\ Fz &= \tfrac{1}{2}z\psi_1 z + \tfrac{1}{2}\Psi_1 z, \\ F'z &= \tfrac{1}{2}\psi_1 z + \tfrac{1}{2}z(\psi z + \Psi z), \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

pour les valeurs qui restaient à trouver.

Les formules (5) ne contiendront plus rien d'inconnu, et renfermeront, par conséquent, la solution complète du problème. On peut remarquer que rien, dans la question, ne pourrait servir à déterminer les valeurs de $f(-z)$, dont les formules (5) n'exigent pas la connaissance.

662. Voici maintenant les conséquences relatives à la théorie du son, qui se déduisent de ces formules.

Soit ϵ le rayon de l'ébranlement primitif, en sorte que ψr et Ψr aient des valeurs données arbitrairement depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \epsilon$, et soient zéro depuis $r = \epsilon$ jusqu'à $r = \infty$. Les intégrales $\psi_1 r$ et $\Psi_1 r$ seront des quantités constantes pour toutes les valeurs de z qui surpassent ϵ; et comme on les suppose nulles pour $r = \infty$, elles le seront aussi depuis $r = \epsilon$ jusqu'à $r = \infty$.

Cela posé, si l'on considère d'abord un point du fluide compris dans l'étendue de l'ébranlement primitif, on aura $r < \epsilon$. Tant que t sera moindre que $\frac{\epsilon - r}{a}$, les valeurs de $f(r + at)$ et $f'(r + at)$ ne seront pas nulles, et on les déduira des équations (8); il en sera de même à l'égard des valeurs de $F(r - at)$ et $F'(r - at)$, tant qu'on aura $t < \frac{r}{a}$; quand t surpassera $\frac{r}{a}$, celles-ci se déduiront de celles de $f(at - r)$ et $f'(at - r)$, au moyen des équations (6); enfin, quand le temps t sera devenu plus grand que $\frac{r + \epsilon}{a}$ tous les termes des formules (5) seront nuls, et tous les points contenus dans l'étendue de l'ébranlement primitif seront revenus à l'état de repos. Ainsi, pour tous les points compris dans la sphère dont le rayon est ϵ, la durée du mouvement décroîtra, du centre à la surface, entre les limites $\frac{\epsilon}{a}$ et $\frac{2\epsilon}{a}$.

En dehors de l'ébranlement primitif, on aura $r + at > \epsilon$; ce qui fera disparaître $f(r + at)$ et $f'(r + at)$ des formules (5), et les réduira à

$$\zeta = \frac{1}{r}F'(r - at) - \frac{1}{r^2}F(r - at),$$

$$s = \frac{1}{ar}F'(r - at),$$

quand on a $r > at$, ou bien, en vertu des équations (6), à

$$\xi = \frac{1}{r} f'(at - r) + \frac{1}{r^2} f(at - r),$$

$$s = \frac{1}{ar} f'(at - r),$$

lorsqu'on a $at > r$. Les valeurs des quantités comprises dans ces expressions de ξ et s seront données par les formules (8); elles seront nulles tant qu'on aura $r > at + \iota$, et le redeviendront dès qu'on aura $r < at - \iota$; d'où l'on conclut que le son se propagera à l'air libre avec la même vitesse a que dans l'intérieur d'un tuyau cylindrique; que le mouvement de chaque molécule d'air subsistera pendant un intervalle de temps égal à $\frac{2\iota}{a}$, et que la largeur de l'onde sonore sera égale au diamètre 2ι de l'ébranlement primitif.

A une grande distance du centre de cet ébranlement, on pourra négliger les seconds termes des valeurs de ξ, qui sont divisés par r^2, par rapport aux premiers qui ne le sont que par r; on aura alors, pendant toute la durée du mouvement,

$$s = \frac{\xi}{a},$$

comme dans le n° 498, où s représentait la dilatation au lieu de la condensation. La vitesse propre des molécules d'air décroîtra alors en raison inverse de r. On suppose l'intensité du son proportionnelle au carré de cette vitesse; en sorte qu'à une grande distance du lieu de l'ébranlement primitif, elle décroîtra en raison inverse du carré de cette distance; ce qui paraît conforme à l'expérience.

Ces résultats ont encore lieu, lorsque l'ébranlement n'est pas le même en tous sens. A une distance considérable par rapport à son diamètre, la vitesse du son est uniforme et égale à la constante a, les ondes ont une forme à peu près sphérique, et, suivant la direction de chaque rayon, l'intensité du son varie en raison inverse du carré de la distance, quelle que soit, d'ailleurs, sa variation en passant d'un rayon à un autre. Cette intensité décroît aussi avec la densité du milieu où le son est produit; en sorte que, par exemple, elle diminue à mesure qu'on approche du sommet d'une haute montagne. En considérant la propagation du son dans un air composé de couches de différentes densités, on trouve qu'à distance égale, son intensité ne dépend que de la densité au lieu de l'ébranlement primitif; d'où il résulte qu'une personne placée dans un ballon, doit entendre le bruit qu'on fait à la surface de la terre, comme si elle était à cette surface; tandis que le bruit qu'elle ferait serait entendu, à cette surface, comme si l'on était dans la couche atmosphérique où se trouve l'aérostat.

Si l'intensité du son dépend de la grandeur des vitesses des molécules d'air qui frappent l'organe de l'ouïe, si l'élévation du ton est réglée sur le nombre de ces coups dans un même temps, c'est-à-dire, sur la répétition plus ou moins fréquente des vibrations de l'air, on peut se demander ce qui fait la différence d'une syllabe à une autre, chantées avec une même force et sur un même ton. Selon Euler, cette différence doit être attribuée à la forme de la fonction qui exprime la loi des vitesses successives de l'air pendant chaque vibration; de manière que l'organe de la voix aurait la faculté de donner à cette fonction la forme convenable, et l'organe de l'ouïe, la faculté d'en apprécier les formes diverses.

663. Sans que la forme de l'équation (4) soit changée, on peut transporter l'origine des coordonnées en d'autres points du fluide. D'après cela, si l'on désigne par $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, $r_{\prime\prime\prime}$, etc., les rayons vecteurs d'un même point, comptés de ces diverses origines, et si l'on suppose successivement que φ soit fonction de t et de chacun de ces rayons, on satisfera à l'équation (4) au moyen de la valeur de φ du n° 660, et des valeurs qui s'en déduisent, en y mettant $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, $r_{\prime\prime\prime}$, etc., au lieu de r, et changeant à chaque fois les fonctions arbitraires. A cause de la forme linéaire de cette équation, on y satisfera donc aussi en prenant pour φ la somme de toutes ces valeurs particulières, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\frac{1}{r}[f(r + at) + F(r - at)]\\ &+ \frac{1}{r_{\prime}}[f_{\prime}(r_{\prime} + at) + F_{\prime}(r_{\prime} - at)]\\ &+ \frac{1}{r_{\prime\prime}}[f_{\prime\prime}(r_{\prime\prime} + at) + F_{\prime\prime}(r_{\prime\prime} - at)]\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Or, on conclura de cette formule, que si l'air est ébranlé simultanément autour de chacune des origines de r, $r_{\prime}$, $r_{\prime\prime}$, etc., la condensation $\frac{d\varphi}{dt}$ en un point et à un instant quelconques, qui sera toujours donnée par l'équation (1), aura pour valeur la somme des condensations qui auraient lieu en vertu de tous ces ébranlemens isolés. De plus, en vertu des équations (2), les composantes de la vitesse au bout du temps t, et en un point M, dont x, y, z, sont les coordonnées par rapport à l'origine de r, auront pour expressions

$$u = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{d\varphi}{dr_{\prime}}\frac{dr_{\prime}}{dx} + \frac{d\varphi}{dr_{\prime\prime}}\frac{dr_{\prime\prime}}{dx} + \text{etc.},$$

$$v = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{d\varphi}{dr_{\prime}}\frac{dr_{\prime}}{dy} + \frac{d\varphi}{dr_{\prime\prime}}\frac{dr_{\prime\prime}}{dy} + \text{etc.},$$

$$w = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dz} + \frac{d\varphi}{dr_{\prime}}\frac{dr_{\prime}}{dz} + \frac{d\varphi}{dr_{\prime\prime}}\frac{dr_{\prime\prime}}{dz} + \text{etc.};$$

les différences partielles $\frac{d\phi}{dr}, \frac{d\phi}{dr_{,}}, \frac{d\phi}{dr_{,,}}$, etc., étant prises en regardant $r, r_{,}, r_{,,}$, etc., comme des variables indépendantes. Mais si l'on appelle $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, les coordonnées de M rapportées à l'origine de $r_{,}$ et à des axes parallèles à ceux des x, y, z, ces coordonnées $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, ne différeront de x, y, z, que d'une quantité constante; de sorte que l'on aura

$$\frac{dr_{,}}{dx} = \frac{dr_{,}}{dx_{,}} = \frac{x_{,}}{r_{,}}, \quad \frac{dr_{,}}{dy} = \frac{dr_{,}}{dy_{,}} = \frac{y_{,}}{r_{,}}, \quad \frac{dr_{,}}{dz} = \frac{dr_{,}}{dz_{,}} = \frac{z_{,}}{r_{,}};$$

on aura de même

$$\frac{dr_{,,}}{dx} = \frac{x_{,,}}{r_{,,}}, \quad \frac{dr_{,,}}{dy} = \frac{y_{,,}}{r_{,,}}, \quad \frac{dr_{,,}}{dz} = \frac{z_{,,}}{r_{,,}},$$

en désignant par $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$, les coordonnées du même point, dont l'origine est celle de $r_{,,}$; et ainsi de suite. Les formules précédentes deviendront donc

$$u = \frac{d\phi}{dr}\frac{x}{r} + \frac{d\phi}{dr_{,}}\frac{x_{,}}{r_{,}} + \frac{d\phi}{dr_{,,}}\frac{x_{,,}}{r_{,,}} + \text{etc.}$$

$$v = \frac{d\phi}{dr}\frac{y}{r} + \frac{d\phi}{dr_{,}}\frac{y_{,}}{r_{,}} + \frac{d\phi}{dr_{,,}}\frac{y_{,,}}{r_{,,}} + \text{etc.},$$

$$w = \frac{d\phi}{dr}\frac{z}{r} + \frac{d\phi}{dr_{,}}\frac{z_{,}}{r_{,}} + \frac{d\phi}{dr_{,,}}\frac{z_{,,}}{r_{,,}} + \text{etc.};$$

d'où l'on conclut que la résultante de u, v, w, sera la même que celle des vitesses $\frac{d\phi}{dr}, \frac{d\phi}{dr_{,}}, \frac{d\phi}{dr_{,,}}$, etc., dirigées suivant les rayons vecteurs $r, r_{,}, r_{,,}$, etc., et, par conséquent, en vertu de la formule (9), la même, en grandeur et en direction, que si tous les ébranlemens autour des centres de ces rayons avaient lieu isolément; ce qui s'accorde avec le principe de la superposition des petits mouvemens.

664. Cette formule (9) servira aussi à déterminer la réflexion du son sur un plan fixe.

Pour cela, supposons que la masse d'air soit terminée par un plan fixe AB (fig. 140), et que l'ébranlement primitif ait lieu autour du point C, origine du rayon vecteur r, et ne se soit pas étendu jusqu'au plan AB. De ce point, abaissons la perpendiculaire CD sur ce plan; prolongeons-la d'une quantité $DC_{,}$, égale à CD; supposons que $C_{,}$ soit l'origine de $r_{,}$; et prenons la droite $CDC_{,}$ pour axe des x et $x_{,}$. En appelant h la longueur de CD, on aura $x = h$ et $x_{,} = -h$, pour tous les points du plan AB; pour ces valeurs de x et $x_{,}$, il faudra donc que la vitesse u, perpendiculaire à ce plan, soit constamment nulle (n° 653). Or, on satisfera à cette condition et à l'état initial du fluide, en prenant pour ϕ la formule (9) réduite à ses deux premiers termes, savoir :

$$\phi = \frac{1}{r}\left[f(r + at) + F(r - at)\right] + \frac{1}{r_{,}}\left[f_{,}(r_{,} + at) + F_{,}(r_{,} - at)\right],$$

et déterminant convenablement les fonctions arbitraires $f, F, f_{,}, F_{,}$.

En effet, on déterminera les deux premières, comme précédemment, d'après l'état initial du fluide autour du point C; les points qui répondent à $r_{,} < h$, n'appartenant pas au fluide, on pourra donner telle valeur qu'on voudra à chacune des fonctions $f_{,}r_{,}$ et $F_{,}r_{,}$ sans altérer cet état initial; on pourra donc prendre pour les fonctions indiquées par $f_{,}$, et $F_{,}$ les mêmes fonctions qu'on aura trouvées pour celles dont les indices sont f et F; la formule précédente deviendra alors

$$\left.\begin{aligned}\phi = &\frac{1}{r}\left[f(r + at) + F(r - at)\right] \\ &+ \frac{1}{r_{,}}\left[f(r_{,} + at) + F(r_{,} - at)\right],\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

et ne renfermera plus rien d'inconnu. De plus, pour tous les points du plan AB, on a $r_{,} = r$; on aura donc $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dr_{,}}$; et comme on a aussi pour ces mêmes points $x = h$ et $x_{,} = -h$, il en résultera $u = 0$; en sorte que la formule (10) représentera l'état initial du fluide, et remplira la condition relative aux points adjacens au plan AB; ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Soit M le point du fluide dont les rayons vecteurs CM et $C_{,}M$ sont r et $r_{,}$; en vertu des deux parties de la formule (10), ce point sera d'abord ébranlé au bout d'un temps égal à $\frac{r - s}{a}$, et ensuite au bout d'un temps égal à $\frac{r_{,} - s}{a}$, en désignant toujours par s le rayon de l'ébranlement primitif. Le premier mouvement produira le son direct, et le second le son réfléchi. Celui-ci sera le même que si le plan AB n'existait pas, et qu'un second ébranlement identique avec celui qui a lieu autour du point C, ait eu lieu simultanément autour du point $C_{,}$. Il se propagera avec la même vitesse a que le son direct, et aura l'intensité correspondante à la distance $C_{,}M$, ou à la ligne brisée CEM, en supposant que E soit le point où le rayon $C_{,}M$ coupe le plan AB. Enfin EF étant la normale à ce plan, les deux parties CE et ME du rayon sonore qui se réfléchit au point E, feront l'angle d'incidence CEF égal à l'angle de réflexion MEF. Ainsi, il résulte de la formule (10)

que les lois de la réflexion du son sur un plan fixe sont exactement les mêmes que celles de la lumière.

665. Comparons maintenant la vitesse a, donnée par la théorie, à celle qui a été déterminée par l'expérience; et pour cela, voyons d'abord ce que signifie la quantité $\mathcal{C}$ contenue dans son expression.

D'après les valeurs de ρ, p, σ, du n° 658, on a

$$p = \frac{gmh\rho\,(1 + s + \mathcal{C}s)}{D\,(1 + s)},$$

ou plus simplement

$$p = \frac{gmh}{D}\,\rho\,(1 + \mathcal{C}s), \qquad (a)$$

en négligeant le carré de s. Supposons que u soit l'augmentation de température qui répond à cette condensation s; de sorte que la température, qui était θ dans l'état d'équilibre, devienne $\theta + u$ au bout du temps t, dans l'état de mouvement. A cet instant, la pression p, la densité ρ et la température $\theta + u$, auront lieu simultanément; d'après l'équation (1) du n° 625, on aura donc

$$p = k\rho\,[1 + \alpha\,(\theta + u)],$$

en désignant par k un coefficient indépendant de la densité et de la température, et par α le coefficient 0,00375 de la dilatation des gaz. Dans l'état d'équilibre, on a

$$p = gmh, \quad \rho = D, \quad u = 0;$$

appliquée à cet état, l'équation précédente sera donc

$$gmh = kD\,(1 + \alpha\theta);$$

par conséquent, on aura, dans l'état de mouvement,

$$p = \frac{gmh}{D}\,\rho\left(1 + \frac{\alpha u}{1 + \alpha\theta}\right);$$

et, en comparant cette valeur de p à la formule (a), il en résultera

$$\mathcal{C} = \frac{\alpha u}{(1 + \alpha\theta)s}.$$

Or, si l'on suppose les vibrations de l'air assez rapides pour que la condensation s ait lieu sans aucune perte de chaleur, on pourra mettre s et u à la place de δ et ω dans l'équation (5) du n° 637; ce qui donne

$$1 + \mathcal{C} = \gamma;$$

γ étant le rapport de la chaleur spécifique de l'air sous une pression constante, à sa chaleur spécifique sous un volume constant.

La valeur de a^2 du n° 658 deviendra, de cette manière,

$$a^2 = \frac{gmh\gamma}{D}.$$

Si l'on appelle Δ la densité de l'air sous la pression gmh et à la température zéro, on aura (n° 625)

$$D = \frac{\Delta}{1 + \alpha\theta},$$

et par conséquent,

$$a = \sqrt{\frac{gmh\gamma}{\Delta}\,(1 + \alpha\theta)}. \qquad (b)$$

Puisque la quantité γ est regardée comme indépendante de la température et de la pression (n° 638), on voit, 1° que la vitesse a croîtra avec la température θ dans le rapport de $\sqrt{1 + \alpha\theta}$ à l'unité; 2° qu'elle ne variera pas avec les hauteurs barométriques, puisque h et Δ croissent en même temps et dans le même rapport. Les académiciens français envoyés au Pérou, pour la mesure d'un arc du méridien, ont, en effet, trouvé à peu près la même vitesse du son à Quito, où la pression barométrique n'était pas tout-à-fait de $0^m,55$, qu'à Paris, où elle s'élève à $0^m,76$. L'état hygrométrique de l'air doit influer un peu sur la valeur de a : la densité diminuant, toutes choses d'ailleurs égales, à mesure que l'air contient une plus grande quantité de vapeur, la vitesse a augmentera avec le degré d'humidité; mais d'après les données du n° 632, à la température de $18^\circ,75$, par exemple, la densité de l'air sec excède à peine de $\frac{1}{125}$, celle de l'air chargé du *maximum* de vapeur; ce qui ne fait qu'une variation de $\frac{1}{250}$ pour la vitesse du son dans ces deux états extrêmes de l'hygromètre.

Dans l'expérience la plus récente que l'on a faite sur la vitesse du son, les commissaires du Bureau des Longitudes ont trouvé

$$a = 340^m,89,$$

en prenant la seconde pour unité, et la température de l'air étant $15^\circ,9$ du thermomètre centigrade. Or, si l'on fait dans la formule (b)

$$g = 9^m,80896, \quad h = 0^m,76, \quad \frac{m}{\Delta} = 10,482,$$

$$\alpha = 0,00375, \quad \theta = 15^\circ,9, \quad \gamma = 1,3748,$$

on en déduit

$$a = 337^m,07;$$

ce qui diffère peu du résultat de l'observation. En prenant (n° 638),

$$\gamma = 1,421,$$

et conservant toutes les autres données, on trouve

$$a = 342^m,69,$$

dont la différence avec l'observation est en sens contraire de la précédente, et toujours très petite.

Si l'on se sert de la vitesse observée, pour déterminer la valeur de γ au moyen de la formule

$$\gamma = \frac{a^2 \Delta}{gmh\,(1 + \alpha\theta)},$$

on obtient, d'après les données précédentes,

$$\gamma = 1{,}4061.$$

666. Il ne faut pas perdre de vue, en comparant cette dernière valeur de γ à celle qui la précède, qu'elles supposent l'une et l'autre la dilatation ou la condensation de l'air assez rapide pour que la quantité de chaleur du fluide n'ait pas le temps de varier sensiblement. Or, dans la propagation du son à l'air libre, d'où l'on a déduit la valeur $\gamma = 1{,}4061$, il est possible que la chaleur s'échappe ou revienne plus facilement sous forme rayonnante, que dans le son produit par l'air renfermé dans un tube, dont la considération a donné l'autre valeur $\gamma = 1{,}421$, et où la quantité de chaleur de chaque couche d'air ne peut guère varier que par le contact avec les parois du tube. Cette remarque pourrait expliquer la différence des deux résultats, et porterait à penser que la plus grande valeur de γ est la plus exacte.

En n'ayant point égard à cette quantité, la vitesse du son, réduite à $\sqrt{\frac{gmh}{D}}$, est celle que Newton a donnée. Elle est trop petite de plus d'un sixième. Pour qu'elle s'accordât avec l'expérience, Lagrange avait remarqué qu'il faudrait supposer que la pression variât dans un plus grand rapport que la densité, et fût proportionnelle à peu près à la puissance $\frac{4}{3}$; et, en effet, en négligeant le carré de s, la valeur de p, dont nous avons fait usage, est

$$p = gmh\,(1 + s)^{1 + \epsilon},$$

pour la densité $D(1 + s)$. Mais il n'a assigné aucune cause de cette variation plus rapide de la force élastique de l'air; et c'est Laplace qui l'a attribuée, le premier, à la variation de température dont les condensations et les dilatations alternatives de l'air sont accompagnées dans le phénomène du son.

C'est à cette même cause qu'est due la propagation du son dans la vapeur d'eau au *maximum* de densité. Si l'on fait vibrer un corps sonore dans un vaisseau fermé, qui contienne cette vapeur non mélangée d'air, l'expérience prouve que le son se produit dans cette vapeur et s'entend au dehors. Or, si la température de la couche de vapeur adjacente à ce corps sonore n'était pas augmentée, quand elle est condensée par les vibrations de ce corps, elle se réduirait en eau et se précipiterait sur ce corps, puisqu'on la suppose au *maximum* de densité relatif à la température de l'espace où elle se trouve; mais sa température augmentant par la compression, la couche adjacente au corps sonore peut se maintenir à l'état de vapeur : elle condense ensuite la couche suivante, celle-ci, la couche qui vient après, et ainsi de suite; de sorte que le son se propage, comme dans un gaz permanent, jusqu'à la paroi intérieure du vase. Les dilatations des couches de vapeur, qui suivent leurs condensations, sont accompagnées d'une diminution de température, qui ne les réduit pas non plus en eau, puisque leur densité diminue en même temps, et descend au-dessous du *maximum* relatif à la température de l'espace où se passe le phénomène.

667. En considérant l'eau comme un fluide un peu compressible et parfaitement élastique, le son s'y propagera suivant les mêmes lois que dans une masse d'air. Parvenu à la surface de l'eau, le son sera en partie transmis dans l'air extérieur, et en partie réfléchi dans l'eau; dans ce partage, la direction des ondes sonores, transmise et réfléchie, se déterminera suivant les lois de la réfraction et de la réflexion de la lumière. La vitesse du son réfléchi sera la même que celle du son direct, et les rapports des intensités du son transmis et du son réfléchi entre elles et avec l'intensité du son direct, dépendront du rapport des vitesses de la propagation du son dans les deux milieux superposés, c'est-à-dire, dans l'air et dans l'eau. C'est ce qu'on peut voir dans les mémoires cités au commencement de ce chapitre; ici, nous nous bornerons à calculer la valeur numérique de la vitesse du son dans une masse d'eau.

D'après ce qu'on a vu, dans le cas d'un fluide élastique, cette vitesse sera la même que si l'eau était contenue dans un tube très étroit et d'une largeur constante; et, dans ce cas, cette vitesse est aussi la même que celle de la propagation du mouvement, suivant la longueur d'une verge élastique de la même matière que l'eau. Or, supposons qu'une colonne d'eau contenue dans un cylindre vertical, soit chargée d'un poids Δ à sa partie supérieure; soient l sa longueur naturelle, et $l - \delta$, ce qu'elle devient par l'effet de cette pression; de sorte que δ soit une fraction très petite, qui exprime la condensation du liquide; soient aussi p son poids, et g la gravité; si l'on fait, comme dans le n° 495,

$$\frac{\Delta}{\delta} = q, \quad \frac{glq}{p} = a^2,$$

a sera la vitesse demandée, ainsi qu'on l'a vu dans le n° 498.

Appelons b la section horizontale de la colonne d'eau; supposons que la charge Δ soit égale au poids d'une colonne de mercure qui aurait b pour base, et dont la hauteur serait représentée par h; désignons aussi par m la densité du mercure, et par ρ celle de l'eau; nous aurons

$$\Delta = gmhb, \quad p = g\rho lb;$$

et il en résultera

$$a^2 = \frac{gmh}{\rho\delta},$$

en sorte qu'il suffira pour calculer la valeur de a, de connaître la fraction δ relative à une hauteur donnée h.

A la température de 10 degrés centigrades, le physicien anglais Canton a trouvé

$$\delta = 0{,}000046,$$

sous une charge équivalente à la pression ordinaire de l'atmosphère. Ce résultat a été confirmé, comme on l'a dit précédemment (n° 576), par les expériences récentes qu'on a faites sous des pressions plus considérables, et qui ont donné une condensation proportionnelle à la pression et égale à la valeur précédente de δ, pour chaque pression atmosphérique. De plus, ces expériences, quelque grande qu'ait été la pression, n'ont indiqué aucune augmentation sensible de température ; en sorte qu'il n'y a pas lieu de croire que la propagation du son dans l'eau, soit accompagnée, comme dans l'air, d'une variation de température qui puisse influer sur sa vitesse. Cela étant, si l'on substitue cette valeur de δ dans la formule précédente, et qu'on y fasse

$$g = 9^m{,}80896, \quad h = 0^m{,}76, \quad \frac{m}{f} = 13{,}5975,$$

on en déduit :

$$a = 1484^m;$$

de manière que la vitesse du son dans l'eau surpasse le quadruple de sa vitesse dans l'air.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT DES FLUIDES, DANS UNE HYPOTHÈSE PARTICULIÈRE.

668. La supposition que nous admettons dans ce chapitre est connue sous la dénomination d'*hypothèse du parallélisme des tranches*. Elle consiste à supposer que quand un fluide pesant, de l'eau, par exemple, s'écoule dans un vase, et sort par un orifice horizontal pratiqué au fond du vase, les tranches horizontales et infiniment minces se remplacent successivement, en demeurant parallèles à elles-mêmes. Cela revient à négliger les différences des vitesses verticales des points qui appartiennent à une même tranche horizontale, et à regarder chaque tranche comme composée des mêmes points du fluide pendant toute la durée du mouvement. On néglige aussi les vitesses horizontales, qu'on suppose très petites par rapport aux vitesses verticales, et qui influent peu sur la vitesse verticale commune à tous les points d'une même tranche. Ces suppositions sont d'autant plus conformes à l'observation, que les dimensions horizontales du vase varient moins, et que leurs différences, d'une tranche à une autre, sont plus petites, eu égard à la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice. Quand ces conditions sont remplies, on observe, en effet, que des parcelles d'une poussière légère, jetées dans le liquide et entraînées par son mouvement, se meuvent, à peu près verticalement, avec une vitesse à peu près égale pour toutes les parcelles qui se trouvent dans une même tranche horizontale. Elles conservent ces directions tant qu'elles ne sont pas très rapprochées de l'orifice ; quand elles en sont à de petites distances, et que l'étendue de l'orifice diffère notablement de celle des sections inférieures du vase, elles prennent des directions obliques, qui montrent qu'alors le parallélisme des tranches cesse d'être admissible ; car il y a lieu de croire que ces légères particules s'attachent au liquide, et prennent exactement le mouvement des points auxquels elles répondent.

Dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, telle que nous l'expliquons, on aura donc seulement deux inconnues à déterminer, en fonctions de deux variables, savoir : la vitesse d'une tranche quelconque et la pression qu'elle éprouve, en fonctions de la distance à un plan horizontal et du temps. La question sera ainsi réduite à sa plus grande simplicité, et susceptible, comme on va le voir, d'une solution complète, dans le cas d'un fluide homogène et incompressible.

669. Soient ABCD (fig. 141) le vase, AB l'orifice horizontal, EF le niveau du liquide, Oz un axe

vertical, sur lequel on compte les distances des tranches horizontales à un point fixe O, ou au plan horizontal mené par ce point. Soit aussi MNM'N' une tranche quelconque, comprise entre deux sections horizontales MN et M'N' du vase, dont la distance au point O est x au bout du temps t quelconque, et dont l'épaisseur est dx. Appelons v sa vitesse au même instant, et p la pression rapportée à l'unité de surface, qui a lieu sur la base supérieure MN, et est transmise, par le fluide, sur la base inférieure M'N' et sur les parois MM' et NN' du vase. Désignons par y l'aire de la section MN du vase, qui sera donnée, dans chaque exemple, en fonction de x. Enfin, soient g la gravité et ρ la densité constante du fluide; la question consistera, comme on vient de le dire, à déterminer les valeurs de v et p en fonctions de t et x.

La masse de la tranche que nous considérons sera le produit $\rho y dx$ de la densité ρ et de son volume $y dx$. Si elle était libre, sa vitesse augmenterait de $g dt$ pendant l'instant dt; elle augmente réellement de dv; la vitesse perdue est donc $g dt - dv$; et l'on a

$$\left(g - \frac{dv}{dt}\right) \rho y dx,$$

pour la force perdue, c'est-à-dire, pour la partie du poids $g\rho y dx$ détruite par la pression des autres tranches. D'après le principe de D'Alembert, il y aura donc équilibre dans le fluide, si l'on suppose toutes ses tranches sollicitées par de semblables forces; dans cet état, la pression py qui a lieu sur la base supérieure MN de la tranche $\rho y dx$, se transmettra, en raison des surfaces (n° 578), sur la base inférieure M'N', et deviendra, conséquemment, py', en désignant par y' l'aire de M'N'; par conséquent si l'on ajoute à cette pression transmise, la force motrice précédente, on aura la pression totale exercée sur M'N'; en en représentant par p' cette pression, rapportée à l'unité de surface, il en résultera

$$p'y' = py' + \left(g - \frac{dv}{dt}\right) \rho y dx.$$

Or, les quantités p' et y' sont ce que deviennent p et y, quand on y met $x + dx$ au lieu de x; en négligeant les infiniment petits du second ordre, on aura donc

$$p' = p + \frac{dp}{dx} dx, \quad y' = y + \frac{dy}{dx} dx,$$

et, conséquemment,

$$(p' - p)\, y' = \frac{dp}{dx} y dx;$$

ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci :

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(g - \frac{dv}{dt}\right), \qquad (1)$$

que l'on obtient aussi en mettant $g - \frac{dv}{dt}$ à la place de X dans la troisième équation d'équilibre du n° 583.

670. La seconde équation nécessaire pour déterminer les deux inconnues p et v, sera fournie par la considération de l'incompressibilité du fluide. Il en résulte que le volume du fluide qui passe, pendant l'instant dt, par chaque section horizontale du vase, doit être le même pour toutes les sections; par conséquent, les vitesses du fluide qui répondent, en même temps, à deux sections différentes du vase, doivent être réciproquement proportionnelles aux aires de ces sections. Si donc on appelle u, au bout du temps t, la vitesse qui a lieu à l'orifice horizontal AB; que l'on représente par a l'aire de cet orifice, et que l'on compare cette vitesse à celle qui répond à la section quelconque MN, on aura

$$v : u :: a : y;$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{au}{y}. \qquad (2)$$

Dans cette valeur de v, u est une fonction de t, et y une fonction de x; on peut donc en prendre la différentielle par rapport à l'une ou à l'autre de ces deux variables : la différentielle relative à x exprimerait la différence entre les vitesses de deux tranches consécutives, qui ont lieu au même instant; en différentiant par rapport à t, on aurait la différence entre les vitesses de deux tranches du fluide, qui répondent successivement à la même section du vase; mais pour avoir la différence entre les vitesses successives d'une même tranche, qui se déplace pendant l'instant dt, il faut différentier à la fois la valeur de v par rapport aux deux variables t et x, en considérant la seconde comme une fonction de la première; ce qui donne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a}{y}\frac{du}{dt} - \frac{au}{y^2}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

On a d'ailleurs $\frac{dx}{dt} = v$; et en ayant égard à l'équation (2), il en résulte

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a}{y}\frac{du}{dt} - \frac{a^2 u^2}{y^3}\frac{dy}{dx}.$$

C'est cette valeur de $\frac{dv}{dt}$ qu'il faut employer dans l'équation (1), qui devient, en conséquence,

$$\frac{dp}{dx} = g\rho - \frac{a\rho}{y}\frac{du}{dt} + \frac{a^2 u^2}{y^3}\frac{dy}{dx}.$$

Je multiplie ses deux membres par dx; j'intègre ensuite par rapport à x; et en observant qu'alors les quantités u et $\frac{du}{dt}$ doivent être regardées comme des constantes, il vient

$$p = \varepsilon + g\rho x - \alpha\rho \frac{du}{dt}\int\frac{dx}{y} - \frac{\alpha^2 \rho u^2}{2y^2};$$

ε étant la constante arbitraire qui peut être une fonction de t. Pour la déterminer, je représente par ϖ la pression atmosphérique, et je suppose que ce soit celle qui a lieu à la surface supérieure EF du liquide. Avant que le mouvement commence, cette surface est horizontale; et comme on admet que chaque tranche horizontale se compose constamment des mêmes points du fluide, il s'ensuit que la surface EF demeurera horizontale pendant toute la durée du mouvement. Au bout du temps t, je désigne par θ la distance de EF au point O, et par ω l'aire de cette section variable du vase, de sorte que ω soit la même fonction de θ que y est de x; on aura à la fois

$$p = \varpi, \quad x = \theta, \quad y = \omega;$$

et si l'on suppose que l'intégrale $\int\frac{dx}{y}$ commence à $x = \theta$, l'équation précédente donnera

$$\varepsilon = \varpi + \frac{\alpha^2 \rho u^2}{2\omega^2} - g\rho\theta;$$

au moyen de quoi, cette équation deviendra

$$p = \varpi + g\rho(x - \theta) - \alpha\rho\frac{du}{dt}\int\frac{dx}{y} - \frac{\rho u^2}{2}\left(\frac{\alpha^2}{y^2} - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right). \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3) feront connaître immédiatement les valeurs des deux inconnues v et p, lorsqu'on aura déterminé la valeur de u.

671. Pour cela, j'observe que la pression qui a lieu à l'orifice AB sera donnée : si le liquide s'écoule dans l'air libre, elle sera la pression atmosphérique, comme à son niveau EF; s'il s'écoule dans le vide, elle sera zéro; pour plus de généralité, je supposerai que l'écoulement a lieu dans un air dont la force élastique est égale à la pression ϖ, diminuée de la pression $g\rho c$ correspondante à une hauteur donnée c du liquide; en sorte qu'en appelant l la distance de l'orifice AB au point O, on aura constamment

$$p = \varpi - g\rho c,$$

pour $x = l$. J'appelle aussi h la hauteur du niveau EF du liquide au-dessus de cet orifice, ou la différence $l - \theta$, et je représente par $\frac{1}{\lambda}$ la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx}{y}$, étendue au volume entier du liquide; de manière que λ soit une ligne, dont la longueur sera une fonction de h, dépendante de la figure du vase, et donnée dans chaque exemple. A l'orifice, on aura donc, en même temps, la valeur précédente de p, et

$$y = \alpha, \quad x = l = \theta + h, \quad \int_\theta^{\theta+h}\frac{dx}{y} = \frac{1}{\lambda};$$

par conséquent, l'équation (3), appliquée à cette section du vase, deviendra

$$g(h + c) - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\zeta^2 u^2 = 0, \qquad (4)$$

en faisant, pour abréger,

$$1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2} = \zeta^2.$$

On peut remarquer que cette quantité numérique ζ^2 sera toujours une quantité positive et moindre que l'unité; car, pour qu'elle devînt négative, il faudrait que l'aire de la plus petite section du vase surpassât celle de l'orifice, et le liquide se détacherait du vase à l'endroit de cette section *minima*, qui deviendrait le véritable orifice par lequel l'écoulement aurait lieu.

Lorsque le niveau du liquide sera entretenu à une hauteur constante au-dessus de l'orifice, les trois quantités h, θ, λ, seront des constantes données, et l'équation (4) suffira pour déterminer la valeur de u en fonction de t. Quand le niveau EF s'abaissera pendant l'écoulement du liquide, h sera une variable qu'il faudra aussi déterminer en fonction de t. Or, à ce niveau, on a $y = \omega$ et $v = \frac{d\theta}{dt}$; et à cause que la somme $\theta + h$ est une constante l, on a aussi $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{dh}{dt}$; en vertu de l'équation (2) on aura donc

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\alpha u}{\omega} = 0; \qquad (5)$$

et les valeurs de u et h dépendront des deux équations différentielles (4) et (5), qui sont du premier ordre. On déterminera les deux constantes arbitraires que leurs intégrales contiendront, au moyen de la hauteur initiale du liquide, et en observant qu'on a $u = 0$, à l'origine du mouvement.

Soit que le niveau s'abaisse ou qu'il ne varie pas, si l'on appelle q le volume du liquide sorti du vase

au bout du temps t, sa différentielle sera égale au volume $\omega u dt$ de la tranche qui traverse l'orifice AB pendant l'instant dt; on aura donc

$$dq = \omega u dt, \quad q = \omega \int u dt;$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $t = 0$.

Nous allons appliquer successivement ces différentes formules aux deux cas du niveau constant et du niveau variable.

672. Dans le premier cas, l'équation (4) donne

$$\lambda dt = \frac{2a du}{2g(h+c) - C^2 u^2};$$

d'où l'on tire, en mettant h au lieu de $h+c$, et intégrant

$$\lambda t = \frac{a}{C\sqrt{2gh}} \log \frac{\sqrt{2gh} + Cu}{\sqrt{2gh} - Cu}:$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, parce qu'on doit avoir $u = 0$, quand $t = 0$. On pourra, sans changer cette formule, regarder, à volonté, C et $\sqrt{2gh}$, comme des quantités positives ou négatives; nous les supposons positives. L'on aura réciproquement,

$$\sqrt{2gh} - Cu = (\sqrt{2gh} + Cu)\, e^{-\frac{C\lambda t\sqrt{2gh}}{a}} \qquad (6)$$

en désignant, comme à l'ordinaire, par e la base des logarithmes népériens. A mesure que t augmentera, le second membre de cette équation diminuera; au bout d'un certain temps, il sera sensiblement nul, et à partir de cette époque, la vitesse u aura une valeur à peu près constante, savoir :

$$u = \frac{1}{C}\sqrt{2gh}.$$

En chaque point du vase, la pression p et la vitesse v varieront avec la vitesse u, et deviendront sensiblement constantes en même temps que u. Si l'on fait $\frac{du}{dt} = 0$, dans la formule (3), et qu'on y mette pour u sa valeur précédente, on aura

$$p = \varpi + g\rho(z - \theta) + \frac{g\rho h}{C^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{y^2}\right),$$

pour la valeur finale de p, relative au point quelconque M.

Dans l'état d'équilibre, la pression en ce point serait $\varpi + g\rho(z - \theta)$; elle est donc augmentée ou diminuée par le mouvement du liquide, selon que le dernier terme de cette formule est positif ou négatif, c'est-à-dire, selon que la section horizontale MN ou y, est plus grande ou plus petite que la section EF ou ω.

L'équation (6) donne

$$u = \frac{\sqrt{2gh}}{C}\left(\frac{e^{\frac{C\lambda t\sqrt{2gh}}{2a}} - e^{-\frac{C\lambda t\sqrt{2gh}}{2a}}}{e^{\frac{C\lambda t\sqrt{2gh}}{2a}} + e^{-\frac{C\lambda t\sqrt{2gh}}{2a}}}\right);$$

à cause de $q = \omega \int u dt$, et de $q = 0$ quand $t = 0$, on aura donc

$$q = \frac{2a^2}{C^2\lambda} \log \frac{1}{2}\left(e^{\frac{C\lambda t\sqrt{2gh}}{2a}} + e^{-\frac{C\lambda t\sqrt{2gh}}{2a}}\right);$$

pour le volume de liquide sorti du vase pendant le temps t. Au bout d'un certain temps, on pourra négliger la seconde exponentielle, par rapport à la première, et l'on aura simplement

$$q = \frac{ta\sqrt{2gh}}{C} - \frac{2a^2}{C^2\lambda}\log 2.$$

Le premier terme est le volume correspondant à la vitesse constante $\frac{1}{C}\sqrt{2gh}$ de l'écoulement; le volume total est plus petit, parce qu'au commencement la valeur variable de u est moindre que cette vitesse finale.

673. Dans le cas du niveau variable, je considère u comme une fonction de h, et j'élimine dt entre les équations (4) et (5); ce qui donne

$$gh + \frac{a^2 u du}{\lambda \omega dh} - \frac{1}{2} C^2 u^2 = 0,$$

en comprenant toujours la constante c dans h. J'appelle z la hauteur due à la vitesse u, de sorte qu'on ait

$$u^2 = 2gz. \quad u du = g dz.$$

L'équation précédente se change en une équation linéaire, savoir :

$$\frac{dz}{dh} - \frac{C^2\lambda\omega}{a^2} z + \frac{\lambda\omega h}{a^2} = 0, \qquad (7)$$

dont l'intégrale s'obtiendra, comme on sait, sous forme finie.

Connaissant z et u en fonctions de h, l'équation (5) donnera t en fonction de h, par une intégration immédiate; en sorte que l'on connaîtra le temps écoulé, quand le niveau du liquide sera à une hauteur h au-dessus de l'orifice, et, réciproquement, la hauteur h du niveau EF au bout d'un temps quelconque t. On aura le temps entier de l'écoulement de tout le liquide, en intégrant la valeur de dt depuis la valeur initiale de h jusqu'à $h = 0$. Quant au volume q du fluide écoulé, il sera, à chaque instant, égal au volume du vase

compris entre le niveau variable et le niveau initial.

674. Supposons, par exemple, que le vase soit un cylindre vertical, terminé par un segment de surface dont la flèche est très petite et dans lequel est percé l'orifice horizontal AB. Soient a l'aire constante de la section horizontale du cylindre, et n le rapport de a à ω, de sorte qu'on ait

$$\omega = \frac{a}{n}, \quad \zeta^2 = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

En faisant abstraction du segment inférieur du vase qu'on suppose très petit, on pourra prendre

$$\omega = a, \quad y = a, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{h}{a},$$

dans l'équation (7), qui deviendra alors

$$\frac{dz}{dh} - \frac{(n^2 - 1)z}{h} + n^2 = 0.$$

Son intégrale complète est

$$z = Ch^{n^2 - 1} - \frac{n^2 h}{2 - n^2},$$

en désignant par C la constante arbitraire. Si on appelle H la valeur initiale de h, il faudra que z s'évanouisse pour $h = H$; ce qui exige qu'on ait

$$C = \frac{n^2}{2 - n^2} H^{2 - n^2},$$

d'où il résultera, à un instant quelconque,

$$z = \frac{n^2}{2 - n^2}(H^{2 - n^2} h^{n^2 - 1} - h).$$

On aura, en même temps,

$$u = n\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{H^{2 - n^2} h^{n^2 - 2} - 1}{2 - n^2}}, \quad (8)$$

et, en vertu de l'équation (5),

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}}\sqrt{\frac{2 - n^2}{H^{2 - n^2} h^{n^2 - 2} - 1}}. \quad (9)$$

C'est donc cette formule qu'il faudra intégrer pour obtenir t en fonction de h. Dans le cas de $n = 1$, on aura

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2g}\sqrt{H - h}};$$

d'où l'on tire

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{H - h},$$

et, par conséquent,

$$H - h = \tfrac{1}{2} gt^2,$$

comme cela doit être, puisque l'orifice étant alors égal à la base du cylindre, le mouvement du fluide doit être le même que celui d'un corps solide pesant qui tombe dans le vide. La formule (9) s'intègre encore sous forme finie, lorsqu'on a $n^2 = 3$; et cela n'a lieu que pour cette valeur et pour $n^2 = 1$. Mais son intégrale définie, prise depuis $h = H$ jusqu'à $h = 0$, qui exprime le temps de l'écoulement entier du liquide, pourra toujours se réduire à des transcendantes que M. Legendre a nommées *intégrales Eulériennes* de la seconde espèce, et dont il a donné des tables numériques. J'ai effectué ailleurs cette réduction *; ici je me bornerai à appliquer la formule (9) au cas de $n^2 = 2$, où elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

D'après la règle ordinaire, sa véritable valeur est

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}}\left(\log.\frac{H}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, si l'on fait

$$h = He^{-2x^2}, \quad dh = -4He^{-2x^2} x\,dx;$$

il en résultera

$$dt = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\, e^{-x^2} dx.$$

Les limites relatives à x, qui répondent à $h = H$ et $h = 0$, seront $x = 0$ et $x = \infty$; si donc on appelle T le temps de l'écoulement total, on aura

$$T = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi H}{g}},$$

en observant que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ est la moitié de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, qui a $\sqrt{\pi}$ pour valeur, comme on l'a vu dans le n° 513. Il s'ensuit que le temps T est celui des petites oscillations d'un pendule simple, dont la longueur serait $\frac{2}{\pi}$ H.

675. Lorsque l'orifice AB est très petit par rapport aux sections horizontales du vase, on peut négliger le terme multiplié par ω dans l'équation (4), à moins que le facteur $\frac{du}{dt}$ ne soit très grand; ce qui a lieu, en effet, au commencement du mouvement, où la vitesse u varie avec une grande rapidité. On peut aussi y mettre l'unité à la place de ζ; et alors, soit que le niveau EF s'abaisse ou qu'il ne varie pas, l'équation (4) se réduit à

$$g(h + c) - \tfrac{1}{2} u^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$u = \sqrt{2g(h + c)}.$$

* *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, tome III, page 284.

Il en résulte ce théorème : que la vitesse d'un liquide qui sort d'un vase par un très petit orifice, est égale à celle qu'un corps pesant acquerrait en tombant dans le vide, d'une hauteur égale à celle du niveau du liquide au-dessus de cet orifice, quand les pressions supérieure et inférieure sont égales, ou, plus généralement, de la hauteur du niveau, augmentée de la constante c, quand ces deux pressions sont inégales.

Dans le cas du niveau constant, ce théorème résulte de la valeur finale de u, trouvée dans le n° 672, en y faisant $\zeta = 1$. Il résulte aussi de la formule (8), appliquée au cas où n est un très grand nombre, afin que l'orifice a soit une très petite partie de la section horizontale α du cylindre. On peut alors mettre n^2 à la place de $n^2 - 2$; ce qui change d'abord la formule (8) en celle-ci :

$$u = \sqrt{2gh}\sqrt{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{n^2}}.$$

Or, dès que h sera notablement moindre que H, la puissance n^2 du rapport $\frac{h}{H}$ sera une très petite fraction, et cette valeur de u se réduira, à très peu près, à $u = \sqrt{2gh}$.

L'orifice AB étant très petit, si la section MN n'est pas très voisine de cette ouverture, le rapport $\frac{\alpha^2}{y^2}$, qui entre dans la formule (3), sera très petit; le rapport $\frac{\alpha^2}{\omega^2}$ l'est également; on pourra donc supprimer le dernier terme de cette formule; et si l'on néglige aussi le terme multiplié par α, elle se réduira à

$$p = \varpi + g\rho\,(x - \theta);$$

d'où l'on conclut que, dans le cas d'un très petit orifice, la pression en tous les points du vase éloignés de cette ouverture, est sensiblement la même pendant le mouvement que dans l'état d'équilibre.

676. L'hypothèse du parallélisme des tranches exige, en général, que l'orifice soit horizontal; mais, dans le cas d'un très petit orifice, on l'admet encore lorsque le liquide s'écoule par une ouverture latérale, dont le plan a une inclinaison quelconque, et peut même être vertical. L'observation fait voir qu'alors le liquide situé à peu de distance au-dessous de cette petite ouverture, demeure stagnant, et que les tranches horizontales situées à une pareille distance au-dessus de cette même ouverture, descendent parallèlement à elles-mêmes; en sorte que le parallélisme des tranches n'est troublé, comme dans le cas d'un petit orifice horizontal, que pour la partie du liquide très voisine de l'orifice. On pourra donc prendre $\sqrt{2g\,(h + c)}$, pour la vitesse d'un liquide qui s'écoule par une très petite ouverture, quelle que soit l'inclinaison de cet orifice; h étant la hauteur variable ou constante du niveau du liquide au-dessus du centre de l'orifice, et c la constante provenant de la différence des pressions extérieures qui répondent à ce niveau et à cette ouverture. Si le vase est placé dans le vide, de sorte que les deux pressions et cette constante soient nulles, les molécules du liquide auront, en sortant du vase, la vitesse $\sqrt{2gh}$ due à la hauteur h, qui est aussi la vitesse nécessaire pour s'élever, dans le vide, à cette hauteur (n° 130). Par conséquent, si l'on donne au fluide, au moyen d'un tuyau, une direction verticale, il remontera, au dehors, à la hauteur de son niveau intérieur; ce qui est, en effet, conforme à l'expérience. Généralement, les molécules du fluide décriront dans le vide, après un très court intervalle de temps, des paraboles dont la tangente à leur point de départ dépendra de la direction du jet, et le paramètre, de la hauteur h ou $h + c$, si la constante c n'est pas nulle.

La pression p sera sensiblement la même que dans l'état d'équilibre, excepté à l'orifice, où elle sera égale à $\varpi - g\rho c$, au lieu de $\varpi + g\rho h$. Or, si elle était aussi égale à $\varpi + g\rho h$ sur cette partie du vase, les pressions horizontales se détruiraient, les pressions verticales se réduiraient au poids du liquide, augmenté de la pression $\varpi\omega$ qui a lieu sur la surface du niveau; d'où l'on peut conclure que, dans l'état de mouvement, la charge totale que le vase aura à supporter se composera de la pression verticale qui aurait lieu dans l'état d'équilibre, et d'une force normale au plan de l'orifice, dirigée de dehors en dedans du vase, et égale à l'excès de la pression $(\varpi + g\rho h)\,\alpha$ sur la pression $(\varpi - g\rho c)\,\alpha$, ou à $g\rho\,(h + c)\,\alpha$, en désignant toujours par α l'aire très petite de cet orifice.

677. Dans le cas d'un niveau constant et d'un orifice très petit, horizontal ou incliné, la *dépense* pendant le temps t, c'est-à-dire, le volume q du liquide qui sort du vase avec la vitesse $\sqrt{2gh}$, sera

$$q = \alpha t\sqrt{2gh};$$

ce qui résulte aussi de la valeur finale de q trouvée dans le n° 672, en y négligeant le carré de α. Mais on ne doit pas oublier que l'hypothèse du parallélisme des tranches, sur laquelle cette valeur de q est fondée, n'est qu'une approximation dont le degré d'exactitude ne peut pas être évalué *à priori*, et dont les résultats ne doivent pas être employés sans restriction. Or, l'expérience ne s'accorde pas toujours avec cette valeur théorique de la dépense.

Si la paroi du vase n'est pas très mince, et que l'ouverture pratiquée dans son épaisseur soit évasée intérieurement, de telle sorte que le fluide qui s'écoule hors du vase soit un cylindre vertical, ou un cylindre recourbé dont les sections normales soient constantes et égales à l'aire α de l'orifice, prise sur la surface extérieure du vase; dans ce cas, disons-nous, la dépense observée s'accorde

avec la valeur précédente de q. Mais dans le cas d'un orifice en *mince paroi*, la dépense observée est toujours proportionnelle à l'aire de l'orifice, et à la racine carrée de l'élévation du niveau, comme dans la formule théorique; mais elle s'écarte de cette formule dans sa valeur absolue, qui en diffère par un facteur à peu près constant et moindre que l'unité. D'après les expériences qui méritent le plus de confiance, ce facteur est 0,62; en sorte que la valeur de q, dont on fait usage dans la pratique, est

$$q = (0,62)\, \omega t \sqrt{2gh},$$

pour un très petit orifice en mince paroi, et une hauteur du niveau assez grande par rapport aux dimensions de cette ouverture, horizontale ou inclinée.

On attribue cette différence aux directions inclinées que prennent les molécules du liquide en approchant de l'orifice, que je suppose horizontal, pour fixer les idées; directions qu'elles conservent après avoir traversé la mince paroi du vase. Il en résulte que la veine fluide extérieure se rétrécit, jusqu'à une petite distance du vase, où la section transversale est à son *minimum*, pour devenir ensuite constante. Ce phénomène est ce qu'on appelle la *contraction de la veine fluide*. L'écoulement du fluide est le même que si l'orifice était la section de la veine à l'endroit de sa plus grande contraction, de manière que si l'on désigne par ω' l'aire de cette section, et par h' sa distance constante au niveau du liquide, la dépense sera exprimée par $\omega' t \sqrt{2gh'}$, ou, à très peu près, par $\omega' t \sqrt{2gh}$, à cause du peu de différence de h' et h; or, en effet, par des mesures directes de la section ω' comparée à l'orifice ω, on trouve que ces deux quantités sont dans un rapport à peu près indépendant de h, et que l'on a constamment $\omega' = (0,62)\, \omega$.

Si l'on adapte à l'orifice en mince paroi, un *ajutage* cylindrique en dehors du vase, perpendiculaire au plan de l'orifice, et par lequel l'écoulement aura lieu, l'expérience montre que la dépense est augmentée, et peut s'élever aux quatre cinquièmes du résultat de la théorie. Si cet ajutage est enfoncé dans l'intérieur du vase, la dépense est, au contraire, diminuée, et réduite à moitié de la dépense théorique; en sorte que, dans la valeur précédente de q, le facteur 0,62 doit être remplacé par 0,80 dans le premier cas, et par 0,50 dans le second. Je me borne à citer succinctement ces résultats de l'observation, qui n'ont été ramenés, jusqu'à présent, à aucune théorie.

678. On admet aussi l'hypothèse du parallélisme des tranches dans le mouvement d'un fluide élastique qui sort d'un vase par un orifice quelconque; et elle s'écarte peu de la vérité, quand les sections du vase, parallèles au plan de l'orifice, ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre, et que la longueur du vase est assez grande par rapport à leurs dimensions.

Dans ce cas, on peut faire abstraction de la pesanteur, et supposer que le mouvement soit uniquement dû à la force élastique du fluide, plus grande ou plus petite à l'intérieur du vase qu'en dehors. On supprimera donc le terme dépendant de g dans l'équation (1), qui convient aux liquides et aux fluides élastiques. De plus, la différentielle de v, qu'elle renferme, devant être prise par rapport à t et à la variable x considérée comme fonction de t, on aura

$$dv = \frac{dv}{dt}\, dt + \frac{dv}{dx}\, \frac{dx}{dt}\, dt;$$

et comme, on a aussi $\frac{dx}{dt} = v$, cette équation deviendra

$$\frac{dp}{dx} + \rho \frac{dv}{dt} + \rho v \frac{dv}{dx} = 0. \qquad (a)$$

Le fluide étant compressible, il n'en passera plus un même volume, à chaque instant, par toutes les sections du vase, et l'équation (2) n'aura pas lieu. La masse de fluide qui passe pendant l'instant dt par la section MN, sera égale à $\rho y v dt$; ce sera cette même masse qui passera, l'instant d'après, en changeant de volume, par la section M'N'; et pendant toute la durée du mouvement, sa grandeur ne variera pas. La différentielle du produit $\rho y v$, prise par rapport à t et à la variable x considérée comme une fonction de t, sera donc nulle; et à cause que y n'est fonction que de x, et qu'on a $\frac{dx}{dt} = v$, on en conclura

$$\rho v^2 \frac{dy}{dx} + y \frac{d.\rho v}{dt} + y v \frac{d.\rho v}{dx} = 0. \qquad (b)$$

Enfin, si l'on suppose que la température demeure constante pendant le mouvement, dans toute la masse du fluide, on aura

$$p = \rho k;$$

k étant un coefficient constant et donné.

Cela posé, en mettant $\frac{p}{k}$ au lieu de ρ dans les équations (a) et (b), on aura deux équations aux différences partielles du premier ordre, pour déterminer, en fonctions de x et t, les deux inconnues v et p du problème. Elles ne sont pas intégrables sous forme finie, et les valeurs de v et p ne pourront s'obtenir que par approximation. Ces valeurs renfermeront deux fonctions arbitraires, que l'on déterminera d'après deux conditions particulières; pour cela, je supposerai, d'une part, que l'écoulement ait lieu à l'air libre, en sorte qu'en désignant

par ϖ la pression atmosphérique, rapportée à l'unité de surface, on ait constamment $p=\varpi$, à l'orifice AB. D'un autre côté, je supposerai aussi que le vase soit en communication avec un gazomètre d'une grande capacité, au moyen duquel on entretienne une pression constante et donnée, sur une section EF du fluide, parallèle à AB et de position fixe, de manière qu'en désignant par ϖ' cette pression rapportée à l'unité de surface, on ait aussi $p=\varpi'$, en cet endroit du vase, pendant toute la durée du mouvement. Si donc on compte la distance x à partir du plan EF, et qu'on appelle l la distance comprise entre AB et EF, on aura, quel que soit t, $p=\varpi'$ pour $x=0$, et $p=\varpi$ pour $x=l$; ce qui servira à déterminer les deux fonctions arbitraires, et à compléter la solution du problème. Mais cette solution est trop compliquée pour qu'on en puisse déduire aucun résultat utile; et, dans la pratique, il suffit de connaître la vitesse constante de l'écoulement du fluide par l'orifice AB, lorsque la pression p et la vitesse v sont devenues constantes en chaque point du vase; ce qui arrive, en général, après un très court intervalle de temps.

679. Faisons donc $\frac{dv}{dt}=0$ et $\frac{dp}{dt}=0$, dans les équations (a) et (b); elles se réduiront à deux équations différentielles, savoir :

$$\frac{k}{p}\frac{dp}{dx}+v\frac{dv}{dx}=0,\quad pv\frac{dy}{dx}+y\frac{d.pv}{dx}=0,\quad (e)$$

à cause de $p=k\rho$.

L'intégrale de la seconde de ces équations est

$$ypv=c;$$

c étant la constante arbitraire. En désignant toujours par α l'orifice AB, et par u la vitesse du fluide à cet orifice, de sorte qu'on ait à la fois $y=\alpha$, $v=u$, $p=\varpi$, et, par conséquent, $c=\alpha\varpi u$, il en résultera, en un point quelconque du vase,

$$v=\frac{\alpha\varpi u}{yp}.\qquad (d)$$

En substituant cette valeur de v dans la première équation (e), il vient

$$\frac{k}{p}\frac{dp}{dx}+\frac{\alpha^2\varpi^2u^2}{py}\frac{d.\frac{1}{py}}{dx}=0;$$

d'où l'on tire, en intégrant et désignant par c' la constante arbitraire,

$$k\log p+\frac{\alpha^2\varpi^2u^2}{2p^2y^2}=c'.$$

Je désigne par a l'aire de la section EF, de sorte qu'on ait, en même temps, $y=a$ et $p=\varpi'$; on aura donc

$$k\log\varpi'+\frac{\alpha^2\varpi^2u^2}{2\varpi'^2a^2}=c',$$

et, en retranchant cette équation de la précédente,

$$k\log\frac{p}{\varpi'}+\frac{1}{2}\alpha^2\varpi^2u^2\left(\frac{1}{p^2y^2}-\frac{1}{\varpi'^2a^2}\right)=0.\quad (e)$$

Les équations (d) et (e) feront connaître la vitesse et la pression en un point quelconque du vase, dès que l'on connaîtra la vitesse u relative à l'orifice. Or, en faisant $p=\varpi$ et $y=\alpha$, dans l'équation (e), on en conclut

$$u^2\left(1-\frac{\alpha^2\varpi^2}{a^2\varpi'^2}\right)=2k\log\frac{\varpi'}{\varpi};\quad (f)$$

d'où l'on tirera la valeur de u. On fera, dans cette formule,

$$k=grh,$$

en appelant g la gravité, et r le rapport de la densité du mercure à celle du fluide intérieur, sous une pression barométrique dont la hauteur est h, le volume du fluide qui sortira du vase pendant le temps t aura pour valeur αut.

Quand l'orifice sera très petit, on remarquera, comme dans le n° 676, qu'il ne sera plus nécessaire qu'il soit parallèle à la section EF, c'est-à-dire, qu'il pourra être pratiqué à la partie latérale du vase, et avoir une inclinaison quelconque sur le plan de cette section. On pourra alors négliger le terme dépendant de $\frac{\alpha^2}{a^2}$, dans le premier membre de l'équation (f) qui deviendra

$$u^2=2grh.\log\frac{\varpi'}{\varpi};$$

par conséquent, la vitesse de l'écoulement du fluide par un très petit orifice, sera celle qui serait due à une hauteur rh, multipliée par le logarithme népérien du rapport $\frac{\varpi'}{\varpi}$. La supposition qu'on a faite d'une température invariable pendant toute la durée du mouvement exige que la vitesse u ne soit pas très considérable, sans quoi la température varierait comme dans la propagation du son.

ADDITION

RELATIVE A L'USAGE DU PRINCIPE DES FORCES VIVES, DANS LE CALCUL DES MACHINES EN MOUVEMENT.

680. Le principe des vitesses virtuelles donne immédiatement les conditions d'équilibre des forces appliquées aux machines; celui des forces vives renferme de même la théorie de leur mouvement, et fournit le moyen le plus direct de calculer les effets des forces qui leur sont appliquées. Cet usage du principe des forces vives forme, pour ainsi dire, le point de jonction de la Mécanique rationnelle et de la Mécanique industrielle. C'est pourquoi j'ai cru devoir donner succinctement, dans cette *addition*, les notions les plus générales sur cette matière. Pour de plus grands développemens, j'indiquerai les leçons de M. Navier, à l'École des Ponts et chaussées, et de M. Poncelet, à l'École de l'Artillerie et du Génie, qui ont été seulement lithographiées, mais auxquelles ces savans professeurs donneront sans doute plus de publicité.

681. Les *machines* sont des instrumens ou des systèmes de corps solides, propres à transporter l'action des forces, d'une partie à une autre de ces assemblages.

Quand une machine est en mouvement, certains points sont donc soumis à des forces données, et d'autres parties exercent des pressions sur les corps extérieurs, ou sont pressées réciproquement par ces corps que la machine est destinée à déplacer ou à déformer. Les premières forces s'appellent *forces mouvantes;* leurs points d'application se meuvent suivant leurs directions, ou, plus généralement, les directions des mouvemens de ces points font des angles aigus avec celles de ces forces. Par opposition, on nomme *forces résistantes*, les pressions exercées par les corps extérieurs; et les directions des mouvemens de leurs points d'application sont contraires à celles de ces forces, ou, du moins, elles font avec celles-ci des angles obtus.

La liaison des parties d'une machine est telle, qu'elle ne peut prendre, en général, que deux mouvemens directement opposées l'un à l'autre; il s'ensuit donc que, quand le sens du mouvement qu'elle prend effectivement est connu, il suffit d'une seule équation pour déterminer ce mouvement d'une manière complète. Cette équation est celle que l'on obtient en intégrant les deux membres de l'équation (a) du n° 565, savoir :

$$\frac{1}{2}\, d\,.\,\Sigma m v^2 = \Sigma m\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz). \quad (a)$$

Au bout d'un temps quelconque t, compté depuis l'origine du mouvement, v représente la vitesse du point dont x, y, z, sont les trois coordonnées rapportées à des axes fixes et rectangulaires; m est la masse de ce point; dx, dy, dz, sont les projections, sur ces axes, de l'espace qu'il parcourt pendant l'instant dt; on désigne par $m\mathrm{X}$, $m\mathrm{Y}$, $m\mathrm{Z}$, les composantes de sa force motrice parallèles à ces mêmes axes, et les sommes Σ s'étendent à tous les points m du système.

682. Avant d'aller plus loin, il importe de distinguer, dans le second membre de l'équation (a), les termes qui proviennent des forces mouvantes et ceux qui résultent des forces résistantes, et de leur donner une autre forme.

Pour cela, soient P une des forces mouvantes, et α, β, γ, les angles que fait sa direction avec des parallèles aux axes des x, y, z; relativement à cette force, on aura

$$m\mathrm{X} = \mathrm{P}\cos\alpha, \quad m\mathrm{Y} = \mathrm{P}\cos\beta, \quad m\mathrm{Z} = \mathrm{P}\cos\gamma.$$

Soient aussi ds l'espace décrit par son point d'application pendant l'instant dt, et λ, μ, ν, les angles que fait la direction de ds avec ses projections dx, dy, dz, de sorte qu'on ait

$$dx = ds\cos\lambda, \quad dy = ds\cos\mu, \quad dz = ds\cos\nu.$$

Désignons enfin par dp la projection de ds sur la direction de la force P, et par σ l'angle compris entre dp et ds; nous aurons

$$dp = ds\cos\sigma, \quad \cos\sigma = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu;$$

et, de ces diverses équations, on déduira

$$m(Xdx + Ydy + Zdz) = Pdp,$$

pour le terme du second membre de l'équation (a), qui répond à la force P.

En désignant par Q une des forces résistantes, et par dq la projection sur le prolongement de sa direction, de l'espace parcouru pendant l'instant dt par son point d'application, on trouvera de même $-Qdq$ pour le terme de ce second membre qui provient de la force Q. De cette manière, l'équation (a) prendra la forme

$$\frac{1}{2}\, d.\, \Sigma mv^2 = \Sigma Pdp - \Sigma Qdq; \qquad (b)$$

l'une des sommes Σ contenues dans son second membre s'étendant à toutes les forces mouvantes de la machine, et l'autre à toutes les forces résistantes. D'après les hypothèses qu'on a faites sur les directions de ces deux sortes de forces, eu égard au sens des mouvemens des points où elles agissent, les quantités dp et dq sont positives, ainsi que P et Q, et conséquemment, les sommes Σ ne se composent que de termes positifs.

683. En désignant par k la vitesse initiale du point quelconque m, ou la valeur de v qui répond à $t=0$, et intégrant les deux membres de l'équation (b), on aura

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mk^2 = \int \Sigma Pdp - \int \Sigma Qdq; \quad (c)$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent à l'origine du mouvement.

C'est sous cette forme qu'on emploie l'équation des forces vives, pour calculer les effets des machines en mouvement; elle coïncide avec l'équation (b) du n° 565, lorsqu'on peut effectuer les intégrations indiquées dans son second membre.

Les produits Pdp et Qdp, dont les sommes sont soumises à ces intégrations, ont reçu différentes dénominations : on les appelle *quantités d'action*, *momens d'activité*, *effets dynamiques*, des forces P et Q. Il serait à désirer qu'on les désignât toujours par un même nom. M. Coriolis a proposé de les nommer *quantités de travail élémentaire*; nous adopterons cette dénomination. Les sommes ΣPdp et ΣQdq seront donc les quantités de travail élémentaire, produites pendant un même instant par toutes les forces mouvantes et toutes les forces résistantes; et leurs intégrales $\int \Sigma Pdp$ et $\int \Sigma Qdq$ exprimeront le *travail moteur* et le *travail résistant* qui ont eu lieu dans la machine, depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant que l'on considère.

Ainsi, l'équation (c) signifiera que, dans une machine en mouvement, l'accroissement, pendant un temps quelconque, de la demi-somme des forces vives de toutes ses parties, est toujours égal à l'excès du travail moteur sur le travail résistant pendant le même temps.

684. Si la force mouvante P, ou la force résistante Q, est un poids Π, qui descende, dans le premier cas, d'une hauteur verticale h, ou qui monte, dans le second cas, à la même hauteur, le travail moteur ou résistant qui en résultera, aura pour valeur le produit Ph, quel que soit le chemin parcouru par ce poids, de manière que h soit toujours la projection verticale de la ligne droite ou courbe que son centre de gravité a suivie. Si cette ligne est fermée ou présente des sinuosités, il y aura eu alternativement travail moteur et travail résistant; et h étant la différence de niveau du point de départ et du point d'arrivée, Πh sera l'excès du premier travail sur le second. Dans le cas où il n'y a pas d'alternatives, la quantité de travail correspondante à un poids Π élevé à une hauteur h équivaut à la quantité de travail qui répond à un autre poids Π' élevé à une hauteur h', telle que l'on ait $h' = \frac{\Pi h}{\Pi'}$.

Quelle que soit la force P ou Q, l'intégrale $\int Pdp$ ou $\int Qdq$ est toujours équivalente au produit d'un poids Π et d'une hauteur h; et pour comparer entre eux et exprimer en nombres des travaux de différente nature, on peut ainsi les assimiler à des poids donnés, élevés à des hauteurs données. On prend alors pour unité de travail, que l'on appelle communément *unité dynamique*, le travail correspondant à un poids de 1000 kilogrammes, qu'on élève à la hauteur d'un mètre, ou qui descend d'un mètre de hauteur verticale. Cela étant, si l'on calcule les valeurs numériques des intégrales $\int Pdp$ et $\int Qdq$, en prenant 1000 kilogrammes pour unité de force, et le mètre pour unité linéaire, les nombres que l'on obtiendra de cette manière exprimeront en unités dynamiques, les quantités de travail représentées par ces intégrales. Une somme quelconque de force vive, telle que $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$, par exemple, pourra aussi être exprimée en unités dynamiques; car si l'on appelle l la hauteur due à la vitesse v, g la gravité, et p le poids de m, on aura

$$v^2 = 2gl, \quad p = gm, \quad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \Sigma pl;$$

et cette somme est de la même nature que les intégrales $\int Pdp$ et $\int Qdq$, ou que le produit Πh.

685. Lorsque la machine part du repos, l'équation (c) se réduit à

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \int \Sigma Pdp - \int \Sigma Qdq. \qquad (d)$$

Son premier membre étant une quantité essentiellement positive, il faut que dans les premiers momens le travail moteur l'emporte sur le travail résistant. Mais les vitesses des points de la machine ne pouvant pas croître indéfiniment, ce premier membre atteint son *maximum* au bout d'un certain temps, qui est généralement peu considérable. Par un moyen qui sera indiqué tout-à-l'heure, on fait en sorte qu'à partir de cet instant du *maximum*, la demi-somme $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ des forces vives demeure con-

stante, ou n'éprouve plus que de très petites variations; et l'on dit alors que la machine est parvenue à son état permanent. Dans cet état constant, on a, en différentiant l'équation précédente,

$$\Sigma P dp = \Sigma Q dq ;$$

de manière que la machine n'a plus d'autre effet que de changer, à chaque instant, le travail moteur élémentaire en une quantité égale de travail résistant. Mais il importe d'observer que la quantité $\int \Sigma Q dq$ de travail résistant dans lequel se change le travail moteur $\int \Sigma P dp$, pendant un temps quelconque, ne comprend pas seulement le travail qu'on veut exécuter, au moyen de cet instrument; l'intégrale $\int \Sigma Q dq$ comprend aussi le travail résistant qui provient du frottement des parties de la machine, entre elles ou contre des corps étrangers, et de la résistance du milieu dans lequel la machine est en mouvement.

Pour avoir égard, par exemple, aux frottemens, il faut, d'après ce qu'on a vu dans le n° 569, ajouter à l'intégrale $\int \Sigma Q dq$, provenant du travail résistant proprement dit, une autre intégrale $\int \Sigma f N ds$, dans laquelle f est le coefficient du frottement, N la pression mutuelle des parties frottantes, et ds l'élément de la courbe décrite par leur point de contact. Cette addition changera l'équation (d) en celle-ci :

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \int \Sigma P dq - \int \Sigma Q dq - \int \Sigma f N ds. \quad (e)$$

Il suit de là que quand une machine a atteint son état permanent, la quantité de travail $\int \Sigma P dp$, produite pendant un temps donné, par les forces mouvantes, n'est pas représentée en totalité par la partie utile $\int \Sigma Q dq$ du travail résistant, laquelle partie est toujours moindre que le travail moteur $\int \Sigma P dp$, de toute la quantité de travail correspondante aux frottemens et aux autres résistances. Une machine est d'autant meilleure que le travail utile $\int \Sigma Q dq$ approche davantage d'être égal au travail moteur $\int \Sigma P dp$; mais la première intégrale ne peut, quelle que soit la combinaison des parties de la machine, être égale à la seconde, ni, à plus forte raison, la surpasser. Parmi les machines imparfaites, où le travail utile n'était qu'une très petite fraction du travail moteur, et où la plus grande partie de celui-ci se trouvait absorbée par les frottemens, on peut citer, pour exemple, l'ancienne machine de Marly : le travail moteur consistait en une chute d'une partie considérable des eaux de la Seine, et le travail utile était l'élévation d'une quantité d'eau à une hauteur qui était bien loin de compenser l'exiguité de son volume.

686. Les quantités qui constituent essentiellement une machine sont la partie à laquelle sont appliquées les forces mouvantes, celle qui est en contact avec le corps que l'on a pour objet de mouvoir ou de déformer, et la partie intermédiaire qui transmet l'action des forces mouvantes. Quand on a satisfait aux conditions de la solidité, il importe pour l'économie des frais de construction et pour la diminution des frottemens, que la masse totale de la machine soit la plus petite possible; mais il y a une autre considération, qui exige que l'on augmente cette masse, et qu'on ajoute aux trois parties essentielles dont elle se compose, une autre pièce qu'on appelle un *volant*, et qui consiste, en général, en un corps solide tournant autour d'un axe fixe horizontal.

Les mouvemens des trois premières parties d'une machine étant alternatifs ou révolutifs, la demi-somme $\frac{1}{2}\Sigma m v^2$ des forces vives qui s'y rapportent, après qu'elle a atteint son *maximum*, devient une quantité périodique; il en est de même, par conséquent, à l'égard du second membre de l'équation (e); en sorte que si la machine était réduite à ses trois parties essentielles, le travail moteur et le travail résistant, en comprenant dans celui-ci les effets des frottemens, l'emporteraient alternativement l'un sur l'autre; et si les variations alternatives du travail moteur $\int \Sigma P dp$, et de la partie $\int \Sigma f N ds$ du travail résistant, n'étaient pas réglées exactement sur les périodes de la machine, la quantité $\int \Sigma Q dq$ de travail utile varierait continuellement. Or, pour la bonne exécution des ouvrages que l'on veut effectuer au moyen d'une machine, il est indispensable, le plus souvent, que le travail utile approche, autant que possible, de l'uniformité; et c'est à remplir cette condition que le volant est destiné.

En effet, soient dm un élément de la masse du volant, et r sa distance à l'axe de rotation; appelons ω la vitesse angulaire autour de cet axe, commune à tous les élémens dm, et qui peut varier d'un instant à un autre; $r\omega$ sera la vitesse absolue de dm; par conséquent, la somme des forces vives de toute la masse du volant aura pour valeur $\int r^2\omega^2 dm$, ou, ce qui est la même chose, le produit $\mu\omega^2$, en désignant par μ le moment d'inertie du volant par rapport à son axe, c'est-à-dire, l'intégrale $\int r^2 dm$ étendue à sa masse entière. Si donc on ajoute $\frac{1}{2}\mu\omega^2$ au premier membre de l'équation (e), et si l'on suppose que la demi-somme $\frac{1}{2}\Sigma m v^2$ se rapporte aux trois autres parties de la machine, on aura

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2 + \frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dp - \int \Sigma f N ds;$$

d'où l'on tire

$$\int \Sigma Q dq = R - \frac{1}{2}\mu\omega^2,$$

en faisant, pour abréger,

$$R = \int \Sigma P dp - \int \Sigma f N ds - \frac{1}{2}\Sigma m v^2.$$

Or, on conçoit que les variations de ω peuvent être réglées sur celles de cette quantité R, de manière que la variation totale de $R - \frac{1}{2}\mu\omega^2$ soit réduite

à de très petites amplitudes, et que, par conséquent, le travail résistant soit à peu près invariable dans l'état permanent de la machine : on conçoit aussi que, toutes choses d'ailleurs égales, les variations de la vitesse ω du volant seront d'autant moindres, que son moment d'inertie μ sera plus grand.

687. Par l'addition d'un volant, la dépense de travail moteur nécessaire pour mettre la machine en mouvement et pour accroître la force vive totale jusqu'à ce qu'elle soit parvenue au *maximum*, se trouve augmentée; mais quand la machine est arrivée à son état permanent, les masses de ses différentes parties n'ont plus d'influence sur son travail, si ce n'est celle de leur poids sur les frottemens.

Pendant le mouvement de la machine, s'il survient un choc de ses parties entre elles ou contre des corps étrangers, et qu'après le choc les points de contact aient une vitesse commune dans le sens normal aux surfaces, il y aura diminution de force vive dans le système; si les parties qui se sont choquées se séparent, en vertu de leur élasticité, il y aura encore perte de force vive, quand ces parties ne seront pas parfaitement élastiques; et quand elles le seront, il y aura perte de force vive dans la première partie du choc, puis une augmentation précisément égale à cette perte dans la seconde partie (nº 573). Par conséquent, pour ramener la machine à son état permanent, sans qu'il y ait diminution dans la quantité de travail résistant, il faudra que les forces mouvantes fassent une nouvelle dépense de travail moteur, semblable à celle qui a eu lieu à l'origine du mouvement, et égale à la moitié de la force vive perdue dans le choc. C'est pourquoi, indépendamment du dommage que les chocs produisent dans les machines, il est encore nécessaire de les éviter, pour l'économie des forces mouvantes.

688. En général, le travail résistant qui provient des frottemens et de l'action du milieu, est une quantité continuellement croissante; pour qu'il y ait un travail utile, ou, seulement, pour que le mouvement de la machine soit entretenu, il est donc nécessaire que la quantité de travail moteur croisse également avec le temps, dans un rapport au moins égal à celui de l'accroissement du travail résistant. Si cela n'a pas lieu, le travail résistant finira par être égal au travail moteur : à cet instant, la demi-somme des forces vives de tous les points du système sera nulle; les vitesses de tous ces points seront zéro, et la machine s'arrêtera et se trouvera réduite au repos.

Aux frottemens et aux résistances des milieux qui produisent cet épuisement graduel de la force vive, on peut encore ajouter la communication d'une partie du mouvement de la machine à ses supports, laquelle partie va ensuite se perdre dans le sol sur lequel la machine est établie. Cette communication ne provient pas seulement du défaut de solidité des supports; elle a aussi lieu en vertu de leur élasticité, qui permet au mouvement de s'y propager de la même manière que le son; et il peut résulter de cette propagation une diminution de vitesse des parties de la machine, semblable à celle qui serait produite par la résistance d'un milieu. J'ai donné un exemple de cet effet singulier, dans le mouvement d'un pendule suspendu à l'extrémité d'une verge élastique et horizontale, d'une longueur indéfinie *.

Quand on supprime l'action des forces mouvantes, et que le travail utile de la machine a aussi cessé, l'équation des forces vives se change en celle-ci :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mk^2 - \int \Sigma f N ds;$$

Σmk^2 étant la somme des forces vives de tous les points du système à cet instant, Σmv^2 cette somme à une époque subséquente, et $\int \Sigma f N ds$ comprenant le travail qui provient des frottemens, de la résistance du milieu et de la perte du mouvement par les supports. Or, ce dernier terme sera bientôt égal à $\frac{1}{2}\Sigma mk^2$; la force vive de la machine se trouvera complètement épuisée, et la machine cessera de se mouvoir, comme on l'a déjà dit dans le nº 569.

689. Quand un homme transporte son propre poids, que j'appellerai Π, à une hauteur verticale h au-dessus de son point de départ, la quantité de travail produite est exprimée par Πh, d'après la règle du nº 684; mais cette quantité donnerait une idée très imparfaite des efforts musculaires qui ont été faits, et de la force totale que cet homme a développée. Il serait difficile d'en obtenir une mesure exacte; on peut seulement faire voir qu'elle doit surpasser, souvent de beaucoup, la quantité précédente, qui serait nulle si la hauteur h était zéro, quoique, certainement, il y ait une quantité de travail mécanique correspondante à la marche d'un homme sur un plan horizontal.

Dans cette marche, je suppose que l'homme ait d'abord le pied gauche en avant du pied droit; son centre de gravité est alors abaissé, au-dessous de sa position naturelle, d'une quantité que je désignerai par ϵ. En s'appuyant sur son pied gauche, et s'aidant du frottement de ce pied contre le sol, l'homme ramène son pied droit au niveau du pied gauche, puis le pied droit devance le pied gauche, et va se poser sur le sol; ce qui fait un pas entier, composé de deux parties. Or, dans la première partie, l'homme soulève son centre de gravité de la hauteur ϵ, et produit par là une quantité de travail égale à $\Pi\epsilon$; il imprime, au même instant, à ce point une vitesse horizontale, que je désignerai par a, à la fin du premier demi-pas; ce qui

* *Additions à la Connaissance des Temps* pour l'année 1833, pag. 26.

répond à une autre quantité de travail équivalente à la demi-force vive $\frac{1}{2}\frac{\Pi a^2}{g}$, en désignant par g la gravité. On devrait encore ajouter à $\frac{1}{2}\frac{\Pi a^2}{g}$, la partie de la demi-somme des forces vives provenant des vitesses relatives de tous les autres points du corps (n° 570); mais j'en ferai abstraction dans cette évaluation, qui ne peut être qu'un aperçu. Je supposerai aussi que le second demi-pas a lieu en vertu de la vitesse acquise à la fin du premier, et du poids du corps qui retombe sur le sol, de manière que, pendant le second demi-pas, l'homme n'exerce plus aucun effort, et que les vitesses verticale et horizontale, dont son centre de gravité se trouve encore animé à la fin du pas entier, soient détruites par le choc et le frottement de son pied droit contre le sol. Dans cette hypothèse, la quantité de travail de l'homme pendant le pas entier, sera la somme $\Pi\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\Pi a^2}{g}$, ou $\Pi(\varepsilon + \alpha)$, en appelant α la hauteur due à la vitesse a, de sorte qu'on ait $a^2 = 2g\alpha$.

Il suit de là que dans un nombre n de pas égaux et semblables, la quantité de travail d'un homme ou d'un animal, portant un fardeau et marchant sur une route horizontale, aura pour valeur $nK(\varepsilon + \alpha)$, en désignant par K son poids Π augmenté de celui du fardeau. Si le poids total a été élevé verticalement à une hauteur h au-dessus du point de départ, il faudra ajouter Kh à la quantité $nK(\varepsilon + \alpha)$; et si le fardeau est traîné sur une route, où il éprouve un frottement qui soit représenté par une partie F de son poids, il en résultera une autre augmentation de travail égale à Fl, en appelant l la longueur du trajet.

690. Dans le calcul des effets des machines en mouvement, il est souvent utile de distinguer les vitesses communes et les vitesses relatives de leurs différens points. Pour cela, soient toujours x, y, z, au bout du temps t, les coordonnées du point quelconque dont la masse est m; à cet instant, les composantes de sa vitesse absolue seront $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; et, au bout du temps $t + dt$, les coordonnées de ce même point deviendront $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Or, on peut décomposer le mouvement du système, pendant l'instant dt, en un mouvement de translation et de rotation commun à tous ses points, dans lequel leurs distances soient invariables, et en des mouvemens particuliers où ces distances varient convenablement. J'appellerai $d'x, d'y, d'z$, les accroissemens de x, y, z, qui proviennent du mouvement commun, et d_ix, d_iy, d_iz, ceux qui résultent du mouvement relatif de m, de sorte qu'on ait

$$dx = d'x + d_ix,\quad dy = d'y + d_iy,\quad dz = d'z + d_iz.$$

Pour ce point m, j'appellerai aussi u', v', w', les trois composantes de la vitesse commune qu'on regardera comme des fonctions données de t, x, y, z, et qui seront

$$u' = \frac{d'x}{dt},\quad v' = \frac{d'y}{dt},\quad u' = \frac{d'z}{dt};$$

celles de sa vitesse relative seront aussi $\frac{d_ix}{dt}, \frac{d_iy}{dt}, \frac{d_iz}{dt}$; on aura

$$\frac{dx}{dt} = u' + \frac{d_ix}{dt},\quad \frac{dy}{dt} = v' + \frac{d_iy}{dt},\quad \frac{dz}{dt} = w' + \frac{d_iz}{dt},$$

pour les composantes de sa vitesse absolue; et en différentiant, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{du'}{dt} + \frac{dd_ix}{dt^2},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dv'}{dt} + \frac{dd_iy}{dt^2},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dw'}{dt} + \frac{dd_iz}{dt^2}, \end{aligned}\right\}\ (f)$$

pour les forces accélératrices de ce point m, suivant les axes des coordonnées; les différentielles relatives à t qui sont indiquées, étant prises par rapport à cette variable et aux coordonnées x, y, z, regardées comme des fonctions de t.

Si ce point m est astreint à se mouvoir sur une surface qui peut être fixe ou mobile, mais dont la forme est invariable, il devra demeurer constamment sur cette surface, en vertu de sa vitesse absolue, et l'on pourra aussi supposer qu'il y resterait constamment, en vertu du mouvement commun du système. En représentant par $L = 0$, l'équation de la surface, L sera une fonction donnée des coordonnées de m, rapportées à des axes mobiles qui participent au mouvement commun, et cette quantité pourra être changée en une fonction du temps et des coordonnées de m rapportées à des axes fixes, c'est-à-dire, en une fonction de t, x, y, z. L'équation $L = 0$ devra subsister, lorsqu'on y remplacera ces quatre variables, soit par $t + dt$, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, dans le mouvement absolu de m, soit par $t + dt$, $x + d'x$, $y + d'y$, $z + d'z$, dans le mouvement commun du système. En négligeant les infiniment petits du second ordre, on aura donc simultanément

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx}(d'x + d_ix)$$
$$+ \frac{dL}{dy}(d'y + d_iy) + \frac{dL}{dz}(d'z + d_iz) = 0,$$
$$\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx}d'x + \frac{dL}{dy}d'y + \frac{dL}{dz}d'z = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dL}{dx}d_1x + \frac{dL}{dy}d_1y + \frac{dL}{dz}d_1z = 0. \qquad (g)$$

Cela posé, nous allons chercher la somme des forces vives dues aux vitesses relatives de tous les points du système, et la comparer à la somme des forces vives qui résultent de leurs vitesses absolues.

691. Reprenons, pour cela, la formule générale du n° 532, de laquelle on a déduit l'équation (a) du n° 681, et formons successivement les termes de cette formule, relatifs aux différentes sortes de forces qui peuvent agir sur le système que l'on considère.

Désignons d'abord par P une des forces extérieures et données; δp étant la projection du déplacement de son point d'application, sur sa direction, et en regardant cette projection comme une quantité positive ou négative, selon qu'elle tombe sur la direction même de P ou sur son prolongement, on aura, comme dans le n° 682,

$$m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = P\delta p,$$

pour la partie de la formule citée, qui résulte de cette force P.

Soit aussi R l'action mutuelle de deux points du système dont les masses sont m et m'; appelons r la distance mm', dont R est une certaine fonction; x, y, z, x', y', z', étant les coordonnées de m et m', on aura

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

et si δr exprime la variation de r qui résulte de leurs accroissemens δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, on aura aussi

$$r\delta r = (x - x')(\delta x - \delta x') + (y - y')(\delta y - \delta y') + (z - z')(\delta z - \delta z').$$

Les composantes de la force R appliquée au point m, seront

$$mX = \pm\frac{(x - x')R}{r},$$

$$mY = \pm\frac{(y - y')R}{r},$$

$$mZ = \pm\frac{(z - z')R}{r},$$

et celles de la même force appliquée au point m',

$$m'X' = \pm\frac{(x' - x)R}{r},$$

$$m'Y' = \pm\frac{(y' - y)R}{r},$$

$$m'Z' = \pm\frac{(z' - z)R}{r};$$

d'où l'on conclut

$$m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + m'(X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z') = \pm R\delta r,$$

pour la partie de la formule générale, provenant de la force R; le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu, selon que cette force est répulsive ou attractive.

Si le point m est astreint à demeurer sur la surface dont on a représenté l'équation par $L = 0$, dans le numéro précédent, et que l'on appelle ω l'élément de cette surface auquel le point m répond au bout du temps t, et ωU la résistance qu'il en éprouve, cette force sera normale à la position actuelle de ω; on aura donc pour ses composantes

$$mX = \omega UV\frac{dL}{dx},\quad mY = \omega UV\frac{dL}{dy},\quad mZ = \omega UV\frac{dL}{dz},$$

en faisant, pour abréger,

$$V = \left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}};$$

et si l'on fait aussi

$$V\left(\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z\right) = \delta u,$$

il en résultera $\omega U\delta u$, pour le terme de la formule générale qui provient de la résistance ωU. Le facteur U exprimera cette résistance rapportée à l'unité de surface; δu sera la projection du déplacement de m sur la normale à l'élément ω; elle aura un signe ambigu, à cause du radical V, et l'on regardera δu comme une quantité positive ou négative, selon que la projection du déplacement de m tombera sur la direction même de la résistance ωU, ou sur son prolongement.

Outre la résistance normale de la surface sur laquelle le point m est assujetti à se mouvoir, il éprouvera encore une résistance tangentielle provenant du frottement contre cette surface; et si l'on désigne cette force par ωF, et par δs la projection du déplacement du point matériel m sur sa trajectoire, il en résultera $\omega F\delta s$, pour le terme correspondant de la formule du n° 532.

D'après cela, cette formule pourra s'écrire ainsi:

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\\ &= \Sigma P\delta p \pm \Sigma R\delta r + \Sigma\omega U\delta u - \Sigma\omega F\delta s;\end{aligned}\right\}\ (h)$$

la somme Σ du premier membre répondant à tous les points du système, et les sommes Σ du second membre s'étendant, la première aux points qui sont soumis à des forces motrices extérieures, la seconde aux actions mutuelles de tous les points du système pris deux à deux, la troisième et la quatrième à tous les élémens des surfaces résistantes et frottantes.

Cela posé, si l'obligation d'une partie des points du système, de demeurer sur ces surfaces, est la seule condition qui restreigne les mouvemens du système entier, on pourra maintenant considérer tous ces points comme entièrement libres, et faire telle hypothèse qu'on voudra sur les variations δx, δy, δz, des coordonnées d'un point quelconque.

692. Je supposerai d'abord qu'on prenne

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz;$$

de sorte que le déplacement du point quelconque m soit celui qui a lieu effectivement pendant l'instant dt. On aura, en même temps, $\delta r = dr$; et l'on remplacera δp, δu, δs, par dp, du, ds, qui représentent les projections du déplacement réel du point m sur les directions des forces P, ωU, ωF. En appelant v, la vitesse d'un point quelconque m, et observant qu'on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz = \frac{1}{2} d.v^2,$$

l'équation (k) deviendra

$$\frac{1}{2} d.\Sigma m v^2 = \Sigma P dp \pm \Sigma R dr + \Sigma \omega U du - \Sigma \omega F ds.$$

En intégrant, on aura donc

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m k^2 \\ &= \int \Sigma P dp \pm \int \Sigma R dr + \int \Sigma \omega U du - \int \Sigma \omega F ds, \end{aligned}\right\} (i)$$

k étant la valeur initiale de v, et les intégrales commençant à l'origine du mouvement.

Le terme $\int \Sigma P dp$ comprendra la partie du travail moteur qui répond au poids du système; et si l'on appelle Π ce poids, et ζ la hauteur verticale dont le centre de gravité sera tombé pendant le temps t, cette partie sera égale à $\Pi\zeta$,

Lorsque les distances des points du système que l'on considère demeureront invariables pendant le mouvement, on aura $dr = 0$, et le terme $\int \Sigma R dr$ disparaîtra de l'équation (i). S'il s'agit d'un fluide, ce terme comprendra les attractions ou répulsions mutuelles de ses points, qui s'étendent à de grandes distances; il comprendra aussi les actions mutuelles qu'on appelle proprement *forces moléculaires* (n° 589), qui ne s'étendent qu'à des distances insensibles, et qui produisent les pressions intérieures, auxquelles on n'a point eu égard en formant l'équation (i). La valeur de cette intégrale $\int \Sigma R dr$ dépendra du changement de forme et des condensations ou dilatations du fluide pendant son mouvement; et pour les très petites variations de densité qui ont lieu dans le liquide, elle pourra varier dans de très grands rapports, à raison des forces moléculaires ou des pressions intérieures qui en résultent (n° 577).

Les sommes $\Sigma \omega U du$ et $\Sigma \omega F ds$ comprises sous les deux dernières intégrales, sont elles-mêmes des intégrales doubles étendues à tous les élémens ω des surfaces résistantes et frottantes. Si la partie du système qui frotte contre une de ces surfaces est un corps solide, la force ωF sera indépendante de la vitesse de ce corps, et proportionnelle, pour chaque élément ω, à la pression correspondante, laquelle est égale et contraire à la résistance ωU. Si cette partie frottante du système est un fluide, la force ωF dépendra de sa vitesse relative, et sera indépendante de la pression (n° 457). Lorsque la surface dont $L = 0$ est l'équation, sera immobile, la projection du déplacement de m sur la normale à cette surface sera nulle, puisque le point m est assujetti à demeurer sur cette surface; on aura donc $du = 0$; ce qui fera disparaître l'intégrale $\int \Sigma \omega U du$; et si l'on fait, de plus, abstraction du frottement, l'équation (i) se réduira à l'équation ordinaire des forces vives.

693. Prenons actuellement

$$\delta x = d_{,}x, \quad \delta y = d_{,}y, \quad \delta z = d_{,}z;$$

de manière que les déplacemens des points du système que suppose l'équation (h), soient leurs déplacemens relatifs. Désignons par $d_{,}p$, $d_{,}u$, $d_{,}s$, les projections des déplacemens relatifs des points où sont appliquées les forces P, U, F, sur leurs directions. Les valeurs de δp, δu, δs, qui répondent à celles de δx, δy, δz, que nous employons, seront $d_{,}p$, $d_{,}u$, $d_{,}s$. De plus, les autres parties $d'x$, $d'y$, $d'z$, des différentielles totales dx, dy, dz, n'influant pas, par hypothèse, sur les distances mutuelles des points du système, δr se changera dans la différentielle dr, comme dans le numéro précédent. L'équation (k) deviendra donc

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} d_{,}x + \frac{d^2 y}{dt^2} d_{,}y + \frac{d^2 z}{dt^2} d_{,}z\right) \\ &= \Sigma P d_{,}p \pm \Sigma R dr + \Sigma \omega U d_{,}u - \Sigma \omega F d_{,}s. \end{aligned}\right\} (k)$$

Si l'on appelle $v_{,}$ la vitesse relative du point m, dont les composantes sont $\frac{d_{,}x}{dt}$, $\frac{d_{,}y}{dt}$, $\frac{d_{,}z}{dt}$, on aura

$$v_{,}^2 = \left(\frac{d_{,}x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_{,}y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_{,}z}{dt}\right)^2,$$

et, en différentiant,

$$\frac{1}{2} d.v_{,}^2 = \frac{dd_{,}x}{dt^2} d_{,}x + \frac{dd_{,}y}{dt^2} d_{,}y + \frac{dd_{,}z}{dt^2} d_{,}z.$$

En vertu des équations (f), on aura donc

$$\frac{d^2 x}{dt^2} d_{,}x + \frac{d^2 y}{dt^2} d_{,}y + \frac{d^2 z}{dt^2} d_{,}z$$
$$= \frac{1}{2} d.v_{,}^2 + \frac{dx'}{dt} d_{,}x + \frac{dy'}{dt} d_{,}y + \frac{dz'}{dt} d_{,}z.$$

D'ailleurs, si l'on met $d_{,}x$, $d_{,}y$, $d_{,}z$, dans l'expres-

sion de δu du n° 691, pour avoir celle de $d_1 u$, on aura

$$d_1 u = V\left(\frac{dL}{dx}d_1 x + \frac{dL}{dy}d_1 y + \frac{dL}{dz}d_1 z\right);$$

quantité nulle, en vertu de l'équation (g). Au moyen de ces valeurs, l'équation (k) prendra la forme

$$\frac{1}{2}d.\Sigma m v_1^2 + \Sigma m\left(\frac{du'}{dt}d_1 x + \frac{dv'}{dt}d_1 y + \frac{dw'}{dt}d_1 z\right) = \Sigma P d_1 p \pm \Sigma R dr - \Sigma_0 F d_1 s;$$

et, en intégrant, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Sigma m v_1^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m k_1^2 &= \int \Sigma P d_1 p \pm \int \Sigma R dr - \int \Sigma_0 F d_1 s \\ &- \int \Sigma m\left(\frac{du'}{dt}d_1 x + \frac{dv'}{dt}d_1 y + \frac{dw'}{dt}d_1 z\right) \end{aligned}\right\} \quad (l)$$

k_1 étant la valeur initiale de v', et les intégrales commençant à l'origine du mouvement.

694. Cette équation (l) fera connaître l'accroissement, pendant le temps t, de la demi-somme des forces vives, dues aux vitesses relatives de tous les points du système.

En faisant directement dans la formule générale du n° 532, l'hypothèse qui nous a conduits à l'équation (l), c'est-à-dire, en y mettant $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$, au lieu de δx, δy, δz, on aura

$$\Sigma m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}d_1 x + \frac{d^2 y}{dt^2}d_1 y + \frac{d^2 z}{dt^2}d_1 z\right) = \Sigma m\,(X d_1 x + Y d_1 y + Z d_1 z),$$

ou bien, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{2}d.\,m v_1^2 = \Sigma m\left[\left(X - \frac{du'}{dt}\right)d_1 x + \left(Y - \frac{dv'}{dt}\right)\quad\left(Z - \frac{dw'}{dt}\right)d_1 z\right]$$

la somme Σ du second membre s'étendant à toutes les forces provenant des résistances normales des surfaces fixes ou mobiles, que les valeurs prises pour δx, δy, δz, ont la propriété de faire disparaître. Or, si l'on appelle H la force dont les trois composantes sont

$$m\left(X - \frac{du'}{dt}\right),\quad m\left(Y - \frac{dv'}{dt}\right),\quad m\left(Z - \frac{dw'}{dt}\right),$$

et $d_1 h$ la projection du déplacement relatif de son point d'application sur sa direction, on aura

$$m\left(X - \frac{du'}{dt}\right)d_1 x + m\left(Y - \frac{dv'}{dt}\right)d_1 y + m\left(Z - \frac{dw'}{dt}\right)d_1 z = \pm H d_1 h,$$

selon que cette projection $d_1 h$ tombera sur la direction même de la force H, ou sur son prolongement. Donc en conservant H et $d_1 h$ dans le premier cas, et employant L et $d_1 l$ dans le second, on en conclura

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v_1^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m k_1^2 = \int \Sigma H d_1 h - \int \Sigma L d_1 l;$$

la somme $\Sigma H d_1 h$ s'étendant à toutes les forces mouvantes du système, et la somme $\Sigma L d_1 l$ à toutes les forces résistantes.

Cette dernière équation n'est autre chose que l'équation (l) présentée sous une forme différente. En la comparant à l'équation (d), on voit que le principe des forces vives a encore lieu à l'égard des vitesses relatives des points du système, telles qu'elles ont été définies dans le n° 690, pourvu que l'on remplace les forces données P et Q, par d'autres forces H et L qui dépendent des premières et du mouvement commun du système.

Ce théorème est dû à M. Coriolis. Il peut être employé utilement dans beaucoup de questions étrangères à ce traité de Mécanique rationnelle, et pour lesquelles nous renverrons au mémoire de l'auteur sur le *principe des forces vives dans les mouvemens relatifs des machines* *.

695. Le terme $\int \Sigma R dr$, qui provient des forces moléculaires, est le même dans les deux équations (i) et (l); le plus souvent, le terme qui répond aux frottemens est aussi le même dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif du système, et ne change pas, par conséquent, en passant d'une équation à l'autre; alors, en retranchant la seconde de ces équations de la première, on aura

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Sigma m\,(v^2 - v_1^2) - \Sigma m\,(k^2 - k_1^2) &= \int \Sigma P\,(dp - d_1 p \\ + \tfrac{1}{2}\int \Sigma m\left(\frac{du'}{dt}d_1 x + \frac{dv'}{dt}d_1 y + \frac{dw'}{dt}d_1 z\right) &+ \int \Sigma_0 U du. \end{aligned}\right\} \quad (m)$$

Si les forces P se réduisent aux poids des différentes parties du système; que l'on appelle Π le poids total, et t' la hauteur verticale que décrit son centre de gravité pendant le temps t, dans le mouve-

* *Journal de l'École Polytechnique*, 21e cahier.

ment commun à tous ses points, il est aisé de voir que l'on aura aussi

$$\int \Sigma P(dp - d_l p) = \Pi t'.$$

De plus, s'il n'y a qu'une seule surface résistante, et que ce soit, par exemple, un plan qui se meut parallèlement à lui-même, on pourra prendre, pour le mouvement commun du système, le mouvement donné de ce plan, car il satisfait aux deux conditions du n° 690 : il ne changera pas les distances mutuelles des points du système, et il n'empêchera pas les points qui sont en contact avec ce plan mobile, de demeurer à sa surface. D'ailleurs, il est évident que ce mouvement étant perpendiculaire au plan mobile, il n'influera aucunement sur les vitesses relatives des points qui glissent sur ce plan, non plus que sur les trajectoires qu'ils y décrivent; d'où il résulte que le travail résistant dû au frottement contre ce plan, sera le même dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif, comme le suppose l'équation (m).

Pour simplifier encore cette équation, je suppose que le mouvement du plan résistant soit uniforme; en sorte que tous ses points décrivent des perpendiculaires à sa position initiale, avec une vitesse commune, qui sera rendue, par un moyen quelconque, invariable et indépendante de l'action du système sur ce plan. Ses composantes u', v', w', seront constantes, et l'on aura

$$\int \Sigma m\left(\frac{du'}{dt} d_l x + \frac{dv'}{dt} d_l y + \frac{dw'}{dt} d_l z\right) = 0.$$

En désignant cette vitesse par a, et par α l'angle que sa direction fait avec celle de la pesanteur, on aura aussi

$$t' = at \cos \alpha.$$

Soit, en outre, Q la pression exercée au bout du temps t, sur la surface entière du plan donné, et dans le sens de la vitesse a. Le travail résistant qui répond à cette force prise en sens contraire de sa direction, c'est-à-dire, à la résistance du plan, sera $-\int Qadt$, pendant la durée du temps t, en supposant que l'intégrale s'évanouisse avec cette variable. En faisant passer le facteur a en dehors du signe $\int$, nous aurons donc

$$\int \Sigma \omega U du = -a\int Qdt,$$

pour la valeur du dernier terme de l'équation (m), laquelle deviendra

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(k^2 - k_l^2) - \tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(v^2 - v_l^2) + \Pi at \cos \alpha = a\int Qdt. \qquad (n)$$

La vitesse v_l est la résultante de v et de la vitesse a prise en sens contraire de sa direction; si donc, on représente par ϵ, l'angle que fait la direction de la vitesse v avec celle de a, on aura

$$v_l^2 = v^2 - 2av \cos \epsilon + a^2;$$

et si l'on désigne par δ la valeur initiale de ϵ, on aura de même

$$k_l^2 = k^2 - 2ak \cos \delta + a^2;$$

d'où il résulte

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(k^2 - k_l^2) = a\,\Sigma mk \cos \delta - \tfrac{1}{2}\,a^2\,\Sigma m,$$

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m\,(v^2 - v_l^2) = a\,\Sigma mv \cos \epsilon - \tfrac{1}{2}\,a^2\,\Sigma m;$$

ce qui change l'équation (n) en celle-ci,

$$\Sigma mk \cos \delta - \Sigma mv \cos \epsilon + \Pi t \cos \alpha = \int Qdt, \qquad (o)$$

après qu'on a supprimé le facteur a commun à tous ses termes.

Les sommes $\Sigma mk \cos \delta$ et $\Sigma mv \cos \epsilon$ expriment, au commencement et à la fin du temps t, les quantités de mouvement de tous les points du système, dans le sens perpendiculaire au plan donné; le produit $\Pi t \cos \alpha$ est la quantité de mouvement produite suivant la même direction par le poids Π du système, pendant la durée du temps t; et l'intégrale $\int Qdt$ est la quantité de mouvement détruite pendant ce temps par la résistance du plan donné. Or, il est évident que cette dernière quantité doit être égale à l'excès de la première somme sur la seconde, augmenté de la quantité $\Pi t \cos \alpha$; en sorte que l'équation précédente, qui exprime cette égalité peut être regardée comme une vérification de notre analyse.

696. Lorsque la vitesse k de chaque point du système se changera brusquement dans la vitesse v, l'action du système sur le plan donné sera une percussion; pendant sa durée très courte, on pourra négliger l'effet $\Pi t \cos \alpha$ de la pesanteur; et la quantité de mouvement détruite par le plan sera l'excès de $\Sigma mk \cos \delta$ sur $\Sigma mv \cos \epsilon$.

Si le système est un corps solide situé au-dessus du plan, et qui demeure juxta-posé à sa surface après le choc, la composante $v \cos \epsilon$ de la vitesse v sera la même, à cet instant, pour tous les points du corps, et égale à la constante a; en différentiant l'équation (o) par rapport à t, on aura donc

$$\Pi \cos \alpha = Q;$$

et, en effet, la vitesse du plan étant invariable, par hypothèse, il faut que sa résistance détruise incessamment les accélérations de la gravité, qui auraient lieu perpendiculairement à sa surface; il faut donc que cette force soit égale et contraire à la composante du poids Π suivant cette direction, et que la pression Q soit égale à cette composante.

On peut remarquer que, quand l'angle α est obtus, la valeur précédente de Q a le signe —. Mais on a supposé plus haut que la pression exercée sur ce plan était dirigée dans le sens de la vitesse a; et, si le contraire avait lieu il faudrait changer le signe de Q dans toutes les équations précédentes. Or, la

pression Q s'exerce effectivement en sens contraire de la vitesse a, lorsque l'angle α est obtus; la valeur de Q est donc alors $-\Pi \cos \alpha$, ou, autrement dit, cette valeur est toujours $\Pi \cos \alpha$, abstraction faite du signe.

697. L'équation (o) évidente en elle-même, peut servir à déterminer la pression d'une veine fluide en mouvement sur un plan AB (fig. 142), animé de la vitesse a perpendiculaire à ce plan, et dont la direction fait, avec celle de la pesanteur, un angle α.

Pour fixer les idées, supposons que le liquide sorte d'un vase par un orifice horizontal, et qu'il forme, au-dessous de la contraction de la veine (n° 677), un cylindre vertical dont tous les points ont une vitesse commune et verticale, que nous désignerons par γ. Supposons aussi que le niveau du liquide soit entretenu à une hauteur constante dans le vase; ce qui rendra la vitesse γ indépendante du temps.

Jusqu'à une section horizontale CD, faite à une petite distance au-dessus du plan AB, la veine conservera sa forme cylindrique et sa vitesse γ; elle s'étendra ensuite sur ce plan, et finira par le déborder. Au bout d'un certain temps, le fluide parviendra à un état permanent dans lequel la vitesse de chaque molécule ne dépendra plus que du lieu qu'elle occupe, et où la pression en un point quelconque du plan AB sera aussi indépendante du temps. C'est dans cet état qu'il s'agira de déterminer la pression totale Q, exercée sur la surface entière du plan.

La partie de cette pression due au poids du liquide, sera la composante de ce poids, perpendiculaire au plan AB, défalcation faite de la partie de ce même poids, qui est soutenue par les parois du vase d'où le liquide s'écoule. Comme il sera toujours facile d'y avoir égard, dans chaque cas particulier, nous en ferons abstraction, et nous ferons, en conséquence, $\Pi = 0$, dans l'équation (o). Il est évident, qu'on pourra aussi, dans les sommes $\Sigma mk \cos \delta$ et $\Sigma mv \cos \varepsilon$, ne pas tenir compte des molécules du liquide situées au-dessus de CD, puisqu'elles conservent toujours la même vitesse, ce qui fait disparaître la différence de ces deux sommes. Enfin si le diamètre de la veine fluide est très petit, l'épaisseur de la couche liquide sera aussi très petite, à une petite distance autour de l'axe de la veine. A cette distance, les vitesses relatives des points de la couche seront sensiblement parallèles au plan AB, dans toute l'épaisseur de la couche, ou, ce qui est la même chose, leurs composantes perpendiculaires à ce plan seront égales à a. De plus, cette partie du fluide comprise entre AB et CD sera beaucoup plus considérable que la partie voisine de l'axe de la veine, si la surface du plan AB est très grande par rapport à la section CD; on pourra donc alors prendre a, sans erreur sensible, pour la composante $v \cos \varepsilon$ de la vitesse v de chaque point du fluide contenu entre AB et CD.

Cela posé, soit C'D' une autre section de la veine fluide, faite au-dessus de CD, et telle que le volume compris entre CD et C'D' soit équivalent au volume de fluide compris entre AB et CD. Appelons θ le temps que le premier volume du liquide emploie à traverser la section CD et à se changer dans le second volume. Supposons que les sommes $\Sigma mk \cos \delta$ et $\Sigma mv \cos \varepsilon$, de l'équation ($o$), étendues à tous les points du second volume, se rapportent au commencement et à la fin du temps θ. Au commencement, tous ces points étaient situés au-dessus de CD, et avaient, conséquemment, une vitesse γ, faisant un angle α avec la vitesse a; pour un point quelconque m, on a donc

$$k = \gamma, \quad \delta = \alpha, \quad k \cos \delta = \gamma \cos \alpha.$$

A la fin du temps θ, on a, comme on vient de le dire,

$$v \cos \varepsilon = a,$$

pour un point quelconque m du liquide contenu entre AB et CD. Si donc on appelle μ la masse de ce liquide, il en résultera

$$\Sigma mk \cos \delta - \Sigma mv \cos \varepsilon = \mu (\gamma \cos \alpha - a).$$

D'ailleurs, la pression Q étant constante, l'intégrale $\int Q dt$ est égale au produit $Q\theta$, pour la durée du temps θ; d'après l'intégrale (o), nous aurons donc

$$\mu (\gamma \cos \alpha - a) = Q\theta.$$

Soit n le nombre de fois que le temps θ est contenu dans un temps t quelconque; $n\mu$ sera la masse du liquide qui traversera la section CD pendant le temps t. Mais cette masse sera aussi $\rho c \gamma t$, en appelant ρ la densité du liquide, c l'aire de la section CD, et observant que γ est la vitesse constante de l'écoulement à travers cette section; on aura, par conséquent,

$$n\mu = \rho c \gamma t;$$

si l'on multiplie l'équation précédente par n, que l'on y substitue cette valeur de $n\mu$, et qu'on supprime ensuite le facteur t, commun à tous ses termes, on a finalement

$$Q = \rho c \gamma (\gamma \cos \alpha - a),$$

pour la valeur de la pression qu'on se proposait de déterminer.

On devra se rappeler que cette formule suppose l'angle α aigu; quand il sera obtus, il faudra, comme on l'a dit plus haut, changer le signe de Q; en sorte que l'on aura alors

$$Q = \rho c \gamma (\gamma \cos \alpha + a).$$

Ces deux expressions de Q supposent aussi que le plan AB est entièrement recouvert par la veine fluide épanouie sur sa surface; ce qui exige que α ne soit pas un angle droit, et, qu'en général, il s'écarte sensiblement de 90°. Quand le mouvement du

plan est vertical, on a $\alpha = 0$, ou $\alpha = 180°$, et, conséquemment,

$$Q = \rho c \gamma \ (\gamma \mp a);$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque le plan se meut dans le sens de la pesanteur, et le signe inférieur dans le cas contraire. Si l'on a $\alpha = 0$, et que γ soit la vitesse due à la hauteur h, et g la gravité, on aura

$$Q = 2g\rho c h;$$

en sorte que la pression Q sera, dans ce cas, le poids d'une portion de la veine cylindrique égale en longueur à h.

FIN.

ERRATA.

Page 48, 1re colonne, ligne 12 en remontant,

$$X = bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \text{ lisez } X = \sqrt{bc}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Page 292, formule (3), 3e ligne,

$$+ (w_l' + p_l b' -) \text{ lisez } + (w_l' + p_l' b' -)$$

Page 419, formule b,

$$1\left[\qquad\qquad\right] \text{ lisez } \frac{1}{2}\left[\qquad\qquad\right]$$

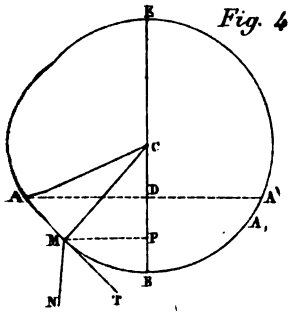


Fig. 45.

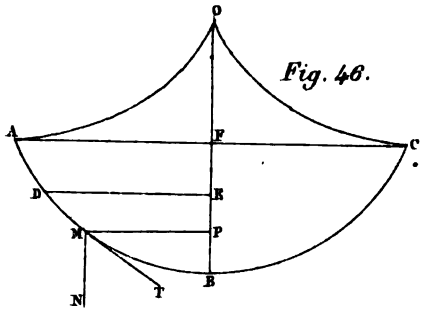


Fig. 46.

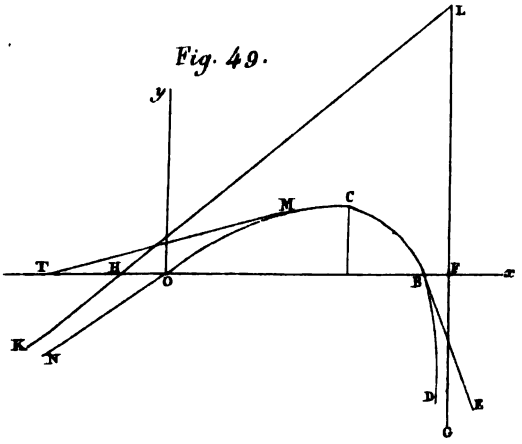


Fig. 49.

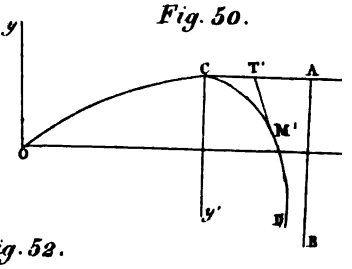


Fig. 50.

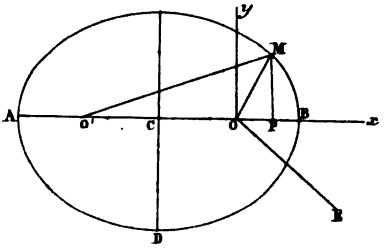


Fig. 52.

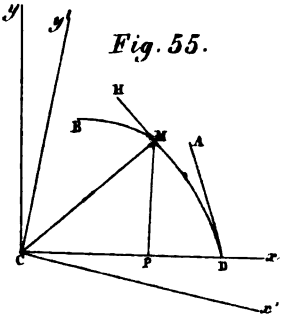


Fig. 55.

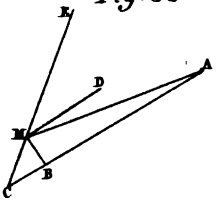


Fig. 56.

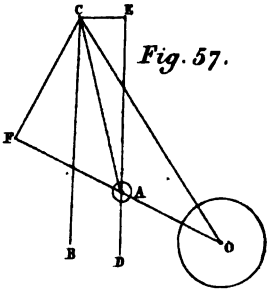
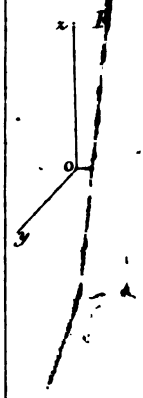
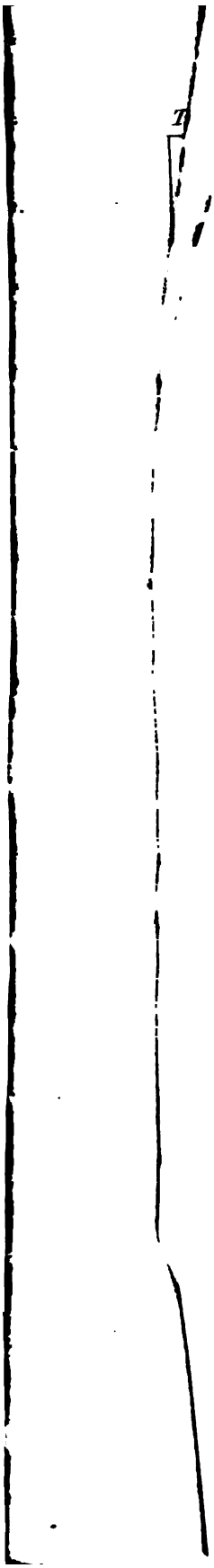


Fig. 57.



Fig

Tra



1

97.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

form 410

ARY

yes to be